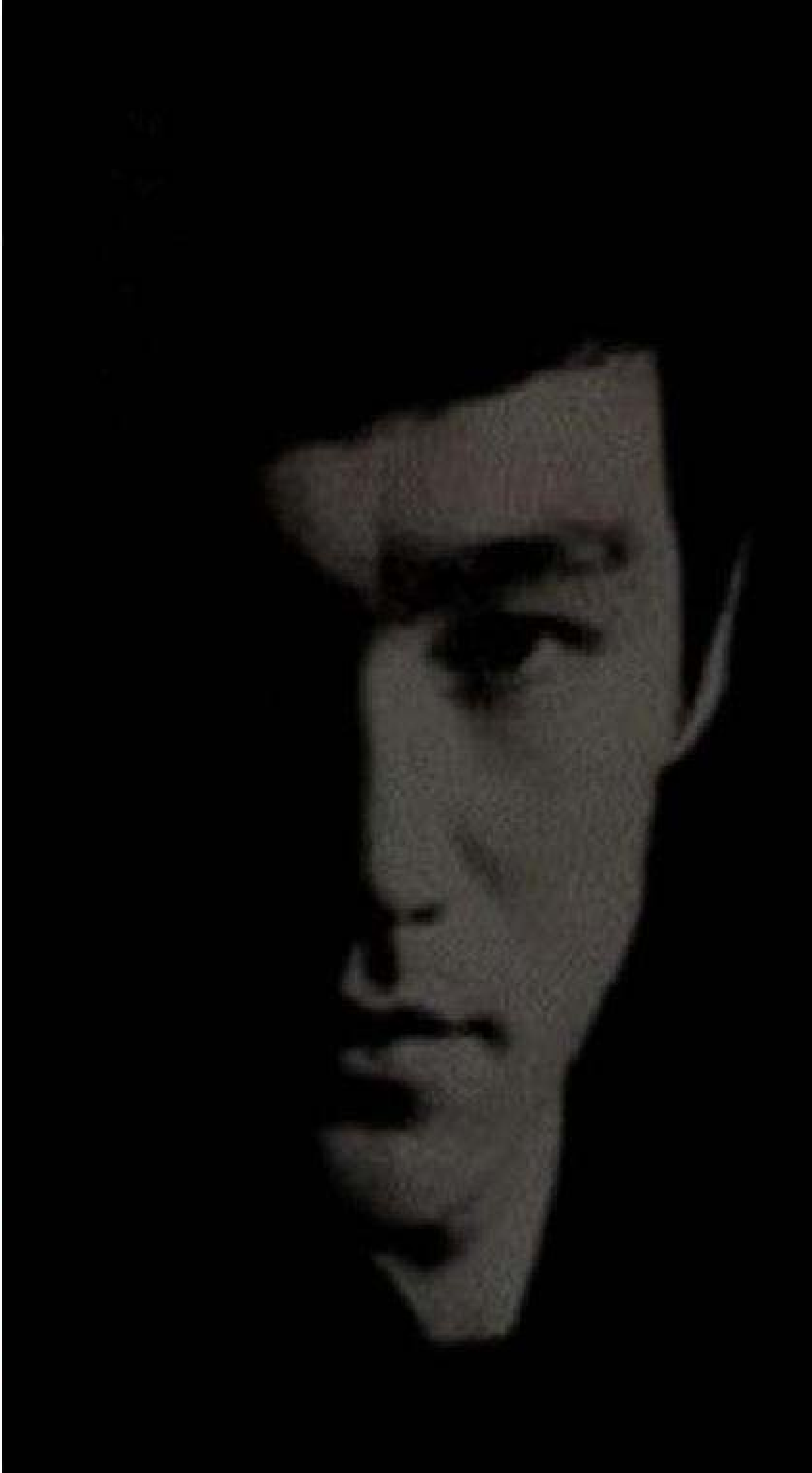
独步天下藏书系列

独步天下



College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

同济大学应用数学系 编

高等数学
习题全解指南（上册）

同济·四、五版

高等教育出版社

College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

本书内容包括以下三部分：

- **习题全解** 对主教材各章的全部习题与总习题给出解答；部分题目提供多种解法，揭示解题规律，归纳解题方法。
- **考研试题** 按照考试大纲中高等数学内容的顺序，选取近几年全国硕士研究生入学考试数学试题，给出解答，以期帮助考研人员掌握解题步骤和方法。
- **考卷选编** 精选了同济大学期中及期末高等数学考试试卷及详解，读者可检验对课程的掌握程度，巩固学习效果。

本书可作为工科和其他非数学类专业的学生学习高等数学以及准备报考硕士研究生的人员复习高等数学的参考书。

ISBN 7-04-011991-9

9 787040 119916 >

定价 20.10 元

大学数学学习辅导丛书

高等数学习题全解指南

同济·四、五版(上册)

同济大学应用数学系　编

高等教育出版社

内容提要

本书是与同济大学应用数学系主编的《高等数学》第四、五版相配套的学习辅导书，由同济大学应用数学系的教师编写．本书内容由三部分组成，第一部分是按《高等数学》（上册）的章节顺序编排，给出习题全解．部分题目在解答之后对该类题的解法作了小结、归纳，有的提供了多种解法；第二部分是全国硕士研究生入学考试数学试题选解，所选择的试题以工学类为主，少量涉及经济学类试题；第三部分是同济大学高等数学考卷选编，以及考题的参考解答．

本书对教材具有相对的独立性，可为工科和其他非数学类专业学生学习以及准备报考硕士研究生的人员复习高等数学提供解题指导，也可供讲授《高等数学》的教师在备课和批改作业时参考．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解指南．（上册）：同济·四、五版/同济大学应用数学系编．—北京：高等教育出版社，2003.7
ISBN 7-04-011991-9

Ⅰ.高…　Ⅱ.同…　Ⅲ.高等数学-高等学校-解题　Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 025208 号

策　　划　张忠月　**编　　辑**　胡乃冏　**封面设计**　王凌波　**责任绘图**　杜晓丹
版式设计　王艳红　**责任校对**　殷　然　**责任印制**　杨　明

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2003 年 7 月第 1 版
印　　张	19	印　　次	2003 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	350 000	定　　价	20.10 元

前　言

本书是同济大学应用数学系主编的《高等数学》(第四、五版)的配套用书,主要是为学习《高等数学》的大学生以及准备报考硕士研究生的人员复习《高等数学》提供一本解题指导的参考书,也可供讲授《高等数学》的教师在备课和批改作业时参考。

本书内容由三部分组成,第一部分是《高等数学》(第五版)的习题全解,包括各章的习题与总习题及解答,在解答中,有的题在解答之后,以注释的形式对该类题的解法作了归纳小结,有的题提供了常用的具有典型意义的多种解法。第二部分是全国硕士研究生入学统一考试数学试题选解,按照2002年4月教育部制定的数学考试大纲中关于数学一类型的高等数学内容的顺序,分函数、极限、连续,一元函数微分学,一元函数积分学,向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数、常微分方程八个部分,每一部分选编的题量控制在25题之内,在每道试题的前面都注明了试题的年份及类别,如(1998.Ⅰ)表示为1998年第一类考题(1987—1996年考题共分为五类,1997年以后只分为四类)。所选择的试题以工科类为主,少量涉及经济学类试题,每道试题都给出了解题的思路与方法,有的还给出了多种解法,以供读者参考。第三部分是同济大学期中、期末考试《高等数学》试卷选编。按上、下册内容,选了期中、期末各两套试卷,并提供了试题的参考解答。

本书由同济大学应用数学系的教师编写,其中第一部分第一、八章,第二部分(一)、(二)、(五)由邱伯驺,第一部分第二、三、七章由徐建平;第一部分第四、五、六章,第二部分(三)由朱晓平;第一部分第九、十章,第二部分(四)、(六)由郭镜明;第一部分第十一、十二章,第二部分(七)、(八)由应明;第三部分由应明、朱晓平完成。

本书中存在的问题,欢迎广大专家、同行和读者批评指正。

编　者

二〇〇二年十二月

目　　录

一、《高等数学》(第五版)上册习题全解

二、硕士研究生入学考试数学试题选解

三、同济大学《高等数学》试卷选编

一、《高等数学》(第五版)上册习题全解

第一章　函数与极限

习　题　1－1

1. 设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$，$B=[-10,3)$，写出 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\setminus B$ 及 $A\setminus(A\setminus B)$ 的表达式.

解　$A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$，$A\cap B=[-10,-5)$，

$A\setminus B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$，$A\setminus(A\setminus B)=[-10,-5)$.

注　$A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$.

2. 设 A、B、C 是任意三个集合，证明对偶律：$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

证　$x\in(A\cap B)^C\Leftrightarrow x\notin A\cap B\Leftrightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B\Leftrightarrow x\in A^C$ 或 $x\in B^C\Leftrightarrow x\in A^C\cup B^C$.

3. 设映射 $f:X\to Y$，$A\subset X$，$B\subset X$. 证明

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$；

(2) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

证　(1) $y\in f(A\cup B)\Leftrightarrow\exists\, x\in A\cup B$，$y=f(x)\Leftrightarrow\exists\, x\in A$ 或 $x\in B$，$y=f(x)\Leftrightarrow y\in f(A)$ 或 $y\in f(B)\Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B)$.

(2) $y\in f(A\cap B)\Rightarrow\exists\, x\in A\cap B$，$y=f(x)\Rightarrow y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)\Rightarrow y\in f(A)\cap f(B)$.

注意：反之，由 $y\in f(A)\cap f(B)\Rightarrow y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)\Rightarrow\exists\, x\in A$，$y=f(x)$；$\exists\, x'\in B$，$y=f(x')$. 由于 f 不一定是单射，未必有 $x=x'$. 例如，函数 $f(x)=x^2$，$x\in\mathbf{R}$. $A=(-\infty,0]$，$B=[-1,+\infty)$，$A\cap B=[-1,0]$，$f(A\cap B)=[0,1]$，但 $f(A)\cap f(B)=[0,+\infty)$.

4. 设映射 $f:X\to Y$，若存在一个映射 $g:Y\to X$，使 $g\circ f=I_X$，$f\circ g=I_Y$，其中 I_X、I_Y 分别是 X、Y 上的恒等映射，即对于每一个 $x\in X$，有 $I_Xx=x$；对于每一个 $y\in Y$，有 $I_Yy=y$. 证明：f 是双射，且 g 是 f 的逆映射：$g=f^{-1}$.

证　先证 f 是单射：设 $x_1,x_2\in X$，$x_1\neq x_2$，要证 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 用反证法. 若 $f(x_1)=f(x_2)$，则由假设，存在 $g:Y\to X$，使 $g\circ f=I_X$，故 $x_1=I_Xx_1=$

$(g\circ f)(x_1)=g[f(x_1)]=g[f(x_2)]=(g\circ f)(x_2)=I_X x_2=x_2$，导出矛盾．因此 f 是单射．

再证 f 是满射且 $g=f^{-1}$：由于 $g:Y\to X$，故 $\forall y\in Y$，有 $g(y)=x\in X$．而 $f\circ g=I_Y$，因此，$y=I_Y y=(f\circ g)(y)=f[g(y)]=f(x)$，即 f 是满射，且由逆映射定义知 $g=f^{-1}$．

5．设映射 $f:X\to Y$，$A\subset X$，记 $f(A)$ 的原像为 $f^{-1}(f(A))$．证明：

(1) $f^{-1}(f(A))\supset A$；

(2) 当 f 是单射时，有 $f^{-1}(f(A))=A$．

证 (1) $x\in A\Rightarrow f(x)\in f(A)$．因为记号 $f^{-1}(B)$ 表示集合 B（在映射 f 下）的原像，即 $f^{-1}(B)=\{x\mid f(x)\in B,x\in D_f\}$，所以 $f(x)\in f(A)\Rightarrow x\in f^{-1}(f(A))$，即 $A\subset f^{-1}(f(A))$．

(2) 由(1)，只要证：$x\in f^{-1}(f(A))\Rightarrow x\in A$．

用反证法．若 $x\notin A$，则对 $\forall x'\in A$，$x\neq x'$，f 是单射 $\Rightarrow f(x)\neq f(x')$，从而 $f(x)\notin f(A)$，即 $x\notin f^{-1}(f(A))$，导出矛盾．所以 $x\in A$，从而 $f^{-1}(f(A))\subset A$．

6．求下列函数的自然定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+2}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；

(5) $y=\sin\sqrt{x}$；　　(6) $y=\tan(x+1)$；

(7) $y=\arcsin(x-3)$；　　(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

(9) $y=\ln(x+1)$；　　(10) $y=e^{\frac{1}{x}}$．

解 (1) $3x+2\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant -\dfrac{2}{3}$，即定义域为 $\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$．

(2) $1-x^2\neq 0\Rightarrow x\neq\pm 1$，即定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$．

(3) $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0\Rightarrow x\neq 0$ 且 $|x|\leqslant 1$，即定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$．

(4) $4-x^2>0\Rightarrow |x|<2$，即定义域为 $(-2,2)$．

(5) $x\geqslant 0$，即定义域为 $[0,+\infty)$．

(6) $x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi-1,k\in\mathbf{Z}\right\}$．

(7) $|x-3|\leqslant 1\Rightarrow 2\leqslant x\leqslant 4$，即定义域为 $[2,4]$．

(8) $3-x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$，即定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,3]$．

(9) $x+1>0\Rightarrow x>-1$，即定义域为 $(-1,+\infty)$．

(10) $x\neq 0$,即定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

注 本题是求函数的自然定义域,一般方法是先写出构成所求函数的各个简单函数的定义域,再求出这些定义域的交集,即得所求定义域.下列简单函数及其定义域是经常用到的:

$y=\dfrac{Q(x)}{P(x)}$, $P(x)\neq 0$;

$y=\sqrt[2n]{x}$, $x\geqslant 0$;

$y=\log_a x$, $x>0$;

$y=\tan x$, $x\neq\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$;

$y=\cot x$, $x\neq k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$;

$y=\arcsin x$, $|x|\leqslant 1$;

$y=\arccos x$, $|x|\leqslant 1$.

7. 下列各题中,函数 $f(x)$和 $g(x)$是否相同? 为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(4) $f(x)=1$, $g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

解 (1) 不同,因为定义域不同.

(2) 不同,因为对应法则不同,$g(x)=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0.\end{cases}$

(3) 相同,因为定义域、对应法则均相同.

(4) 不同,因为定义域不同.

8. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases} |\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3}, \\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$$

求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$,$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$,$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$,$\varphi(-2)$,并作出函数 $y=\varphi(x)$的图形.

解

$\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right|=\dfrac{1}{2}$,$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\varphi(-2)=0$.

$y=\varphi(x)$的图形如图 1-1 所示.

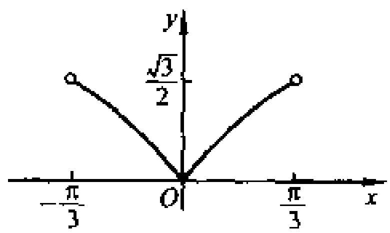


图 1-1

9. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=\frac{x}{1-x},(-\infty,1)$;

(2) $y=x+\ln x,(0,+\infty)$.

证 (1) $y=f(x)=\frac{x}{1-x}=-1+\frac{1}{1-x},(-\infty,1)$.

设 $x_1<x_2<1$. 因为 $f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{1-x_2}-\frac{1}{1-x_1}=\frac{x_2-x_1}{(1-x_1)(1-x_2)}>0$,所以$f(x_2)>f(x_1)$,即 $f(x)$在$(-\infty,1)$内单调增加.

(2) $y=f(x)=x+\ln x,(0,+\infty)$.

设$0<x_1<x_2$. 因为 $f(x_2)-f(x_1)=x_2+\ln x_2-x_1-\ln x_1=x_2-x_1+\ln\frac{x_2}{x_1}>0$,所以 $f(x_2)>f(x_1)$,即 $f(x)$在$(0,+\infty)$内单调增加.

10. 设 $f(x)$为定义在$(-l,l)$内的奇函数,若 $f(x)$在$(0,l)$内单调增加,证明 $f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加.

证 设$-l<x_1<x_2<0$,则 $0<-x_2<-x_1<l$,由 $f(x)$是奇函数,得 $f(x_2)-f(x_1)=-f(-x_2)+f(-x_1)$. 因为 $f(x)$在$(0,l)$内单调增加,所以 $f(-x_1)-f(-x_2)>0$,从而 $f(x_2)>f(x_1)$,即 $f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加.

11. 设下面所考虑的函数都是定义在区间$(-l,l)$上的.
证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证 (1) 设 $f_1(x),f_2(x)$均为偶函数,则 $f_1(-x)=f_1(x),f_2(-x)=f_2(x)$. 令 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$,于是

$$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x),$$

故 $F(x)$为偶函数.

设 $g_1(x),g_2(x)$是奇函数,则 $g_1(-x)=-g_1(x),g_2(-x)=-g_2(x)$. 令 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$,于是

$$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x),$$

故 $G(x)$为奇函数.

(2) 设 $f_1(x),f_2(x)$均为偶函数,则 $f_1(-x)=f_1(x),f_2(-x)=f_2(x)$. 令 $F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$. 于是

$$F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)f_2(x)=F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 为奇函数，则 $g_1(-x)=-g_1(x)$，$g_2(-x)=-g_2(x)$. 令 $G(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$. 于是

$$G(-x)=g_1(-x)\cdot g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]=g_1(x)\cdot g_2(x)=G(x),$$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数，则 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$. 令 $H(x)=f(x)\cdot g(x)$，于是

$$H(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)[-g(x)]=-f(x)\cdot g(x)=-H(x),$$

故 $H(x)$ 为奇函数.

12. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非偶函数又非奇函数?

(1) $y=x^2(1-x^2)$；　　(2) $y=3x^2-x^3$；

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；　　(4) $y=x(x-1)(x+1)$；

(5) $y=\sin x-\cos x+1$；　　(6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

解 (1) $y=f(x)=x^2(1-x^2)$，因为 $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $y=f(x)=3x^2-x^3$，因为 $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3$，$f(-x)\neq f(x)$，且 $f(-x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(3) $y=f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，因为 $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

(4) $y=f(x)=x(x-1)(x+1)$，因为 $f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x+1)(x-1)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数.

(5) $y=f(x)=\sin x-\cos x+1$，因为 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$，$f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(6) $y=f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$，因为 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

13. 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数，指出其周期:

(1) $y=\cos(x-2)$；　　(2) $y=\cos 4x$；

(3) $y=1+\sin \pi x$；　　(4) $y=x\cos x$；

(5) $y=\sin^2 x$.

解 (1) 是周期函数，周期 $l=2\pi$.

(2) 是周期函数,周期 $l=\frac{\pi}{2}$.

(3) 是周期函数,周期 $l=2$.

(4) 不是周期函数.

(5) 是周期函数,周期 $l=\pi$.

14. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$;　　(2) $y=\frac{1-x}{1+x}$;

(3) $y=\frac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$;　(4) $y=2\sin 3x\left(-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}\right)$;

(5) $y=1+\ln(x+2)$;　　(6) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$.

分析　函数 f 存在反函数的前提条件为:$f:D\to f(D)$是单射.本题中所给出的各函数易证均为单射,特别(1)、(4)、(5)、(6)中的函数均为单调函数,故都存在反函数.

解　(1) 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$解得 $x=y^3-1$,即反函数为 $y=x^3-1$.

(2) 由 $y=\frac{1-x}{1+x}$解得 $x=\frac{1-y}{1+y}$,即反函数为 $y=\frac{1-x}{1+x}$.

(3) 由 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$解得 $x=\frac{-dy+b}{cy-a}$,即反函数为 $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$.

(4) 由 $y=2\sin 3x\left(-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}\right)$解得 $x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}$,即反函数为 $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$.

(5) 由 $y=1+\ln(x+2)$解得 $x=e^{y-1}-2$,即反函数为 $y=e^{x-1}-2$.

(6) 由 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$解得 $x=\log_2\frac{y}{1-y}$,即反函数为 $y=\log_2\frac{x}{1-x}$.

15. 设函数 $f(x)$在数集 X 上有定义,试证:函数 $f(x)$在 X 上有界的充分必要条件是它在X 上既有上界又有下界.

解　设 $f(x)$在 X 上有界,即存在 $M>0$,使得

$$|f(x)|\leqslant M,\ x\in X.$$

故

$$-M\leqslant f(x)\leqslant M,\ x\in X,$$

即 $f(x)$在 X 上有上界 M,下界 $-M$.

反之,设 $f(x)$在 X 上有上界 K_1,下界 K_2,即

$$K_2\leqslant f(x)\leqslant K_1,\ x\in X.$$

取 $M=\max\{|K_1|,|K_2|\}$,则有

$$|f(x)|\leqslant M,\ x\in X,$$

即 $f(x)$在 X 上有界.

16. 在下列各题中,求由所给函数构成的复合函数,并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y=u^2,u=\sin x,x_1=\dfrac{\pi}{6},x_2=\dfrac{\pi}{3}$;

(2) $y=\sin u,u=2x,x_1=\dfrac{\pi}{8},x_2=\dfrac{\pi}{4}$;

(3) $y=\sqrt{u},u=1+x^2,x_1=1,x_2=2$;

(4) $y=e^u,u=x^2,x_1=0,x_2=1$;

(5) $y=u^2,u=e^x,x_1=1,x_2=-1$.

解 (1) $y=\sin^2 x,y_1=\dfrac{1}{4},y_2=\dfrac{3}{4}$.

(2) $y=\sin 2x,y_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2},y_2=1$.

(3) $y=\sqrt{1+x^2},y_1=\sqrt{2},y_2=\sqrt{5}$.

(4) $y=e^{x^2},y_1=1,y_2=e$.

(5) $y=e^{2x},y_1=e^2,y_2=e^{-2}$.

17. 设 $f(x)$的定义域 $D=[0,1]$,求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$; (2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a)(a>0)$; (4) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$.

解 (1) $0\leqslant x^2\leqslant 1\Rightarrow x\in[-1,1]$.

(2) $0\leqslant \sin x\leqslant 1\Rightarrow x\in[2n\pi,(2n+1)\pi],n\in\mathbf{Z}$.

(3) $0\leqslant x+a\leqslant 1\Rightarrow x\in[-a,1-a]$.

(4) $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1.\end{cases}\Rightarrow$ 当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$时,$x\in[a,1-a]$;当 $a>\dfrac{1}{2}$时,定义域为 $\varnothing$.

18. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\0, & |x|=1,\\-1, & |x|>1,\end{cases}\quad g(x)=e^x,$$

求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形.

解 $f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & x<0,\\0, & x=0,\\-1, & x>0\end{cases}$

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases}$$

$f[g(x)]$与 $g[f(x)]$的图形依次如图 1-2,1-3 所示.

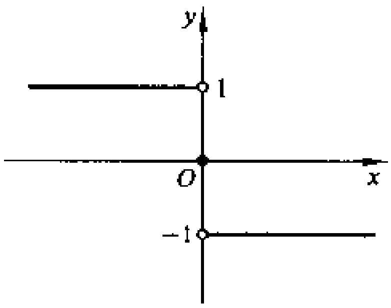


图 1-2

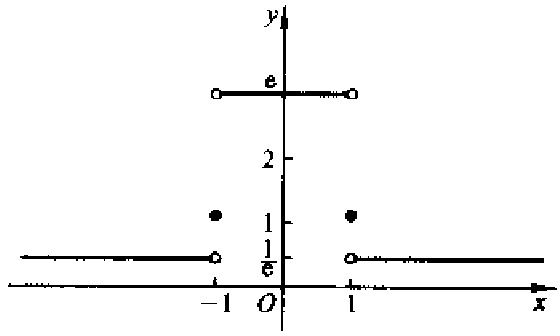


图 1-3

19. 已知水渠的横断面为等腰梯形,斜角 $\varphi = 40°$(图 1-4). 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时,求湿周 $L(L = AB + BC + CD)$与水深 h 之间的函数关系式,并指明其定义域.

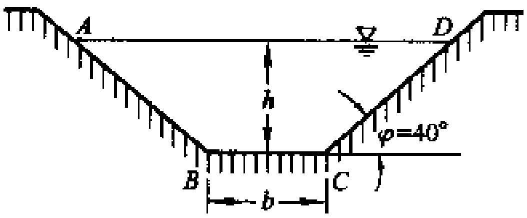


图 1-4

解 $AB = CD = \dfrac{h}{\sin 40°}$,

又
$$S_0 = \frac{1}{2}h[BC + (BC + 2\cot 40° \cdot h)],$$

得
$$BC = \frac{S_0}{h} - \cot 40° \cdot h,$$

所以
$$L = \frac{S_0}{h} + \frac{2 - \cos 40°}{\sin 40°}h,$$

而 $h > 0$ 且 $\dfrac{S_0}{h} - \cot 40° \cdot h > 0$,因此湿周函数的定义域为$(0, \sqrt{S_0 \tan 40°})$.

20. 收音机每台售价为 90 元,成本为 60 元. 厂方为鼓励销售商大量采购,决定凡是订购量超过 100 台以上的,每多订购 1 台,售价就降低 1 分,但最低价为每台 75 元.

(1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数;

(2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数;

(3) 某一商行订购了 1 000 台,厂方可获利润多少?

解 设订购 x 台,实际售价每台 p 元,厂方所获利润 P 元.则按题意,有

当 $x\in[0,100]$时,$p=90,P=(90-60)x=30x$,

当 $x>100$ 时,超过 100 台的订购量为 $x-100$,售价降低 $0.01(x-100)$,但最低价为 75,即降价数不超过 $90-75=15$,故

$$0.01(x-100)\leqslant 15,\Rightarrow x\leqslant 1\,600.$$

于是

当 $x\in(100,1\,600]$时,$p=90-0.01(x-100)=91-0.01x$,$P=(91-0.01x-60)x=31x-0.01x^2$.

当 $x\in(1\,600,+\infty)$时,$p=75,P=(75-60)x=15x$.

因此,有

(1)

$$p=\begin{cases}90, & x\in[0,100],\\ 91-0.01x, & x\in(100,1\,600],\\ 75, & x\in(1\,600,+\infty).\end{cases}$$

(2)

$$P=\begin{cases}30x, & x\in[0,100],\\ 31x-0.01x^2, & x\in(100,1\,600],\\ 15x, & x\in(1\,600,+\infty).\end{cases}$$

(3) $x=1\,000,P=31\times10^3-0.01\times10^6=21\times10^3$(元).

习 题 1-2

1. 观察一般项 x_n 如下的数列$\{x_n\}$的变化趋势,写出它们的极限:

(1) $x_n=\frac{1}{2^n}$;　　　　(2) $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$;

(3) $x_n=2+\frac{1}{n^2}$;　　　　(4) $x_n=\frac{n-1}{n+1}$;

(5) $x_n=n(-1)^n$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)=2$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=1$.

(5) $\{n(-1)^n\}$没有极限.

2. 设数列$\{x_n\}$的一般项 $x_n=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$. 问$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$? 求出 N,使当 $n>N$ 时,x_n 与其极限之差的绝对值小于正数ε. 当 $\varepsilon=0.001$ 时,求出数 N.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 证明如下:

因为 $|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant\frac{1}{n}$,

要使$|x_n-0|<\varepsilon$,只要$\frac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

所以$\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有$|x_n-0|<\varepsilon$.

当 $\varepsilon=0.001$ 时,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]=1\ 000$. 即若 $\varepsilon=0.001$,只要 $n>1\ 000$,就有 $|x_n-0|<0.001$.

3. 根据数列极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

证 (1) 因为要使$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon$,只要 $n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$,

所以$\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

(2) 因为$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{4n}$,要使$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$,只要$\frac{1}{4n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{1}{4\varepsilon}$,

所以 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{1}{4\varepsilon}\right]$, 则当 $n>N$ 时, 就有 $\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$.

注 本题中所采用的证明方法是:先将$|x_n-a|$等价变形,然后适当放大,使 N 容易由放大后的量小于ε 的不等式中求出.这在按定义证明极限的问题中

是经常采用的.

(3) 因为 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\dfrac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\dfrac{a^2}{2n^2}$,

要使 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$,只要 $\dfrac{a^2}{2n^2}<\varepsilon$,即 $n>\dfrac{|a|}{\sqrt{2\varepsilon}}$. 所以 $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\dfrac{|a|}{\sqrt{2\varepsilon}}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

(4) 因为 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|=\dfrac{1}{10^n}$,要使 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|<\varepsilon$,只要 $\dfrac{1}{10^n}<\varepsilon$,即 $n>\lg\dfrac{1}{\varepsilon}$,

所以 $\forall\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$),取 $N=\left[\lg\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$. 并举例说明:如果数列 $\{|x_n|\}$ 有极限,但数列 $\{x_n\}$ 未必有极限.

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$,所以 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$,当 $n>N$ 时,有 $|u_n-a|<\varepsilon$,从而有

$$||u_n|-|a||\leqslant|u_n-a|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.

但由 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$,并不能推得 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$. 例如,考虑数列 $\{(-1)^n\}$,虽然 $\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n|=1$,但 $\{(-1)^n\}$ 没有极限.

5. 设数列 $\{x_n\}$ 有界,又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证 因数列 $\{x_n\}$ 有界,故 $\exists M>0$,使得对一切 n 有 $|x_n|\leqslant M$. $\forall\varepsilon>0$,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,故对 $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{M}>0$, $\exists N$,当 $n>N$ 时,就有 $|y_n|<\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{M}$,从而有

$$|x_ny_n-0|=|x_n|\cdot|y_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

6. 对于数列 $\{x_n\}$,若 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$, $x_{2k}\to a(k\to\infty)$,证明: $x_n\to a(n\to\infty)$.

证 因为 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$,所以 $\forall\varepsilon>0$, $\exists k_1$,当 $k>k_1$ 时,有 $|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$;

又因为 $x_{2k}\to a(k\to\infty)$,所以对上述 $\varepsilon>0$, $\exists k_2$,当 $k>k_2$ 时,有 $|x_{2k}-a|<\varepsilon$.

记 $K=\max\{k_1,k_2\}$,取 $N=2K$,则当 $n>N$ 时,

若 $n=2k-1$,则 $k>K+\frac{1}{2}>k_1$,$\Rightarrow|x_n-a|=|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$,

若 $n=2k$,则 $k>K\geqslant k_2$,$\Rightarrow|x_n-a|=|x_{2k}-a|<\varepsilon$.从而只要 $n>N$,就有 $|x_n-a|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

习 题 1-3

1. 根据函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to3}(3x-1)=8$;　　(2) $\lim\limits_{x\to2}(5x+2)=12$;

(3) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$;　　(4) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

解 (1) 因为 $|(3x-1)-8|=|3x-9|=3|x-3|$,要使 $|(3x-1)-8|<\varepsilon$,只要 $|x-3|<\frac{\varepsilon}{3}$,

所以 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$,则当 $0<|x-3|<\delta$ 时,就有 $|(3x-1)-8|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{x\to3}(3x-1)=8$.

(2) 因为 $|(5x+2)-12|=|5x-10|=5|x-2|$,要使 $|(5x+2)-12|<\varepsilon$,只要 $|x-2|<\frac{\varepsilon}{5}$,

所以 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$,则当 $0<|x-2|<\delta$ 时,就有 $|(5x+2)-12|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{x\to2}(5x+2)=12$.

(3) 因为 $x\to-2$,$x\neq-2$,$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|=|x-2-(-4)|=|x+2|=|x-(-2)|$,要使

$$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon,$$

只要 $|x-(-2)|<\varepsilon$.所以 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<|x-(-2)|<\delta$ 时,就有

$$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$.

(4) 因为 $x\to-\frac{1}{2}$,$x\neq-\frac{1}{2}$,$\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=|1-2x-2|=2\left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|$,要使

$$\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon,$$

只要$\left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$,所以$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$,则当$0<\left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|<\delta$时,就有

$$\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

2. 根据函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

证 (1) 因为$\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2|x|^3}$,要使$\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$,只要$\frac{1}{2|x|^3}<\varepsilon$,即$|x|>\frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$,

所以$\forall\varepsilon>0$,取$X=\frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$,则当$|x|>X$时,就有$\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$.

(2) 因为$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}$,要使$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$,只要$\frac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$,即$x>\frac{1}{\varepsilon^2}$,

所以$\forall\varepsilon>0$,取$X=\frac{1}{\varepsilon^2}$,则当$x>X$时,就有$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

3. 当$x\to2$时,$y=x^2\to4$.问δ等于多少,使当$|x-2|<\delta$时,$|y-4|<0.001$?

解 由于$x\to2$,$|x-2|\to0$,不妨设$|x-2|<1$,即$1<x<3$.

要使$|x^2-4|=|x+2||x-2|<5|x-2|<0.001$,只要$|x-2|<\frac{0.001}{5}=0.000\,2$,取$\delta=0.000\,2$,则当$0<|x-2|<\delta$时,就有$|x^2-4|<0.001$.

注 本题证明中,先限定$|x-2|<1$,其目的是在$|x^2-4|=|x+2||x-2|$中,将$|x+2|$放大为5,从而去掉因子$|x+2|$,再令$5|x-2|<\varepsilon$,由此可以求出$|x-2|<\frac{\varepsilon}{5}$,从而找到$\delta$.这在按定义证明极限时,也是经常采用的一种方法.

4. 当$x\to\infty$时,$y=\frac{x^2-1}{x^2+3}\to1$.问$X$等于多少,使当$|x|>X$时,$|y-1|<$

0.01?

解 因为 $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|=\dfrac{4}{x^2+3}<\dfrac{4}{x^2}$，要使 $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|<0.01$，只要 $\dfrac{4}{x^2}<0.01$，即 $|x|>20$，取 $X=20$，则当 $|x|>X$ 时，就有 $|y-1|<0.01$.

5. 证明函数 $f(x)=|x|$ 当 $x\to 0$ 时极限为零.

证 因为 $||x|-0|=|x|=|x-0|$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-0|<\delta$ 时，就有 $||x|-0|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$.

6. 求 $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的左、右极限，并说明它们在 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}1=1$. 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$ 不存在.

7. 证明：若 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限都存在且都等于 A，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

证 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X_1>0$，当 $x>X_1$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

又因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，所以对上面的 $\varepsilon>0$，$\exists X_2>0$，当 $x<-X_2$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

取 $X=\max\{X_1,X_2\}$，则当 $|x|>X$ 时，有 $x>X$ 或 $x<-X$，因而有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

8. 根据极限定义证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

证 必要性 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

特别，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$；当 $0<x_0-x<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

充分性 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $0<x-x_0<\delta_1$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；又 $\exists\delta_2>0$，当 $0<x_0-x<\delta_2$ 时，就有

$|f(x)-A|<\varepsilon$. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

9. 试给出 $x\to\infty$时函数极限的局部有界性的定理,并加以证明.

解 局部有界性定理 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$,那么存在常数 $M>0$ 和 $X>0$,使得当 $|x|>X$ 时,有 $|f(x)|\leqslant M$.

证明如下:因为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$,所以对 $\varepsilon=1>0$, $\exists X>0$,当 $|x|>X$ 时,就有 $|f(x)-A|<1$,从而

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|,$$

取 $M=|A|+1$,即有 $|f(x)|\leqslant M$.

习 题 1-4

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小?举例说明之.

解 不一定. 例如,$\alpha(x)=2x$ 与 $\beta(x)=3x$ 都是当 $x\to 0$ 时的无穷小,但 $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\dfrac{2}{3}$却不是当 $x\to 0$ 时的无穷小.

2. 根据定义证明:

(1) $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$为当 $x\to 3$ 时的无穷小;

(2) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$为当$x\to 0$时的无穷小.

证 (1) 因为$\left|\dfrac{x^2-9}{x+3}\right|=|x-3|$,所以$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<|x-3|<\delta$ 时,就有

$$\left|\frac{x^2-9}{x+3}\right|<\varepsilon,$$

即$\dfrac{x^2-9}{x+3}$为当 $x\to 3$ 时的无穷小.

(2) 因为$\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x|$,所以$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<|x|<\delta$ 时,就有

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon,$$

即 $x\sin\dfrac{1}{x}$为当$x\to 0$时的无穷小.

3. 根据定义证明:函数 $y=\dfrac{1+2x}{x}$为当$x\to 0$ 时的无穷大. 问 x 应满足什么条件,能使$|y|>10^4$?

证 因为 $\left|\frac{1+2x}{x}\right|=\left|\frac{1}{x}+2\right|\geqslant\left|\frac{1}{x}\right|-2$，要使 $\left|\frac{1+2x}{x}\right|>M$，只要 $\left|\frac{1}{x}\right|-2>M$，即 $|x|<\frac{1}{M+2}$，

所以 $\forall M>0$，取 $\delta=\frac{1}{M+2}$，则当 $0<|x-0|<\delta$ 时，就有 $\left|\frac{1+2x}{x}\right|>M$，即 $\frac{1+2x}{x}$ 为当 $x\to0$ 时的无穷大.

令 $M=10^4$，取 $\delta=\frac{1}{10^4+2}$，当 $0<|x-0|<\frac{1}{10^4+2}$ 时，就能使 $\left|\frac{1+2x}{x}\right|>10^4$.

注 在本题的证明中，采取先将 $|f(x)|=\left|\frac{1+2x}{x}\right|$ 等价变形，然后适当缩小，使缩小后的量大于 M，从而求出 δ. 这种方法在按定义证明函数在某个变化过程中为无穷大时，也是经常采用的.

4. 求下列极限并说明理由：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}$；　　　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-x^2}{1-x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2$.

理由：由定理 2，$\frac{1}{x}$ 为当 $x\to\infty$ 时的无穷小；再由定理 1，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-x^2}{1-x}=\lim\limits_{x\to0}(1+x)=1$.

理由：由定理 1，$\lim\limits_{x\to0}(1+x)=1$.

5. 根据函数极限或无穷大定义，填写下表：

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，即有 $\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，即有 $f(x)<-M$.
$x\to x_0^+$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，即有 $\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，即有 $f(x)<-M$.
$x\to x_0^-$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0>x-x_0>-\delta$ 时，即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0>x-x_0>-\delta$ 时，即有 $\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0>x-x_0>-\delta$ 时，即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0>x-x_0>-\delta$ 时，即有 $f(x)<-M$.

续表

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,使当$\lvert x\rvert>X$时,即有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists X>0$,使当$\lvert x\rvert>X$时,即有$\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists X>0$,使当$\lvert x\rvert>X$时,即有$f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0$,使当$\lvert x\rvert>X$时,即有$f(x)<-M$.
$x\to+\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,使当$x>X$时,即有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists X>0$,使当$x>X$时,即有$\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0,\exists X>0$,使当$x>X$时,即有$f(x)>M$.	$\forall M>0,\exists X>0$,使当$x>X$时,即有$f(x)<-M$.
$x\to-\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,使当$x<-X$时,即有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists X>0$,使当$x<-X$时,即有$\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0,\exists X>0$,使当$x<-X$时,即有$f(x)>M$.	$\forall M>0,\exists X>0$,使当$x<-X$时,即有$f(x)<-M$.

6. 函数 $y=x\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是否有界?这个函数是否为 $x\to+\infty$ 时的无穷大?为什么?

解 因为$\forall M>0$,总有 $x_0\in(M,+\infty)$,使 $\cos x_0=1$,从而 $y=x_0\cos x_0=x_0>M$,所以 $y=x\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内无界.

又因为$\forall M>0,X>0$,总有 $x_0\in(X,+\infty)$,使 $\cos x_0=0$,从而$y=x_0\cos x_0=0<M$,所以 $y=x\cos x$ 不是当$x\to+\infty$时的无穷大.

7. 证明:函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在区间$(0,1]$上无界,但这函数不是 $x\to0^+$ 时的无穷大.

证 先证函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在区间$(0,1]$上无界.

因为$\forall M>0$,在$(0,1]$中总可找到点 x_0,使 $y(x_0)>M$.例如,可取 $x_0=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}(k\in\mathbf{N})$,则 $y(x_0)=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,当 k 充分大时,可使 $y(x_0)>M$.所以

$y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在$(0,1]$上无界.

再证函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$不是$x\to0^+$时的无穷大.

因为$\forall M>0,\delta>0$,总可找到点 x_0,使 $0<x_0<\delta$,但 $y(x_0)<M$.例如,可取 $x_0=\frac{1}{2k\pi}(k\in\mathbf{N}^+)$,当 k 充分大时,$0<x_0<\delta$,但 $y(x_0)=2k\pi\sin 2k\pi=0<M$.

所以 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不是 $x\to0^+$ 时的无穷大.

习 题 1－5

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+5}{x-3}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^2+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$；

(5) $\lim\limits_{h\to0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}$；

(9) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$；　　(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x^2}\right)$；

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$；　　(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$；

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$；　　(14) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+5}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to2}(x^2+5)}{\lim\limits_{x\to2}(x-3)}=\frac{9}{-1}=-9.$

(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^2+1}=\frac{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}(x^2-3)}{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}(x^2+1)}=\frac{0}{4}=0.$

(3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to1}(x+1)}=\frac{0}{2}=0.$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{4x^2-2x+1}{3x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to0}(4x^2-2x+1)}{\lim\limits_{x\to0}(3x+2)}=\frac{1}{2}.$

(5) $\lim\limits_{h\to0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}(2x+h)=2x.$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=2-0+0=2.$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{2}.$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}\right)}=\dfrac{0}{1}=0.$

(9) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)(x-2)}{(x-4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to4}(x-2)}{\lim\limits_{x\to4}(x-1)}=\dfrac{2}{3}.$

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)=1\cdot2=2.$

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$

$$=2\left(1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\right)=2.$$

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n-1)}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}.$

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{5}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(1+\dfrac{3}{n}\right)$

$$=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{5}.$$

(14) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=$
$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-(x+2)}{1+x+x^2}=-\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(x+2)}{\lim\limits_{x\to1}(1+x+x^2)}=-\dfrac{3}{3}=-1.$

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)$.

解　(1) 因为$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^2}{x^3+2x^2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to2}(x-2)^2}{\lim\limits_{x\to2}(x^3+2x^2)}=0$，

所以$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}=\infty$.

(2) 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=0$，

所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}=\infty$.

(3) 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x^3-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}=0$,

所以$\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)=\infty$.

3. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解 (1) 因为 $x^2\to0(x\to0)$, $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1$,

所以$\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

(2) 因为$\dfrac{1}{x}\to0(x\to\infty)$, $|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$,

所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=0$.

4. 证明本节定理 3 中的(2).

定理 3 (2) 如果 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$,那么

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B.$$

证 因$\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$,由上节定理 1,有

$f(x)=A+\alpha$, $g(x)=B+\beta$,其中 α、β 都是无穷小,于是

$$f(x)g(x)=(A+\alpha)(B+\beta)=AB+(A\beta+B\alpha+\alpha\beta),$$

由本节定理 2 推论 1、2,$A\beta$、$B\alpha$、$\alpha\beta$ 都是无穷小,再由本节定理 1,$(A\alpha+B\beta+\alpha\beta)$也是无穷小,由上节定理 1,得

$$\lim f(x)g(x)=AB=\lim f(x)\cdot\lim g(x).$$

习 题 1-6

1. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\omega x}{x}$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$; (4) $\lim\limits_{x\to0}x\cot x$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$; (6) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$($x$ 为不等于零的常数).

解 (1) 当 $\omega\neq0$ 时,

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\omega x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\omega\cdot\frac{\sin\omega x}{\omega x}\right)=\omega\lim_{x\to0}\frac{\sin\omega x}{\omega x}=\omega;$$

当 $\omega=0$ 时，

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin \omega x}{x}=0=\omega,$$

故不论 ω 为何值，均有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin \omega x}{x}=\omega$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 3x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(3\cdot\frac{\tan 3x}{3x}\right)=3\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 3x}{3x}=3$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{5}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{5x}{\sin 5x}=\frac{2}{5}$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}x\cot x=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$.

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=2$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\cdot x\right)=x$.

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{kx}$（$k$ 为正整数）.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}[1+(-x)]^{\frac{1}{(-x)}(-1)}=e^{-1}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2=e^2$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^2=e^2$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{kx}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{(-x)}\right]^{(-x)(-k)}=e^{-k}$.

3. 根据函数极限的定义，证明极限存在的准则 Ⅰ′.

解 准则 Ⅰ′如果(1) $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，$x\in\mathring{U}(x_0,r)$，

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，

那么 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，且等于 A.

证 $\forall\varepsilon>0$，因 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，故 $\exists\delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，有 $|g(x)-A|<\varepsilon$，即

$$A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon, \tag{3}$$

又因 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，故对上面的 $\varepsilon>0$，$\exists\delta_2>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，有

$|h(x)-A|<\varepsilon$,即

$$A-\varepsilon<h(x)<A+\varepsilon. \tag{4}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,r\}$,则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,假设(1)及关系式(3)、(4)同时成立,从而有

$$A-\varepsilon<g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)<A+\varepsilon,$$

即有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,且等于 A.

注 对于 $x\to\infty$ 的情形,利用极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的定义及假设条件,可以类似地证明相应的准则 Ⅰ′.

4. 利用极限存在准则证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=1$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$;

(3) 数列 $\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$ 的极限存在;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[n]{1+x}=1$;

(5) $\lim\limits_{x\to0^+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

证 (1) 因 $1<\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}<1+\dfrac{1}{n}$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}1=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$,由夹逼准则,即得证.

(2) 因 $\dfrac{n}{n+\pi}\leqslant n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)\leqslant\dfrac{n^2}{n^2+\pi}$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\pi}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+\pi}=1$,由夹逼准则,即得证.

(3) $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\,(n\in\mathbf{N}^+)$, $x_1=\sqrt{2}$.

先证数列 $\{x_n\}$ 有界:

$n=1$ 时, $x_1=\sqrt{2}<2$;假定 $n=k$ 时, $x_k<2$.

当 $n=k+1$ 时, $x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$,故 $x_n<2\,(n\in\mathbf{N}^+)$.

再证数列 $\{x_n\}$ 单调增加:

因 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-x_n=\dfrac{2+x_n-x_n^2}{\sqrt{2+x_n}+x_n}=-\dfrac{(x_n-2)(x_n+1)}{\sqrt{2+x_n}+x_n}$,

由 $0<x_n<2$,得 $x_{n+1}-x_n>0$,即 $x_{n+1}>x_n\,(n\in\mathbf{N}^+)$.

由单调有界准则,即知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 由 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$,得

$x_{n+1}^2=2+x_n$.

上式两端同时取极限：$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}^2=\lim\limits_{n\to\infty}(2+x_n)$,

得 $\qquad a^2=2+a \quad\Rightarrow\quad a^2-a-2=0\Rightarrow a_1=2,a_2=-1$(舍去).

即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

注　本题的求解过程分成两步，第一步是证明数列$\{x_n\}$单调有界，从而保证数列的极限存在；第二步是在递推公式两端同时取极限，得出一个含有极限值 a 的方程，再通过解方程求得极限值 a. **注意：只有在证明数列极限存在的前提下，才能采用第二步的方法求得极限值.否则，直接利用第二步，有时会导出错误的结果.**

(4) 当 $x>0$ 时，$1<\sqrt[n]{1+x}<1+x$;

当 $-1<x<0$ 时，$1+x<\sqrt[n]{1+x}<1$.

而 $\lim\limits_{x\to0}1=1,\lim\limits_{x\to0}(1+x)=1$.由夹逼准则，即得证.

(5) 当 $x>0$ 时，$1-x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant1$.而 $\lim\limits_{x\to0^+}(1-x)=1$, $\lim\limits_{x\to0^+}1=1$.由夹逼准则，即得证.

习　题　1－7

1．当 $x\to0$ 时，$2x-x^2$ 与 x^2-x^3 相比，哪一个是高阶无穷小？

解　因为 $\lim\limits_{x\to0}(2x-x^2)=0,\lim\limits_{x\to0}(x^2-x^3)=0$,

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-x^3}{2x-x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-x^2}{2-x}=0,$$

所以当 $x\to0$ 时，x^2-x^3 是比 $2x-x^2$ 高阶的无穷小.

2．当 $x\to1$ 时，无穷小 $1-x$ 和(1)$1-x^3$,(2)$\dfrac{1}{2}(1-x^2)$是否同阶？是否等价？

解　(1) $\dfrac{1-x}{1-x^3}=\dfrac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)}=\dfrac{1}{1+x+x^2}\to\dfrac{1}{3}(x\to1)$，同阶，不等价.

(2) $\dfrac{1-x}{\dfrac{1}{2}(1-x^2)}=\dfrac{1-x}{\dfrac{1}{2}(1-x)(1+x)}=\dfrac{2}{1+x}\to1(x\to1)$，同阶，等价.

3．证明：当 $x\to0$ 时，有：

(1) $\arctan x\sim x$; $\qquad$ (2) $\sec x-1\sim\dfrac{x^2}{2}$.

证 (1) 令 $x=\tan t$,即 $t=\arctan x$,当 $x\to 0$ 时,$t\to 0$,

因为
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t}=1,$$
所以
$$\arctan x\sim x\quad (x\to 0).$$

(2) 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec x-1}{\dfrac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{x^2}{2}}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x^2}{2}}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$,所以 $\sec x-1\sim\dfrac{x^2}{2}(x\to 0)$.

4. 利用等价无穷小的性质,求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{2x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$($n$、$m$ 为正整数);

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{x^m}=\begin{cases}0, n>m,\\ 1, n=m,\\ \infty, n<m.\end{cases}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec x-1}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

注 在作等价无穷小的代换求极限时,可以对分子或分母中的一个或若干个因子作代换,但不能对分子或分母中的某个加项作代换.例如,本题中若将分子中的 $\tan x$、$\sin x$ 均换成 x,那么分子成为0,得出极限为0,这就导致错误的结果.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\sec x)}{\dfrac{1}{3}x^2\cdot\dfrac{1}{2}\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{2}x^2}{\dfrac{1}{6}x^2}=-3$$

5. 证明无穷小的等价关系具有下列性质:

(1) $\alpha\sim\alpha$(自反性);

(2) 若 $\alpha\sim\beta$,则 $\beta\sim\alpha$(对称性);

(3) 若 $\alpha\sim\beta$,$\beta\sim\gamma$,则 $\alpha\sim\gamma$(传递性).

证 (1) 因为 $\lim \frac{\alpha}{\alpha}=1$,所以 $\alpha\sim\alpha$;

(2) 因为 $\alpha\sim\beta$,即 $\lim \frac{\alpha}{\beta}=1$,所以 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=1$,即 $\beta\sim\alpha$;

(3) 因为 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$,即 $\lim \frac{\alpha}{\beta}=1,\lim \frac{\beta}{\gamma}=1$,

所以 $\lim \frac{\alpha}{\gamma}=\lim \left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\right)=\lim \frac{\alpha}{\beta}\cdot\lim \frac{\beta}{\gamma}=1$,即 $\alpha\sim\gamma$.

习 题 1－8

1. 研究下列函数的连续性,并画出函数的图形:

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x<-1 \text{ 或 } x>1.\end{cases}$

解 (1) $f(x)$在$[0,1)$及$(1,2]$内连续,在 $x=1$ 处,

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-} x^2=1,\ \lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}(2-x)=1,\text{又 } f(1)=1,$$

故 $f(x)$在 $x=1$ 处连续,因此 $f(x)$在$[0,2]$上连续,函数的图形如图 1－5 所示.

(2) $f(x)$在$(-\infty,-1)$与$(-1,+\infty)$内连续,在 $x=-1$ 处间断,但右连续,因为在 $x=-1$ 处

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+} x=-1,f(-1)=-1,$$

但
$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-} 1=1,$$

即
$$\lim_{x\to-1^+} f(x)\neq\lim_{x\to-1^-} f(x).$$

函数的图形如图 1－6 所示.

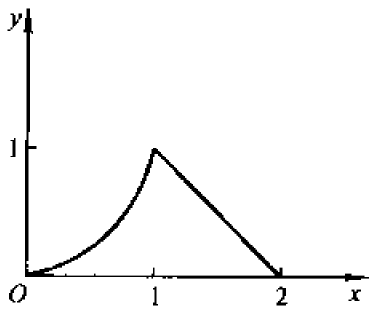


图 1－5

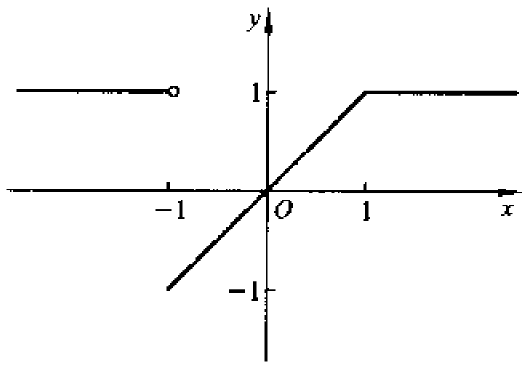


图 1－6

2. 下列函数在指出的点处间断,说明这些间断点属于哪一类.如果是可去

间断点，则补充或改变函数的定义使它连续：

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$，$x=1$，$x=2$；

(2) $y=\dfrac{x}{\tan x}$，$x=k\pi$，$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

(3) $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$，$x=0$；

(4) $y=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 1,\\ 3-x, & x>1,\end{cases}$ $x=1$.

解 (1) 对 $x=1$，因为 $f(1)$ 无定义，但

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x-2}=-2,$$

所以，$x=1$ 为第一类间断点（可去间断点），重新定义函数：

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}, & x\neq1,2,\\ -2, & x=1,\end{cases}$$

则 $f_1(x)$ 在 $x=1$ 处连续．因为$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\infty$，所以 $x=2$ 为第二类间断点（无穷间断点）．

(2) 对 $x=0$，因为 $f(0)$ 无定义，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}=1$，所以 $x=0$ 为第一类间断点（可去间断点），重新定义函数：

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\tan x}, & x\neq k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{2},(k\in\mathbf{Z})\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

则 $f_1(x)$ 在 $x=0$ 处连续．

对 $x=k\pi\quad(k=\pm1,\pm2,\cdots)$，因为$\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x}{\tan x}=\infty$，

所以 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为第二类间断点（无穷间断点）．

对 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，因为 $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\tan x}=0$，而函数在 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 处无定义，所以 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 为第一类间断点（可去间断点），重新定义函数：

$$f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\tan x}, & x\neq k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & x=k\pi+\dfrac{\pi}{2},\end{cases}\quad(k\in\mathbf{Z})$$

则 $f_2(x)$ 在 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 处连续．

(3) 对 $x=0$,因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\cos^2\frac{1}{x}$ 及 $\lim\limits_{x\to0^-}\cos^2\frac{1}{x}$ 均不存在,所以 $x=0$ 为第二类间断点.

(4) 对 $x=1$,因为 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(3-x)=2$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$,即左、右极限不相等,所以 $x=1$ 为第一类间断点(跳跃间断点).

注 在讨论分段函数的连续性时,在函数的分段点处,必须分别考虑函数的左连续性和右连续性,只有函数在该点既左连续,又右连续,才能得出函数在该点连续.

3. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性,若有间断点,判别其类型.

解

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases}-x, & 当|x|>1,\\ 0, & 当|x|=1,\\ x, & 当|x|<1.\end{cases}$$

在分段点 $x=-1$ 处,因为

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}(-x)=1,$$
$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}x=-1,$$
$$\lim_{x\to-1^-}f(x)\neq\lim_{x\to-1^+}f(x),$$

所以 $x=-1$ 为第一类间断点(跳跃间断点).

在分段点 $x=1$ 处,因为

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}x=1,$$
$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(-x)=-1,$$
$$\lim_{x\to1^-}f(x)\neq\lim_{x\to1^+}f(x),$$

所以 $x=1$ 为第一类间断点(跳跃间断点).

4. 证明:若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续且 $f(x_0)\neq0$,则存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$,当 $x\in U(x_0)$ 时,$f(x)\neq0$.

证 若 $f(x_0)>0$,因为 $f(x)$ 在 x_0 连续,所以取 $\varepsilon=\frac{1}{2}f(x_0)>0$, $\exists\,\delta>0$,当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时,有 $|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{2}f(x_0)$,即

$$0<\frac{1}{2}f(x_0)<f(x)<\frac{3}{2}f(x_0);$$

若 $f(x_0)<0$,因为 $f(x)$ 在 x_0 连续,所以取 $\varepsilon=-\frac{1}{2}f(x_0)>0$, $\exists\,\delta>0$,当

$x\in U(x_0,\delta)$时,有$|f(x)-f(x_0)|<-\dfrac{1}{2}f(x_0)$,即

$$\frac{3}{2}f(x_0)<f(x)<\frac{1}{2}f(x_0)<0.$$

因此,不论 $f(x_0)>0$ 或 $f(x_0)<0$,总存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$,当 $x\in U(x_0)$时,$f(x)\neq 0$.

5. 试分别举出具有以下性质的函数 $f(x)$的例子:

(1) $x=0,\pm 1,\pm 2,\pm\dfrac{1}{2},\cdots,\pm n,\pm\dfrac{1}{n},\cdots$是 $f(x)$的所有间断点,且它们都是无穷间断点;

(2) $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上处处不连续,但$|f(x)|$在 $\mathbf{R}$ 上处处连续;

(3) $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上处处有定义,但仅在一点连续.

解 (1) 设 $f(x)=\cot(\pi x)+\cot\dfrac{\pi}{x}$,显然 $f(x)$具有所要求的性质.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}1, x\in Q,\\ -1, x\in Q^C,\end{cases}$

则 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上处处不连续,证明如下:

$\forall x_0\in\mathbf{R}$,分别取一有理数列$\{r_n\}$:$r_n\to x_0(n\to\infty)$,$r_n\neq x_0$;取一无理数列$\{s_n\}$:$s_n\to x_0(n\to\infty)$,$s_n\neq x_0$,则

$$\lim_{n\to\infty}f(r_n)=1,\lim_{n\to\infty}f(s_n)=-1.$$

由函数极限与数列极限的关系知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$必不存在,故 $f(x)$在 x_0 不连续,由 x_0 的任意性知 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上处处不连续.

但$|f(x)|\equiv 1$,$x\in\mathbf{R}$,故$|f(x)|$在 $\mathbf{R}$ 上处处连续.

(3) 设

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in Q,\\ -x, & x\in Q^C,\end{cases}$$

则 $f(x)$满足题中的要求.

首先,$f(x)$在 $x=0$ 处连续,这是因为 $f(0)=0$,$|f(x)-f(0)|=|x|\to 0$(当 $x\to 0$),即$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$.

其次,我们证明:$\forall x_0\neq 0$,$f(x)$在 x_0 不连续.

若 $x_0=r\neq 0$,$r\in Q$,则 $f(x_0)=f(r)=r$.

分别取一有理数列$\{r_n\}$:$r_n\to r(n\to\infty)$,$r_n\neq r$;取一无理数列$\{s_n\}$:$s_n\to r(n\to\infty)$,则

$$\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}r_n=r,\lim_{n\to\infty}f(s_n)=\lim_{n\to\infty}(-s_n)=-r,$$

而 $r\neq -r$，由函数极限与数列极限的关系知$\lim\limits_{x\to r}f(x)$不存在，故 $f(x)$在 r 处不连续.

若 $x_0=s,s\in Q^C$. 同理可证：$f(x_0)=f(s)=-s$，但$\lim\limits_{x\to s}f(x)$不存在，故 $f(x)$在 s 处不连续.

习 题 1－9

1．求函数 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间，并求极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to -3}f(x)$及$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

解 $f(x)$在 $x_1=-3,x_2=2$ 处无意义，所以这两个点为间断点，此外函数到处连续，连续区间为$(-\infty,-3),(-3,2),(2,+\infty)$.

因为 $$f(x)=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\frac{(x^2-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)}=\frac{x^2-1}{x-2},$$

所以 $$\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{2},\lim_{x\to -3}f(x)=-\frac{8}{5},\lim_{x\to 2}f(x)=\infty.$$

2．设函数 $f(x)$与 $g(x)$在点 x_0 连续，证明函数

$$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\},\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

在点 x_0 也连续.

证 $$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|],$$

$$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|].$$

又，若 $f(x)$在点 x_0 连续，则$|f(x)|$在点 x_0 也连续；连续函数的和、差仍连续，故 $\varphi(x)$、$\psi(x)$在点 x_0 也连续.

3．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$；　　(2) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3$；

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x+5)}=\sqrt{5}$.

(2) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3=(\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}\sin 2\alpha)^3=\left(\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^3=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)=\ln(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}2\cos 2x)=\ln\left(2\cos\dfrac{\pi}{3}\right)=\ln 1=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\dfrac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{x}}=2$;

(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\sin\dfrac{x-a}{2}\cos\dfrac{x+a}{2}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to a}\cos\dfrac{x+a}{2}=\cos a$.

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}=1$.

注 本题及下一题求极限中,采用了以下几种常用的方法:

(1) 利用极限运算法则;

(2) 利用复合函数的连续性,将函数符号与极限号交换次序;

(3) 利用一些初等方法:因式分解,分子或分母有理化,分子分母同乘或除以一个因子,消去分母中趋于零的因子等;

(4) 利用重要极限以及它们的变形;

(5) 利用等价无穷小替代.

4. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\right)=\ln 1=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+3\tan^2 x)^{\frac{1}{3}\cot^2 x}\right]^3=e^3$.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{3}{6+x}\right)^{-\frac{6+x}{3}}\right]^{-\frac{3}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{6+x}\right)^{-\frac{7}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sec x-1}{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}\sin^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

5. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0, \\ a+x, & x\geqslant 0. \end{cases}$$

应当怎样选择数 a，使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数.

解 由初等函数的连续性，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 内连续，所以要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，只要 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续即可.

在 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^x=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(a+x)=a$，$f(0)=a$，取 $a=1$，即有

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0),$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 于是，选择 $a=1$，$f(x)$ 就成为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数.

习 题 1－10

1. 证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

证 设 $f(x)=x^5-3x-1$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[1,2]$ 上连续，且 $f(1)=-3<0$，$f(2)=25>0$. 由零点定理，即知 $\exists\,\xi\in(1,2)$，使 $f(\xi)=0$，ξ 即为方程的根.

2. 证明方程 $x=a\sin x+b$，其中 $a>0$，$b>0$，至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

证 设 $f(x)=x-a\sin x-b$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[0,a+b]$ 上连续，且 $f(0)=-b<0$，$f(a+b)=a[1-\sin(a+b)]$，当 $\sin(a+b)<1$ 时，$f(a+b)>0$. 由

零点定理，即知 $\exists\,\xi\in(0,a+b)$，使 $f(\xi)=0$，即 ξ 为原方程的根，它是正根且不超过 $a+b$；当 $\sin(a+b)=1$ 时，$f(a+b)=0$，$a+b$ 就是满足条件的正根.

3．设函数 $f(x)$ 对于闭区间 $[a,b]$ 上的任意两点 x、y，恒有 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$，其中 L 为正常数，且 $f(a)\cdot f(b)<0$. 证明：至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

证 任取 $x_0\in(a,b)$，$\forall\,\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{L},x_0-a,b-x_0\right\}$，则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，由假设

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant L|x-x_0|<L\delta\leqslant\varepsilon,$$

所以 $f(x)$ 在 x_0 连续. 由 $x_0\in(a,b)$ 的任意性知，$f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

当 $x_0=a$ 或 $x_0=b$ 时，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}$，并将 $|x-x_0|<\delta$ 换成 $x\in[a,a+\delta)$ 或 $x\in(b-\delta,b]$，便可知 $f(x)$ 在 $x=a$ 右连续，在 $x=b$ 左连续. 从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

又由假设 $f(a)\cdot f(b)<0$，由零点定理即知 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

4．若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则在 (x_1,x_n) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

证 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，又 $[x_1,x_n]\subset[a,b]$，所以 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上连续. 设

$$M=\max\{f(x)\mid x_1\leqslant x\leqslant x_n\},\ m=\min\{f(x)\mid x_1\leqslant x\leqslant x_n\},$$

则

$$m\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant M.$$

若上述不等式中为严格不等号，则由介值定理知，$\exists\,\xi\in(x_1,x_n)$，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n};$$

若上述不等式中出现等号，如

$$m=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n},$$

则有 $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)=m$，任取 $x_2,x_3,\cdots,x_{n-1}$ 中一点作为 ξ，即有 $\xi\in(x_1,x_n)$，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

如

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}=M,$$

同理可证.

5. 证明:若 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在,则 $f(x)$必在$(-\infty,+\infty)$内有界.

证 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,则对 $\varepsilon=1>0$, $\exists X>0$,当$|x|>X$时,有

$$|f(x)-A|<1\Rightarrow|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<|A|+1.$$

又,$f(x)$在$[-X,X]$上连续,利用有界性定理,得:$\exists M>0$,对$\forall x\in[-X,X]$,有$|f(x)|\leqslant M$.

取 $M'=\max\{M,|A|+1\}$,即有$|f(x)|\leqslant M'$, $\forall x\in(-\infty,+\infty)$.

*6. 在什么条件下,(a,b)内的连续函数 $f(x)$为一致连续?

解 若 $f(a^+)$、$f(b^-)$均存在,设

$$F(x)=\begin{cases}f(a^+), & x=a,\\ f(x), & x\in(a,b),\\ f(b^-), & x=b.\end{cases}$$

易证 $F(x)$在$[a,b]$上连续,从而 $F(x)$在$[a,b]$上一致连续,也就有 $F(x)$在(a,b)内一致连续,即 $f(x)$在(a,b)内一致连续.

总习题一

1. 在"充分"、"必要"和"充分必要"三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1) 数列$\{x_n\}$有界是数列$\{x_n\}$收敛的______条件. 数列$\{x_n\}$收敛是数列$\{x_n\}$有界的______条件.

(2) $f(x)$在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的______条件. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在是 $f(x)$在 x_0 的某一去心邻域内有界的______条件.

(3) $f(x)$在 x_0 的某一去心邻域内无界是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$的______条件. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$是 $f(x)$在 x_0 的某一去心邻域内无界的______条件.

(4) $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的右极限 $f(x_0^+)$及左极限 $f(x_0^-)$都存在且相等是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的______条件.

解 (1) 必要、充分.

(2) 必要、充分.

(3) 必要、充分.

(4) 充分必要.

2. 选择以下题中给出的四个结论中一个正确的结论：

设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时，有（　　）.

(A) $f(x)$与 x 是等价无穷小.　　(B) $f(x)$与 x 同阶但非等价无穷小.

(C) $f(x)$是比 x 高阶的无穷小.　(D) $f(x)$是比 x 低阶的无穷小.

解　应选(B)，理由如下：

因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}=\ln 2+\ln 3=\ln 6\neq 1,$$

所以当 $x\to 0$ 时，$f(x)$与 x 同阶但非等价无穷小.

3. 设 $f(x)$的定义域是$[0,1]$，求下列函数的定义域：

(1) $f(e^x)$；　　　(2) $f(\ln x)$；

(3) $f(\arctan x)$；　　(4) $f(\cos x)$.

解　(1) 因为 $0\leqslant e^x\leqslant 1$，所以 $x\leqslant 0$，即函数 $f(e^x)$的定义域为$(-\infty,0]$.

(2) 因为 $0\leqslant \ln x\leqslant 1$，所以 $1\leqslant x\leqslant e$，即函数 $f(\ln x)$的定义域为$[1,e]$.

(3) 因为 $0\leqslant \arctan x\leqslant 1$，所以 $0\leqslant x\leqslant \tan 1$，即函数 $f(\arctan x)$的定义域为$[0,\tan 1]$.

(4) 因为 $0\leqslant \cos x\leqslant 1$，所以 $2n\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2n\pi+\frac{\pi}{2}$，$n\in\mathbf{Z}$，即函数 $f(\cos x)$的定义域为$\left[2n\pi-\frac{\pi}{2},2n\pi+\frac{\pi}{2}\right]$，$n\in\mathbf{Z}$.

4. 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0,\end{cases}$$

求 $f[f(x)]$，$g[g(x)]$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解　因为 $f[f(x)]=\begin{cases}0, & f(x)\leqslant 0,\\ f(x), & f(x)>0,\end{cases}$ 而 $f(x)\geqslant 0$，$x\in\mathbf{R}$，

所以　$f[f(x)]=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$.

因为　$g[g(x)]=\begin{cases}0, & g(x)\leqslant 0,\\ -g^2(x), & g(x)>0,\end{cases}$ 而 $g(x)\leqslant 0$，$x\in\mathbf{R}$，

所以　$g[g(x)]=0$，$x\in\mathbf{R}$.

因为　$f[g(x)]=\begin{cases}0, & g(x)\leqslant 0,\\ g(x), & g(x)>0,\end{cases}$ 而 $g(x)\leqslant 0$，$x\in\mathbf{R}$，

所以　$f[g(x)]=0$，$x\in\mathbf{R}$.

因为　$g[f(x)]=\begin{cases}0, & f(x)\leqslant 0,\\ -f^2(x), & f(x)>0,\end{cases}$ 而 $f(x)\geqslant 0$，$x\in\mathbf{R}$，

所以 $g[f(x)]=g(x), x\in\mathbf{R}$.

5. 利用 $y=\sin x$ 的图形作出下列函数的图形：

(1) $y=|\sin x|$;

(2) $y=\sin|x|$;

(3) $y=2\sin\dfrac{x}{2}$.

解 略.

6. 把半径为 R 的一圆形铁皮，自中心处剪去中心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥. 试将这圆锥的体积表为 α 的函数.

解 设围成的圆锥底半径为 r，高为 h，则按题意(图 1－7)有

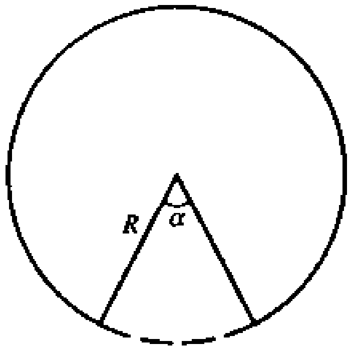


图 1－7

$$(2\pi-\alpha)R=2\pi r,$$

$$h=\sqrt{R^2-r^2}.$$

故
$$r=\frac{(2\pi-\alpha)R}{2\pi},$$

$$h=\sqrt{R^2-\frac{(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}R^2}=\frac{\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}{2\pi}R,$$

圆锥体积

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}R^2\cdot\frac{\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}{2\pi}R=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}\,(0<\alpha<2\pi).$$

7. 根据函数极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

证 因为 $\left|\dfrac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|=\left|\dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3}-5\right|=|x-3|$,

要使 $\left|\dfrac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|<\varepsilon$，只要 $|x-3|<\varepsilon$.

所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-3|<\delta$ 时，就有

$$\left|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|<\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

8. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}(a>0,b>0,c>0)$;

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x^2-x+1}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2}=\infty$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\frac{2x+1}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}.$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sec x-1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}.$

(5) 因为

$$\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right)},$$

而 $\left(1+\dfrac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}}\to\mathrm{e}(x\to 0)$,

$$\frac{a^x-1}{x}\to\ln a,\ \frac{b^x-1}{x}\to\ln b,\ \frac{c^x-1}{x}\to\ln c(x\to 0),$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)}=(abc)^{\frac{1}{3}}$.

(6) 因为 $(\sin x)^{\tan x}=[1+(\sin x-1)]^{\frac{1}{\sin x-1}\cdot(\sin x-1)\tan x}$,

而 $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[1+(\sin x-1)]^{\frac{1}{\sin x-1}}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\sin x$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin \frac{x - \frac{\pi}{2}}{2} \cos \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2}}{2\sin \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} \cos \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2}} \cdot \sin x$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \sin x = 0,$$

所以 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = e^0 = 1$.

9. 设

$$f(x) = \begin{cases} x\sin \dfrac{1}{x}, & x > 0, \\ a + x^2, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

要使 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续,应当怎样选择数 a?

解 $f(x)$在$(-\infty, 0)$及$(0, +\infty)$内均连续,要使 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续,只要在 $x = 0$ 处连续即可.而

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x\sin \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (a + x^2) = a,$$

又 $f(0) = a$,故应选择 $a = 0$,$f(x)$在 $x = 0$ 处连续,从而 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续.

10. 设

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x > 0, \\ \ln(1 + x), & -1 < x \leqslant 0, \end{cases}$$

求 $f(x)$的间断点,并说明间断点所属类型.

解 函数在 $x = 1$ 处无定义.

因为 $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$,

所以 $x = 1$ 为 $f(x)$的第二类间断点.

又 $x = 0$ 为函数的分段点.

因为 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \ln(1 + x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{-1}$,

所以 $x = 0$ 为 $f(x)$的第一类间断点(跳跃间断点).

11. 证明

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right) = 1.$$

证 因为 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < 1$,

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1,\ \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

所以由夹逼准则,即得证.

12. 证明方程 $\sin x + x + 1 = 0$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

证 设 $f(x) = \sin x + x + 1$,则 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续.

因为 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} + 1 = -\frac{\pi}{2} < 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 1 = \frac{\pi}{2} + 2 > 0$,

由介值定理,至少存在一点 $\xi \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,使 $f(\xi) = 0$,即 $\sin\xi + \xi + 1 = 0$,

所以方程 $\sin x + x + 1 = 0$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

13. 如果存在直线 $L: y = kx + b$,使得当 $x\to\infty$(或 $x\to+\infty$, $x\to-\infty$)时,曲线 $y = f(x)$ 上的动点 $M(x,y)$ 到直线 L 的距离 $d(M,L)\to 0$,则称 L 为曲线 $y = f(x)$ 的渐近线.当直线 L 的斜率 $k\neq 0$ 时,称 L 为斜渐近线.

(1) 证明:直线 $L: y = kx + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的渐近线的充分必要条件是
$$k = \lim_{\substack{x\to\infty \\ \left(\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}\right)}}\frac{f(x)}{x},\quad b = \lim_{\substack{x\to\infty \\ \left(\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}\right)}}[f(x) - kx].$$

(2) 求曲线 $y = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线.

解 (1) 就 $x\to+\infty$ 的情形证明,其他情形类似.

设 $L: y = kx + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的渐近线.

1°若 $k\neq 0$,如图 1-8 所示,$k = \tan\alpha$(α 为 L 的倾角,$\alpha\neq\frac{\pi}{2}$),曲线 $y = f(x)$ 上动点 $M(x,y)$ 到直线 L 的距离为 $|MK|$.过 M 作横轴的垂线,交直线 L 于 K_1,则
$$|MK_1| = \frac{|MK|}{\cos\alpha}.$$

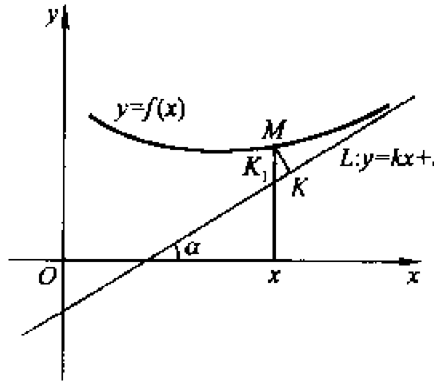


图 1-8

显然 $|MK|\to 0\ (x\to+\infty)$ 与 $|MK_1|\to 0\ (x\to+\infty)$ 等价,而
$$|MK_1| = |f(x) - (kx+b)|.$$

因为 $L: y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线，

所以 $|MK| \to 0(x \to +\infty) \Rightarrow |MK_1| \to 0(x \to +\infty)$，

即
$$\lim_{x \to +\infty}[f(x)-(kx+b)]=0, \tag{1}$$
从而
$$\lim_{x \to +\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x \to +\infty}[f(x)-(kx+b)]+b=0+b=b, \tag{2}$$
$$\lim_{x \to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x \to +\infty}\frac{1}{x}[f(x)-kx]+k=0+k=k. \tag{3}$$

反之，若(2)、(3)成立，则(1)成立，即 $L: y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

2°若 $k=0$，设 $L: y=b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线，如图 1－9 所示．按定义有 $|MK| \to 0$ $(x \to +\infty)$，而 $|MK|=|f(x)-b|$，故有
$$\lim_{x \to +\infty}f(x)=b. \tag{4}$$
$$\lim_{x \to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x \to +\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x \to +\infty}f(x)=0. \tag{5}$$

反之，若(4)、(5)成立，即有 $|MK|=|f(x)-b| \to 0(x \to +\infty)$，故 $y=b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

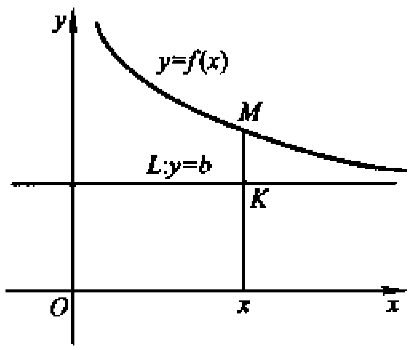


图 1－9

(2) 因为 $\quad k=\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{(2x-1)}{x}e^{\frac{1}{x}}=2$,

$b=\lim\limits_{x \to \infty}[f(x)-2x]=\lim\limits_{x \to \infty}[(2x-1)e^{\frac{1}{x}}-2x]=\lim\limits_{x \to \infty}2x(e^{\frac{1}{x}}-1)-\lim\limits_{x \to \infty}e^{\frac{1}{x}}=$

$\lim\limits_{x \to \infty}2\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-1=2\lim\limits_{u \to 0}\dfrac{e^u-1}{u}-1=2\ln e-1=1$,

所以，所求曲线的斜渐近线为 $y=2x+1$.

第二章 导数与微分

习题 2-1

1. 设物体绕定轴旋转，在时间间隔$[0,t]$内转过角度θ，从而转角θ是t的函数：$\theta=\theta(t)$．如果旋转是匀速的，那么称$\omega=\dfrac{\theta}{t}$为该物体旋转的角速度．如果旋转是非匀速的，应怎样确定该物体在时刻t_0的角速度？

解 在时间间隔$[t_0,t_0+\Delta t]$内的平均角速度

$$\bar{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\theta(t_0+\Delta t)-\theta(t_0)}{\Delta t}.$$

在时刻t_0的角速度

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{\omega}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\theta'(t_0).$$

2. 当物体的温度高于周围介质的温度时，物体就不断冷却．若物体的温度T与时间t的函数关系为$T=T(t)$，应怎样确定该物体在时刻t的冷却速度？

解 在时间间隔$[t,t+\Delta t]$内平均冷却速度

$$\bar{v}=\frac{\Delta T}{\Delta t}=\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}.$$

在时刻t的冷却速度

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}=T'(t).$$

3. 设某工厂生产x单位产品所花费的成本是$f(x)$元，这函数$f(x)$称为成本函数，成本函数$f(x)$的导数$f'(x)$在经济学中称为边际成本．试说明边际成本$f'(x)$的实际意义．

解 边际成本$f'(x)$表示当产量处于x这一水平时成本的瞬时变化率，它描述了产量达到x单位时再增加一个单位产品所需的成本．

4. 设$f(x)=10x^2$，试按定义求$f'(-1)$．

解 $f'(-1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{10(-1+\Delta x)^2-10(-1)^2}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-20\Delta x+10(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(-20+10\Delta x)=-20.$$

5. 证明$(\cos x)' = -\sin x$.

证 $(\cos x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-2\sin\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)\cdot \sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[-\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right]\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} = -\sin x.$$

6. 下列各题中均假定$f'(x_0)$存在,按照导数定义观察下列极限,指出A表示什么:

(1) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A$;

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = A$,其中$f(0)=0$,且$f'(0)$存在;

(3) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = A$.

解 (1) $A = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

$$= -\lim_{-\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + (-\Delta x)) - f(x_0)}{-\Delta x} = -f'(x_0).$$

(2) 由于$f(0)=0$,故$A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$.

(3) $A = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0}\left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{-h \to 0} \frac{f(x_0 + (-h)) - f(x_0)}{-h}$$

$$= 2f'(x_0).$$

7. 求下列函数的导数:

(1) $y = x^4$; (2) $y = \sqrt[3]{x^2}$; (3) $y = x^{1.6}$;

(4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; (5) $y = \dfrac{1}{x^2}$; (6) $y = x^3\sqrt[5]{x}$;

(7) $y = \dfrac{x^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}$.

解 (1) $y' = 4x^3$.

(2) $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y' = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

(3) $y' = 1.6x^{0.6}$.

(4) $y = x^{-\frac{1}{2}}, y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

(5) $y = x^{-2}, y' = -2x^{-3}$.

(6) $y = x^{\frac{16}{5}}, y' = \frac{16}{5}x^{\frac{11}{5}}$.

(7) $y = x^{2+\frac{2}{3}-\frac{5}{2}} = x^{\frac{1}{6}}, y' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$.

8. 已知物体的运动规律为 $s = t^3$(m),求这物体在 $t = 2$ 秒(s)时的速度.

解 $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 3t^2, v|_{t=2} = 12$(m/s).

9. 如果 $f(x)$为偶函数,且 $f'(0)$存在,证明 $f'(0) = 0$.

证 $f(x)$为偶函数,故有 $f(-x) = f(x)$.

因为 $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{x-0}$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{-x-0}$$

$$= -f'(0),$$

所以 $f'(0) = 0$.

10. 求曲线 $y = \sin x$ 在具有下列横坐标的各点处切线的斜率:

$$x = \frac{2}{3}\pi;\quad x = \pi.$$

解 由导数的几何意义知

$$k_1 = y'|_{x=\frac{2}{3}\pi} = \cos x|_{x=\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2}, k_2 = y'|_{x=\pi} = \cos x|_{x=\pi} = -1.$$

11. 求曲线 $y = \cos x$ 上点$\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$处的切线方程和法线方程.

解 $y'|_{x=\frac{\pi}{3}} = (-\sin x)|_{x=\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

故在点$\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$处的切线方程为

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \text{即}\quad \frac{\sqrt{3}}{2}x + y - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right) = 0.$$

在点$\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$处的法线方程为

$$y - \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right). \text{即}\quad \frac{2\sqrt{3}}{3}x - y + \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi = 0.$$

12. 求曲线 $y = e^x$ 在点(0,1)处的切线方程.

解 $y'|_{x=0}=e^x|_{x=0}=1$

故在(0,1)处的切线方程为

$$y-1=1\cdot(x-0),\text{即 } x-y+1=0.$$

13. 在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标为 $x_1=1$ 及 $x_2=3$ 的两点,作过这两点的割线.问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线?

解 割线的斜率 $k=\dfrac{3^2-1^2}{3-1}=\dfrac{8}{2}=4$.

假设抛物线上点(x_0,x_0^2)处的切线平行于该割线,则有

$$(x^2)'|_{x=x_0}=4,\text{即 } 2x_0=4.$$

故 $x_0=2$,由此得所求点为(2,4).

14. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性:

(1) $y=|\sin x|$;

(2) $y=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}|\sin x|=0=f(0)$,故 $y=|\sin x|$在 $x=0$ 处连续.

又 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-\sin x}{x}=-1$,

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$,

$f'_-(0)\neq f'_+(0)$,故 $y=|\sin x|$在 $x=0$ 处不可导.

(2) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$,故函数在 $x=0$ 处连续.

又 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$,

故函数在 $x=0$ 处可导.

15. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant1,\\ ax+b, & x>1.\end{cases}$$

为了使函数 $f(x)$在 $x=1$ 处连续且可导,a、b 应取什么值?

解 要函数 $f(x)$在 $x=1$ 处连续,应有 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$,即 $1=a+b$.

要函数 $f(x)$在 $x=1$ 处可导,应有 $f'_-(1)=f'_+(1)$.而

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$,

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{a(x-1)}{x-1}=a.$$

故 $a=2,b=-1$.

16. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 求 $f'_+(0)$及 $f'_-(0)$，又 $f'(0)$是否存在?

解 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x-0}{x}=-1,$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-0}{x}=0.$$

由于 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，故 $f'(0)$不存在.

17. 已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & x\geqslant0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1,$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1.$$

由于 $f'_-(0)=f'_+(0)=1$，故 $f'(0)=1$.

因此 $f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant0.\end{cases}$

18. 证明：双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.

证 设(x_0,y_0)为双曲线 $xy=a^2$ 上任一点，该点处切线斜率

$k=\left(\dfrac{a^2}{x}\right)'\Bigg|_{x=x_0}=-\dfrac{a^2}{x_0^2}$，切线方程为 $y-y_0=-\dfrac{a^2}{x_0^2}(x-x_0)$或

$\dfrac{x}{2x_0}+\dfrac{y}{2y_0}=1$，由此可得所构成的三角形的面积为

$A=\dfrac{1}{2}|2x_0||2y_0|=2a^2$.

习 题 2-2

1. 推导余切函数及余割函数的导数公式：

$$(\cot x)'=-\csc^2x;(\csc x)'=-\csc x\cot x.$$

解 $(\cot x)'=\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)'=\dfrac{-\sin x\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2x}=-\dfrac{1}{\sin^2x}=-\csc^2x.$

$$(\csc x)'=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=\frac{-\cos x}{\sin^2x}=-\csc x\cot x.$$

2. 求下列函数的导数:

(1) $y=x^3+\dfrac{7}{x^4}-\dfrac{2}{x}+12$; (2) $y=5x^3-2^x+3e^x$;

(3) $y=2\tan x+\sec x-1$; (4) $y=\sin x\cdot\cos x$;

(5) $y=x^2\ln x$; (6) $y=3e^x\cos x$;

(7) $y=\dfrac{\ln x}{x}$; (8) $y=\dfrac{e^x}{x^2}+\ln 3$;

(9) $y=x^2\ln x\cos x$; (10) $s=\dfrac{1+\sin t}{1+\cos t}$.

解 (1) $y'=3x^2-\dfrac{28}{x^5}+\dfrac{2}{x^2}$.

(2) $y'=15x^2-2^x\ln 2+3e^x$.

(3) $y'=2\sec^2 x+\sec x\tan x=\sec x(2\sec x+\tan x)$.

(4) $y'=\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)'=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cos 2x=\cos 2x$.

(5) $y'=2x\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=x(2\ln x+1)$.

(6) $y'=3e^x\cos x-3e^x\sin x=3e^x(\cos x-\sin x)$.

(7) $y'=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

(8) $y'=\dfrac{e^x\cdot x^2-2xe^x}{x^4}=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$.

(9) $y'=2x\ln x\cos x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}\cos x+x^2\ln x(-\sin x)$

$=2x\ln x\cos x+x\cos x-x^2\ln x\sin x$.

(10) $s'=\dfrac{\cos t(1+\cos t)-(1+\sin t)(-\sin t)}{(1+\cos t)^2}=\dfrac{1+\sin t+\cos t}{(1+\cos t)^2}$.

3. 求下列函数在给定点处的导数:

(1) $y=\sin x-\cos x$,求 $y'|_{x=\frac{\pi}{6}}$ 和 $y'|_{x=\frac{\pi}{4}}$;

(2) $\rho=\theta\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta$,求 $\left.\dfrac{d\rho}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$;

(3) $f(x)=\dfrac{3}{5-x}+\dfrac{x^2}{5}$,求 $f'(0)$ 和 $f'(2)$.

解 (1) $y'=\cos x+\sin x$, $y'|_{x=\frac{\pi}{6}}=\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$,

$y'|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$.

(2) $\frac{d\rho}{d\theta}=\sin\theta+\theta\cos\theta+\frac{1}{2}(-\sin\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta+\theta\cos\theta$,

$$\left.\frac{d\rho}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\frac{\pi}{2}\right).$$

(3) $f'(x)=\frac{3}{(5-x)^2}+\frac{2}{5}x$, $f'(0)=\frac{3}{25}$, $f'(2)=\frac{1}{3}+\frac{4}{5}=\frac{17}{15}$.

4. 以初速 v_0 竖直上抛的物体,其上升高度 s 与时间 t 的关系是 $s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$. 求:

(1) 该物体的速度 $v(t)$;

(2) 该物体达到最高点的时刻.

解 (1) $v(t)=\frac{ds}{dt}=v_0-gt$.

(2) 物体达到最高点的时刻 $v=0$,即 $v_0-gt=0$,

故 $t=\frac{v_0}{g}$.

5. 求曲线 $y=2\sin x+x^2$ 上横坐标为 $x=0$ 的点处的切线方程和法线方程.

解 $y'=2\cos x+2x$, $y'|_{x=0}=2$, $y|_{x=0}=0$,

因此点(0,0)处的切线方程为 $y-0=2(x-0)$,即 $2x-y=0$.

法线方程 $y-0=-\frac{1}{2}(x-0)$,即 $x+2y=0$.

6. 求下列函数的导数:

(1) $y=(2x+5)^4$; (2) $y=\cos(4-3x)$;

(3) $y=e^{-3x^2}$; (4) $y=\ln(1+x^2)$;

(5) $y=\sin^2x$; (6) $y=\sqrt{a^2-x^2}$;

(7) $y=\tan(x^2)$; (8) $y=\arctan(e^x)$;

(9) $y=(\arcsin x)^2$; (10) $y=\ln\cos x$.

解 (1) $y'=4(2x+5)^3\cdot 2=8(2x+5)^3$.

(2) $y'=-\sin(4-3x)(-3)=3\sin(4-3x)$.

(3) $y'=e^{-3x^2}\cdot(-6x)=-6xe^{-3x^2}$.

(4) $y'=\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x=\frac{2x}{1+x^2}$.

(5) $y'=2\sin x\cos x=\sin 2x$.

(6) $y'=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

(7) $y' = \sec^2(x^2)\cdot 2x = 2x\sec^2(x^2)$.

(8) $y' = \dfrac{1}{1+(e^x)^2}\cdot e^x = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$.

(9) $y' = 2\arcsin x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$.

(10) $y' = \dfrac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\tan x$.

7. 求下列函数的导数：

(1) $y = \arcsin(1-2x)$;　　(2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(3) $y = e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$;　　(4) $y = \arccos\dfrac{1}{x}$;

(5) $y = \dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$;　　(6) $y = \dfrac{\sin 2x}{x}$;

(7) $y = \arcsin\sqrt{x}$;　　(8) $y = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$;

(9) $y = \ln(\sec x + \tan x)$;　　(10) $y = \ln(\csc x - \cot x)$.

解 (1) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}\cdot(-2) = -\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$.

(2) $$y' = \frac{-\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

(3) $$y' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x - 3e^{-\frac{x}{2}}\sin 3x = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x + 6\sin 3x).$$

(4) $$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$$

(5) $$y' = \frac{-\dfrac{1}{x}(1+\ln x) - (1-\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}}{(1+\ln x)^2} = -\frac{2}{x(1+\ln x)^2}.$$

(6) $$y' = \frac{2x\cos 2x - \sin 2x}{x^2}.$$

(7) $$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

(8) $$y' = \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

(9) $y' = \frac{1}{\sec x + \tan x}(\sec x \tan x + \sec^2 x) = \sec x.$

(10) $y' = \frac{1}{\csc x - \cot x}(-\csc x \cot x + \csc^2 x) = \csc x.$

8. 求下列函数的导数：

(1) $y = \left(\arcsin \frac{x}{2}\right)^2$； (2) $y = \ln\tan \frac{x}{2}$；

(3) $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$； (4) $y = e^{\arctan\sqrt{x}}$；

(5) $y = \sin^n x \cos nx$； (6) $y = \arctan \frac{x+1}{x-1}$；

(7) $y = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$； (8) $y = \ln\ln\ln x$；

(9) $y = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$； (10) $y = \arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

解 (1) $y' = 2\arcsin \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}.$

(2) $y' = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x} = \csc x.$

(3) $y' = \frac{1}{2\sqrt{1+\ln^2 x}} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}.$

(4) $y' = e^{\arctan\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} e^{\arctan\sqrt{x}}.$

(5) $y' = n\sin^{n-1} x\cos x\cos nx + \sin^n x(-\sin nx) \cdot n$

$= n\sin^{n-1} x(\cos x\cos nx - \sin x\sin nx)$

$= n\sin^{n-1} x\cos (n+1)x.$

(6) $y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2+(x+1)^2}$

$= -\frac{1}{1+x^2}.$

(7) $y' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x - \arcsin x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(\arccos x)^2}$

$$=\frac{\arccos x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}.$$

(8) $y'=\frac{1}{\ln\ln x}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}.$

(9) $y'=$

$$\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})-(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2+\frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{2+2\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{2+2}{(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

(10) $y'=\frac{1}{1-\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2x}(1+x)\sqrt{1-x}}=-\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}.$$

9. 设函数 $f(x)$和 $g(x)$可导，且 $f^2(x)+g^2(x)\neq 0$，试求函数 $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$的导数.

解 $y'=\frac{1}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}\cdot(2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x))$

$$=\frac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}.$$

10. 设 $f(x)$可导，求下列函数的导数$\frac{dy}{dx}$:

(1) $y=f(x^2)$；　　　　(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$.

解 (1) $y'=f'(x^2)2x=2xf'(x^2)$.

(2) $y'=f'(\sin^2 x)2\sin x\cos x+f'(\cos^2 x)2\cos x(-\sin x)$

$=\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$.

11. 求下列函数的导数：

(1) $y=\mathrm{ch}(\mathrm{sh}\ x)$;　　(2) $y=\mathrm{sh}\ x\cdot e^{\mathrm{ch}\ x}$;

(3) $y=\mathrm{th}(\ln x)$;　　(4) $y=\mathrm{sh}^3 x+\mathrm{ch}^2 x$;

(5) $y=\mathrm{th}(1-x^2)$;　　(6) $y=\mathrm{arsh}(x^2+1)$;

(7) $y=\mathrm{arch}(e^{2x})$;　　(8) $y=\arctan(\mathrm{th}\ x)$;

(9) $y=\ln\mathrm{ch}\ x+\dfrac{1}{2\mathrm{ch}^2 x}$;　　(10) $y=\mathrm{ch}^2\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

解　(1) $y'=\mathrm{sh}(\mathrm{sh}\ x)\cdot\mathrm{ch}\ x-\mathrm{ch}\ x\mathrm{sh}(\mathrm{sh}\ x)$.

(2) $y'=\mathrm{ch}\ xe^{\mathrm{ch}\ x}+\mathrm{sh}\ xe^{\mathrm{ch}\ x}\mathrm{sh}\ x=e^{\mathrm{ch}\ x}(\mathrm{ch}\ x+\mathrm{sh}^2 x)$.

(3) $y'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(\ln x)}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x\mathrm{ch}^2(\ln x)}$.

(4) $y'=3\mathrm{sh}^2 x\mathrm{ch}\ x+2\mathrm{ch}\ x\mathrm{sh}\ x=\mathrm{sh}\ x\mathrm{ch}\ x(3\mathrm{sh}\ x+2)$.

(5) $y'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(1-x^2)}\cdot(-2x)=-\dfrac{2x}{\mathrm{ch}^2(1-x^2)}$.

(6) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+(x^2+1)^2}}\cdot 2x=\dfrac{2x}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}$.

(7) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{(e^{2x})^2-1}}\cdot e^{2x}\cdot 2=\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}$.

(8) $y'=\dfrac{1}{1+(\mathrm{th}\ x)^2}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}=\dfrac{1}{1+\dfrac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x}}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x+\mathrm{sh}^2 x}$

$$=\frac{1}{1+2\mathrm{sh}^2 x}.$$

(9) $y'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}\ x}\mathrm{sh}\ x-\dfrac{1}{(2\mathrm{ch}^2 x)^2}\cdot 4\mathrm{ch}\ x\mathrm{sh}\ x=\dfrac{\mathrm{sh}\ x}{\mathrm{ch}\ x}-\dfrac{\mathrm{sh}\ x}{\mathrm{ch}^3 x}$

$$=\frac{\mathrm{sh}\ x(\mathrm{ch}^2 x-1)}{\mathrm{ch}^3 x}=\frac{\mathrm{sh}^3 x}{\mathrm{ch}^3 x}=\mathrm{th}^3 x.$$

(10) $y'=2\mathrm{ch}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\mathrm{sh}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\cdot\dfrac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}$

$$=\frac{2}{(x+1)^2}\mathrm{sh}\left(2\cdot\frac{x-1}{x+1}\right).$$

12. 求下列函数的导数：

(1) $y=e^{-x}(x^2-2x+3)$;　　(2) $y=\sin^2 x\cdot\sin(x^2)$;

(3) $y=\left(\arctan\dfrac{x}{2}\right)^2$;　　(4) $y=\dfrac{\ln x}{x^n}$;

(5) $y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$;　　(6) $y=\ln\cos\dfrac{1}{x}$;

(7) $y=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$;　　(8) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$;

(9) $y = x\arcsin\dfrac{x}{2} + \sqrt{4-x^2}$；　　　(10) $y = \arcsin\dfrac{2t}{1+t^2}$.

解 (1) $y' = -e^{-x}(x^2-2x+3) + e^{-x}(2x-2) = e^{-x}(-x^2+4x-5)$.

(2) $y' = 2\sin x\cos x \cdot \sin(x^2) + \sin^2 x\cos(x^2)\cdot 2x$

$$= \sin 2x\sin(x^2) + 2x\sin^2 x\cos(x^2).$$

(3) $y' = 2\arctan\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{4+x^2}\arctan\dfrac{x}{2}$.

(4) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{x}x^n - nx^{n-1}\ln x}{x^{2n}} = \dfrac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$.

(5) $y' = (\operatorname{th} t)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$.

或 $y' = \dfrac{(e^t+e^{-t})(e^t+e^{-t}) - (e^t-e^{-t})(e^t-e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2}$

$$= \frac{4}{(e^t+e^{-t})^2}.$$

(6) $y' = \dfrac{1}{\cos\dfrac{1}{x}}\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{x^2}\tan\dfrac{1}{x}$.

(7) $y' = e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\left(-2\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{2}{x}e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$.

(8) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

(9) $y' = \arcsin\dfrac{x}{2} + x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}}$

$$= \arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}.$$

(10) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^2}}\cdot\dfrac{2(1+t^2)-2t\cdot(2t)}{(1+t^2)^2}$

$$= \frac{1+t^2}{\sqrt{(1-t^2)^2}}\cdot\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{2(1-t^2)}{|1-t^2|(1+t^2)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{1+t^2}, & |t|<1, \\ -\dfrac{2}{1+t^2}, & |t|>1. \end{cases}$$

习 题 2-3

1. 求下列函数的二阶导数：

(1) $y=2x^2+\ln x$；　　(2) $y=e^{2x-1}$；

(3) $y=x\cos x$；　　(4) $y=e^{-t}\sin t$；

(5) $y=\sqrt{a^2-x^2}$；　　(6) $y=\ln(1-x^2)$；

(7) $y=\tan x$；　　(8) $y=\dfrac{1}{x^3+1}$；

(9) $y=(1+x^2)\arctan x$；　　(10) $y=\dfrac{e^x}{x}$；

(11) $y=xe^{x^2}$　　(12) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) $y'=4x+\dfrac{1}{x},y''=4-\dfrac{1}{x^2}$.

(2) $y'=e^{2x-1}\cdot 2=2e^{2x-1},y''=2e^{2x-1}\cdot 2=4e^{2x-1}$.

(3) $y'=\cos x+x(-\sin x)=\cos x-x\sin x$,

$y''=-\sin x-\sin x-x\cos x=-2\sin x-x\cos x$.

(4) $y'=e^{-t}\cdot(-1)\sin t+e^{-t}\cos t=e^{-t}(\cos t-\sin t)$,

$$y''=e^{-t}(-1)(\cos t-\sin t)+e^{-t}(-\sin t-\cos t)$$
$$=e^{-t}(-2\cos t)=-2e^{-t}\cos t.$$

(5) $y'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

$$y''=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}-x\cdot\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{(\sqrt{a^2-x^2})^2}=\frac{-a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}.$$

(6) $y'=\dfrac{1}{1-x^2}\cdot(-2x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$,

$$y''=\frac{2(x^2-1)-2x\cdot(2x)}{(x^2-1)^2}=-\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

(7) $y'=\sec^2 x,y''=2\sec^2 x\tan x$.

(8) $y'=\dfrac{-3x^2}{(x^3+1)^2},y''=-\dfrac{3[2x(x^3+1)^2-x^2\cdot 2(x^3+1)\cdot 3x^2]}{(x^3+1)^4}$

$$=\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}.$$

(9) $y'=2x\arctan x+(1+x^2)\cdot\dfrac{1}{1+x^2}=2x\arctan x+1$,

$$y''=2\arctan x+2x\frac{1}{1+x^2}=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}.$$

(10) $y'=\dfrac{xe^x-e^x}{x^2}=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$,

$$y''=\frac{(e^x+(x-1)e^x)x^2-2x(x-1)e^x}{x^4}=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}.$$

(11) $y'=e^{x^2}+xe^{x^2}\cdot 2x=(1+2x^2)e^{x^2}$,

$$y''=4xe^{x^2}+(1+2x^2)e^{x^2}\cdot 2x=2x(3+2x^2)e^{x^2}.$$

(12) $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$y''=\frac{-\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2})^2}=-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

2. 设 $f(x)=(x+10)^6$，$f'''(2)=?$

解 $f'(x)=6(x+10)^5$，$f''(x)=30(x+10)^4$，$f'''(x)=120(x+10)^3$，

$f'''(2)=120\times 12^3=207\ 360$.

3. 设 $f''(x)$存在，求下列函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $y=f(x^2)$； (2) $y=\ln[f(x)]$.

解 (1) $y'=f'(x^2)\cdot 2x=2xf'(x^2)$，$y''=2f'(x^2)+2xf''(x^2)\cdot 2x$

$=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$.

(2) $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$，$y''=\dfrac{f''(x)f(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}$.

4. 试从$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$导出：

(1) $\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$； (2) $\dfrac{d^3x}{dy^3}=\dfrac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

解 (1) $\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{y'}\right)\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{y''}{(y')^2}\cdot\dfrac{1}{y'}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$.

(2) $\dfrac{d^3x}{dy^3}=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{d^2x}{dy^2}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-y''}{(y')^3}\right)\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{y'''(y')^3-y''\cdot 3(y')^2y''}{(y')^6}\cdot\dfrac{1}{y'}$

$=\dfrac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

5. 已知物体的运动规律为 $s=A\sin\omega t$（A、ω 是常数），求物体运动的加速度，并验证：

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2 s=0.$$

解 $\frac{ds}{dt}=A\cos\omega t\cdot\omega=A\omega\cos\omega t$, $\frac{d^2s}{dt^2}=-A\omega^2\sin\omega t$,

故 $\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2 s=-A\omega^2\sin\omega t+\omega^2 A\sin\omega t=0$.

6. 验证函数 $y=C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}$($\lambda, C_1, C_2$ 是常数)满足关系式:

$$y''-\lambda^2 y=0.$$

解 $y'=C_1\lambda e^{\lambda x}-C_2\lambda e^{-\lambda x}$, $y''=C_1\lambda^2e^{\lambda x}+C_2\lambda^2e^{-\lambda x}$,

故 $y''-\lambda^2y=C_1\lambda^2e^{\lambda x}+C_2\lambda^2e^{-\lambda x}-\lambda^2(C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x})=0$.

7. 验证函数 $y=e^x\sin x$ 满足关系式

$$y''-2y'+2y=0.$$

解 $y'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$,

$y''=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$,

故 $y''-2y'+2y=2e^x\cos x-2e^x(\sin x+\cos x)+2e^x\sin x=0$.

8. 求下列函数的 n 阶导数的一般表达式:

(1) $y=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$($a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是常数);

(2) $y=\sin^2 x$;

(3) $y=x\ln x$;

(4) $y=xe^x$.

解 (1) $y'=nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+a_2(n-2)x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}$,

$y''=n(n-1)x^{n-2}+a_1(n-1)(n-2)x^{n-3}+\cdots+a_{n-2}$,

……

$y^{(n)}=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$.

(2) $y=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $y^{(n)}=\frac{-1}{2}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)\cdot 2^n$

$=-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

(3) $y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$, $y''=\frac{1}{x}$,

$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}$.

(4) $y'=e^x+xe^x=(1+x)e^x$, $y''=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$.

设 $y^{(k)}=(k+x)e^x$, 则 $y^{(k+1)}=e^x+(k+x)e^x=(1+k+x)e^x$,

故 $y^{(n)}=(n+x)e^x$.

9. 求下列函数所指定的阶的导数:

(1) $y=e^x\cos x$, 求 $y^{(4)}$;

(2) $y=x\operatorname{sh} x$, 求 $y^{(100)}$;

(3) $y=x^2\sin 2x$，求 $y^{(50)}$.

解 (1) 利用莱布尼兹公式 $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$，

其中 $C_n^k=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$

$$
\begin{aligned}
(e^x\cos x)^{(4)}&=(e^x)^{(4)}\cos x+4(e^x)'''(\cos x)'+\frac{4\cdot 3}{2!}(e^x)''(\cos x)''\\
&\quad+\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!}(e^x)'(\cos x)'''+e^x(\cos x)^{(4)}\\
&=e^x\cos x-4e^x\sin x+6e^x(-\cos x)+4e^x\sin x+e^x\cos x\\
&=-4e^x\cos x.
\end{aligned}
$$

(2) 由 $\mathrm{sh}^{(n)}x=\begin{cases}\mathrm{sh}\,x, & n\text{ 为偶数},\\ \mathrm{ch}\,x, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$ 及莱布尼兹公式

$$(x\,\mathrm{sh}\,x)^{(100)}=x(\mathrm{sh}\,x)^{(100)}+100(\mathrm{sh}\,x)^{(99)}=x\,\mathrm{sh}\,x+100\,\mathrm{ch}\,x.$$

(3) 由 $(\sin 2x)^{(n)}=2^n\sin\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ 及莱布尼兹公式

$$
\begin{aligned}
(x^2\sin 2x)^{(50)}&=x^2(\sin 2x)^{(50)}+50(x^2)'(\sin 2x)^{(49)}+\frac{50\cdot 49}{2!}(x^2)''(\sin 2x)^{(48)}\\
&=2^{50}x^2\sin\left(2x+\frac{50\pi}{2}\right)+100x\sin\left(2x+\frac{49\pi}{2}\right)\\
&\quad+\frac{50\times 49}{2}\cdot 2\cdot 2^{48}\sin\left(2x+\frac{48\pi}{2}\right)\\
&=2^{50}\left(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\frac{1\ 225}{2}\sin 2x\right).
\end{aligned}
$$

习 题 2-4

1. 求由下列方程所确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$：

(1) $y^2-2xy+9=0$；　　(2) $x^3+y^3-3axy=0$；

(3) $xy=e^{x+y}$；　　(4) $y=1-xe^y$.

解 (1) 在方程两端分别对 x 求导，得

$$2yy'-2y-2xy'=0,$$

从而 $y'=\dfrac{y}{y-x}$，其中 y 是由方程 $y^2-2xy+9=0$ 所确定的隐函数.

(2) 在方程两端分别对 x 求导，得

$$3x^2+3y^2y'-3ay-3axy'=0,$$

从而 $y'=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$，其中 y 是由方程 $x^3+y^3-3axy=0$ 所确定的隐函数.

(3) 在方程两端分别对 x 求导，得

$$y+xy'=e^{x+y}(1+y'),$$

从而 $y'=\dfrac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$，其中 y 是由方程 $xy=e^{x+y}$ 所确定的隐函数.

(4) 在方程两端分别对 x 求导，得

$$y'=-e^y-xe^y y',$$

从而 $\quad y'=-\dfrac{e^y}{1+xe^y}$，其中 y 是由方程 $y=1-xe^y$ 所确定的隐函数.

2. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}a,\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处的切线方程和法线方程.

解 由导数的几何意义知，所求切线的斜率为

$$k=y'\big|_{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)},$$

在曲线方程两端分别对 x 求导，得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0,$$

从而 $\quad y'=-\dfrac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}},\quad y'\big|_{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)}=-1.$

于是所求的切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=-1\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$$

即
$$x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

法线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=1\cdot\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a\right),$$

即
$$x-y=0.$$

3. 求由下列方程所确定的隐函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $x^2-y^2=1$；　　(2) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$；

(3) $y=\tan(x+y)$；　　(4) $y=1+xe^y$.

解 (1) 由隐函数的求导法则得

$$2x-2yy'=0,$$

于是
$$y'=\frac{x}{y}.$$

在上式两端再对 x 求导，得

$$y''=\frac{y-xy'}{y^2}=\frac{y-\frac{x^2}{y}}{y^2}=\frac{y^2-x^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3}.$$

(2) 由隐函数的求导法则，得

$$2xb^2+2a^2yy'=0,$$

于是 $$y'=-\frac{b^2x}{a^2y},$$

$$y''=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

(3) 由隐函数的求导法则，得

$$y'=\sec^2(x+y)(1+y')=(1+\tan^2(x+y))(1+y')=(1+y^2)(1+y'),$$

于是 $$y'=\frac{(1+y^2)}{1-(1+y^2)}=-\frac{1}{y^2}-1,$$

$$y''=-\frac{2y'}{y^3}=-\frac{2(1+y^2)}{y^5}=-2\csc^2(x+y)\cot^3(x+y).$$

(4) 由隐函数的求导法则，得

$$y'=e^y+xe^yy',$$

于是 $$y'=\frac{e^y}{1-xe^y},$$

$$y''=\frac{e^y\cdot y'(1+xe^y)-e^y(-e^y-xe^yy')}{(1-xe^y)^2}$$

$$=\frac{e^yy'+e^{2y}}{(1-xe^y)^2}=\frac{e^{2y}(2-xe^y)}{(1-xe^y)^3}.$$

4. 用对数求导法求下列函数的导数：

(1) $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$；　　(2) $y=\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[3]{x^2+2}}}$；

(3) $y=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$；　(4) $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$.

解 (1) 在 $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ 两端取对数，得

$$\ln y=x[\ln x-\ln(1+x)].$$

在上式两端分别对 x 求导，并注意到 y 是 x 的函数，得

$$\frac{y'}{y}=[\ln x-\ln(1+x)]+x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)=\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x},$$

于是 $$y'=y\left(\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right)=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\left(\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right).$$

(2) 在 $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$ 两端取对数，得

$$\ln y=\frac{1}{5}\left[\ln(x-5)-\frac{1}{5}\ln(x^2+2)\right]=\frac{1}{5}\ln(x-5)-\frac{1}{25}\ln(x^2+2).$$

在上式两端分别对 x 求导，并注意到 y 是 x 的函数，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-5}-\frac{1}{25}\cdot\frac{2x}{x^2+2},$$

于是 $y'=y\left[\dfrac{1}{5(x-5)}-\dfrac{2x}{25(x^2+2)}\right]=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}\left[\dfrac{1}{5(x-5)}-\dfrac{2x}{25(x^2+2)}\right].$

(3) 在 $y=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$ 两端取对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln(x+2)+4\ln(3-x)-5\ln(1+x).$$

在上式两端分别对 x 求导，并注意到 y 是 x 的函数，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2}+4\cdot\frac{(-1)}{3-x}-5\cdot\frac{1}{1+x},$$

于是 $y'=y\left[\dfrac{1}{2(x+2)}-\dfrac{4}{3-x}-\dfrac{5}{1+x}\right]$

$$=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}\left[\frac{1}{2(x+2)}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{1+x}\right].$$

(4) 在 $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$ 两端取对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}\left[\ln x+\ln\sin x+\frac{1}{2}\ln(1-e^x)\right].$$

在上式两端分别对 x 求导，并注意到 y 是 x 的函数，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(-e^x)}{1-e^x}\right],$$

于是

$$y'=y\left[\frac{1}{2x}+\frac{\cos x}{2\sin x}-\frac{e^x}{4(1-e^x)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\left[\frac{1}{x}+\cot x-\frac{e^x}{2(1-e^x)}\right].$$

5. 求下列参数方程所确定的函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$：

(1) $\begin{cases}x=at^2,\\ y=bt^3;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x=\theta(1-\sin\theta),\\ y=\theta\cos\theta.\end{cases}$

解 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3bt^2}{2at}=\dfrac{3b}{2a}t.$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\cos\theta-\theta\sin\theta}{1-\sin\theta+\theta(-\cos\theta)}=\frac{\cos\theta-\theta\sin\theta}{1-\sin\theta-\theta\cos\theta}$.

6．已知$\begin{cases}x=e^t\sin t,\\ y=e^t\cos t.\end{cases}$求当 $t=\frac{\pi}{3}$时$\frac{dy}{dx}$的值.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t\cos t-e^t\sin t}{e^t\sin t+e^t\cos t}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}$,

于是 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}=\sqrt{3}-2$.

7．写出下列曲线在所给参数值相应的点处的切线方程和法线方程：

(1) $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\cos 2t,\end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$处；

(2) $\begin{cases}x=\frac{3at}{1+t^2},\\ y=\frac{3at^2}{1+t^2},\end{cases}$ 在 $t=2$ 处.

解 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2\sin 2t}{\cos t}=-4\sin t$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-2\sqrt{2}$. $t=\frac{\pi}{4}$对应点$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，曲线在点$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$处的切线方程为

$$y-0=-2\sqrt{2}\left(x\quad\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\text{，即 }2\sqrt{2}x+y-2=0.$$

法线方程为 $$y-0=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\text{，即}\sqrt{2}x-4y-1=0.$$

(2) $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\left(\frac{3at^2}{1+t^2}\right)'}{\left(\frac{3at}{1+t^2}\right)'}$$

$$=\frac{\frac{3a[2t(1+t^2)-t^2\cdot 2t]}{(1+t^2)^2}}{\frac{3a[(1+t^2)-t^2\cdot 2t]}{(1+t^2)^2}}$$

$$=\frac{2t}{1-t^2},$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2}=-\frac{4}{3},$$

$t=2$ 对应点$\left(\frac{6}{5}a,\frac{12}{5}a\right)$,

曲线在点$\left(\frac{6}{5}a,\frac{12}{5}a\right)$处的切线方程为

$$y-\frac{12}{5}a=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{6}{5}a\right),$$

即 $$4x+3y-12a=0$$

法线方程为 $y-\frac{12}{5}a=\frac{3}{4}\left(x-\frac{6}{5}a\right)$,

即 $$3x-4y+6a=0.$$

8. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $\begin{cases}x=\dfrac{t^2}{2},\\ y=1-t;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=3e^{-t},\\ y=2e^{t};\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=f'(t),\\ y=tf'(t)-f(t);\end{cases}$设 $f''(t)$存在且不为零.

解 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-1}{t},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{t^2}}{t}=\frac{1}{t^3}$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t,$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{b}{a}(-\csc^2 t)}{-a\sin t}=\frac{-b}{a^2\sin^3 t}.$$

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{2e^t}{-3e^{-t}}=-\frac{2}{3}e^{2t},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\frac{4}{3}e^{2t}}{-3e^{-t}}=\frac{4}{9}e^{3t}.$

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t,\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{f''(t)}.$

9. 求下列参数方程所确定的函数的三阶导数$\dfrac{d^3y}{dx^3}$：

(1) $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\arctan t. \end{cases}$

解 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-3t^2}{-2t}=-\dfrac{1}{2t}+\dfrac{3}{2}t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{1}{2t^2}+\dfrac{3}{2}}{-2t}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t^3}+\frac{3}{t}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{-\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{3}{t^4}-\dfrac{3}{t^2}\right)}{-2t}=-\frac{3}{8t^5}(1+t^2).$$

(2) $$\frac{dy}{dx}=\frac{1-\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}+t\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{t^2}+1\right)}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\frac{t^4-1}{8t^3}.$$

10. 落在平静水面上的石头，产生同心波纹. 若最外一圈波半径的增大率总是 6 m/s，问在 2 s 末扰动水面面积的增大率为多少？

解 设最外一圈波的半径为 $r=r(t)$. 圆的面积 $S=S(t)$. 在 $S=\pi r^2$ 两端分别对 t 求导，得$\dfrac{dS}{dt}=2\pi r\dfrac{dr}{dt}$

当 $t=2$ 时，$r=6\times2=12$，$\dfrac{dr}{dt}=6$，代入上式得

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=2}=2\pi\cdot12\cdot6=144\pi(\mathrm{m^2/s})$$

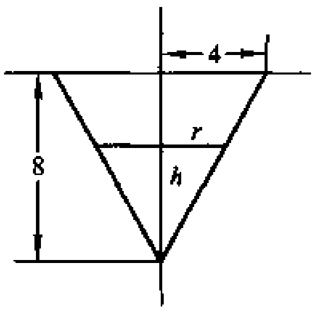


图 2 - 1

11. 注水入深 8 m 上顶直径 8 m 的正圆锥形容器中，其速率为 4 $\mathrm{m^3}$/min. 当水深为 5 m 时，其表面上升的速率为多少？

解 如图 2 - 1 所示，设在 t 时刻容器中的水深为 $h(t)$，水的容积为 $V(t)$，

$$\frac{r}{4}=\frac{h}{8}\quad 即\ r=\frac{h}{2},$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 h=\frac{\pi}{12}h^3.$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}\quad 即\frac{dh}{dt}=\frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}.$$

故
$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=5}=\frac{4}{25\pi}\cdot 4=\frac{16}{25\pi}\approx 0.204\ (\mathrm{m/min}).$$

12. 溶液自深 18 cm 顶直径 12 cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10 cm 的圆柱形筒中. 开始时漏斗中盛满了溶液. 已知当溶液在漏斗中深为 12 cm 时，其表面下降的速率为 1 cm/min. 问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少?

解 如图 2－2,设在 t 时刻漏斗中的水深为 $H=H(t)$,圆柱形筒中水深为 $h=h(t)$.

建立 h 与 H 之间的关系:

$$\frac{1}{3}\pi 6^2\cdot 18-\frac{1}{3}\pi r^2 H=\pi 5^2 h.$$

又,$\frac{r}{6}=\frac{H}{18}$,即 $r=\frac{H}{3}$.

故
$$\frac{1}{3}\pi 6^2\cdot 18-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{H}{3}\right)^2 H=\pi 5^2 h$$

即
$$216\pi-\frac{\pi}{27}H^3=25\pi h.$$

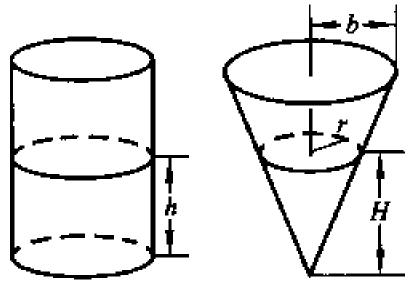


图 2－2

上式两端分别对 t 求导,得 $-\frac{3}{27}\pi H^2\frac{dH}{dt}=25\pi\frac{dh}{dt}$.

当 $H=12$ 时,$\frac{dH}{dt}=-1$,此时

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{25\pi}\left(-\frac{3}{27}\pi H^2\frac{dH}{dt}\right)\Bigg|_{\substack{H=12\\ \frac{dH}{dt}=-1}}=\frac{16}{25}\approx 0.64\ (\mathrm{cm/min}).$$

习 题 2－5

1. 已知 $y=x^3-x$,计算在 $x=2$ 处当 Δx 分别等于 1,0.1,0.01 时的 Δy 及 dy.

解 $\Delta y=(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)-x^3+x$

$=3x(\Delta x)^2+3x^2\Delta x+(\Delta x)^3-\Delta x,$

$dy=(3x^2-1)\Delta x.$

于是 $\Delta y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=1}}=6\cdot1+3\cdot4+1^3-1=18, \mathrm{d}y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=1}}=11\cdot1=11;$

$$\Delta y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.1}}=6\cdot(0.1)^2+12\cdot(0.1)+(0.1)^3-0.1=1.161,$$

$$\mathrm{d}y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.1}}=11\cdot(0.1)=1.1;$$

$$\Delta y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}=6\cdot(0.01)^2+12\cdot(0.01)-(0.01)^3-0.01=0.110\,601,$$

$$\mathrm{d}y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}=11\cdot(0.01)=0.11.$$

2. 设函数 $y=f(x)$ 的图形如图 2－3，试在图 2－3(a)、(b)、(c)、(d)中分别标出在点 x_0 的 $\mathrm{d}y$、Δy 及 $\Delta y-\mathrm{d}y$，并说明其正负.

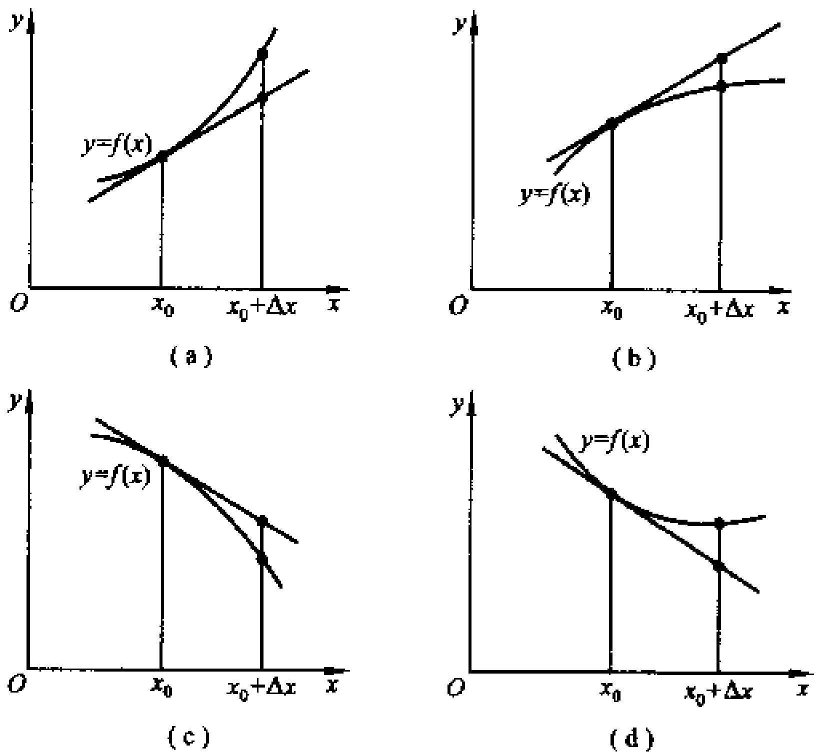


图 2－3

解 (a) $\Delta y>0, \mathrm{d}y>0, \Delta y-\mathrm{d}y>0$.

(b) $\Delta y>0, \mathrm{d}y>0, \Delta y-\mathrm{d}y<0$.

(c) $\Delta y<0, \mathrm{d}y<0, \Delta y-\mathrm{d}y<0$.

(d) $\Delta y<0, \mathrm{d}y<0, \Delta y-\mathrm{d}y>0$.

3. 求下列函数的微分：

(1) $y=\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}$； (2) $y=x\sin 2x$；

(3) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$； (4) $y=\ln^2(1-x)$；

(5) $y=x^2e^{2x}$; (6) $y=e^{-x}\cos(3-x)$;

(7) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$; (8) $y=\tan^2(1+2x^2)$;

(9) $y=\arctan\dfrac{1-x^2}{1+x}$; (10) $s=A\sin(\omega t+\varphi)$ (A、ω、φ 是常数).

解 (1) $dy=y'dx=\left(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

(2) $dy=y'dx=(\sin 2x+x\cos 2x\cdot 2)dx=(\sin 2x+2x\cos 2x)dx$.

(3) $dy=y'dx=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}dx=\dfrac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$.

(4) $dy=y'dx=2\ln(1-x)\cdot\dfrac{(-1)}{1-x}dx=\dfrac{2}{x-1}\ln(1-x)dx$.

(5) $dy=y'dx=(2xe^{2x}+x^2e^{2x}\cdot 2)dx=2x(1+x)e^{2x}dx$.

(6) $$\begin{aligned}dy=y'dx&=[-e^{-x}\cos(3-x)+e^{-x}\sin(3-x)]dx\\&=e^{-x}[\sin(3-x)-\cos(3-x)]dx.\end{aligned}$$

(7) $$\begin{aligned}dy=y'dx&=\left[\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\right]dx=-\frac{x}{|x|}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\&=\begin{cases}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<0,\\ -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & 0<x<1.\end{cases}\end{aligned}$$

(8) $$\begin{aligned}dy=y'dx&=[2\tan(1+2x^2)\cdot\sec^2(1+2x^2)\cdot 4x]dx\\&=8x\tan^2(1+2x^2)\sec^2(1+2x^2)dx.\end{aligned}$$

(9) $$\begin{aligned}dy=y'dx&=\frac{1}{1+\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}\cdot\frac{(-2x)(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}dx\\&=-\frac{2x}{1+x^4}\cdot dx.\end{aligned}$$

(10) $ds=s'dt=(A\cos(\omega t+\varphi)\cdot\omega)dt=A\omega\cos(\omega t+\varphi)dt$.

4. 将适当的函数填入下列括号内,使等式成立:

(1) d( )$=2dx$; (2) d( )$=3xdx$;

(3) d( )$=\cos t\,dt$; (4) d( )$=\sin\omega x\,dx$;

(5) d( )$=\dfrac{1}{1+x}dx$; (6) d( )$=e^{-2x}dx$;

(7) d( )$=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$; (8) d( )$=\sec^2 3x\,dx$.

解 (1) $d(2x+C)=2dx$.

(2) $d\left(\frac{3}{2}x^2+C\right)=3xdx$.

(3) $d(\sin t+C)=\cos t dt$.

(4) $d\left(-\frac{1}{\omega}\cos \omega t+C\right)=\sin \omega t dt$.

(5) $d(\ln(1+x)+C)=\frac{1}{1+x}dx$.

(6) $d\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}+C\right)=e^{-2x}dx$.

(7) $d(2\sqrt{x}+C)=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

(8) $d\left(\frac{1}{3}\tan 3x+C\right)=\sec^2 3x dx$.

5. 如图 2-4 所示的电缆$\overset{\frown}{AOB}$的长为 s，跨度为 $2l$，电缆的最低点 O 与杆顶连线 AB 的距离为 f，则电缆长可按下面公式计算：

$$s=2l\left(1+\frac{2f^2}{3l^2}\right),$$

当 f 变化了 Δf 时，电缆长的变化约为多少？

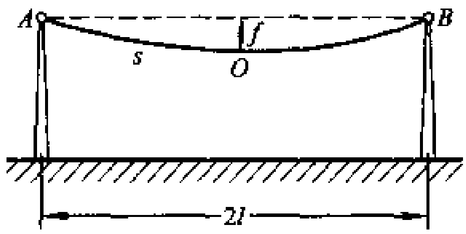


图 2-4

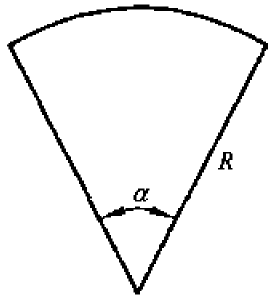


图 2-5

解 $s=2l\left(1+\frac{2f^2}{3l^2}\right)$,

$$\Delta s\approx ds=2l\cdot\frac{4f}{3l^2}\Delta f=\frac{8f}{3l}\Delta f.$$

6. 设扇形的圆心角 $\alpha=60°$，半径 $R=100$ cm（图 2-5）. 如果 R 不变，α 减少 $30'$，问扇形面积大约改变了多少？又如果 α 不变，R 增加 1 cm，问扇形面积大约改变了多少？

解 扇形面积公式为 $S=\frac{R^2}{2}\alpha$.

于是 $\Delta S \approx \mathrm{d}S = \dfrac{R^2}{2}\Delta\alpha$.

将 $$R = 100, \Delta\alpha = -30' = -\frac{\pi}{360}, \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ 代入上式}$$

得 $$\Delta S \approx \frac{1}{2}\cdot 100^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{360}\right) \approx -43.63 \text{ cm}^2.$$

又 $\quad \Delta S \approx \mathrm{d}S \approx \alpha R \Delta R$.

将 $\alpha = \dfrac{\pi}{3}, R = 100, \Delta R = 1$ 代入上式得

$$\Delta S \approx \frac{\pi}{3}\cdot 100 \cdot 1 \approx 104.72 \text{ cm}^2.$$

7. 计算下列三角函数值的近似值：

(1) $\cos 29°$； (2) $\tan 136°$.

解 (1) 由 $\cos x \approx \cos x_0 + (\cos x)'\big|_{x_0}\cdot(x - x_0)$，及取 $x_0 = 30° = \dfrac{\pi}{6}$ 得

$$\cos 29° = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) \approx \cos\frac{\pi}{6} + (-\sin x)\big|_{x=\frac{\pi}{6}}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$\approx \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{360} \approx 0.874\ 67.$$

(2) 由 $\tan x \approx \tan x_0 + (\tan x)'\big|_{x=x_0}\cdot(x - x_0)$，及取 $x_0 = \dfrac{3}{4}\pi$ 得

$$\tan 136° \approx \tan\frac{3}{4}\pi + \sec^2 x\big|_{x=\frac{3}{4}\pi}\cdot\frac{\pi}{180}$$

$$\approx -0.965\ 09.$$

8. 计算下列反三角函数值的近似值：

(1) $\arcsin 0.500\ 2$； (2) $\arccos 0.499\ 5$.

解 (1) 由 $\arcsin x \approx \arcsin x_0 + (\arcsin x)'\big|_{x=x_0}\cdot(x - x_0)$ 及取 $x_0 = 0.5$

得 $$\arcsin(0.500\ 2) \approx \arcsin 0.5 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big|_{x=0.5}\cdot 0.000\ 2$$

$$\approx 30°47''.$$

(2) 由 $\arccos x \approx \arccos x_0 + (\arccos x)'\Big|_{x=x_0}\cdot(x - x_0)$ 及取 $x_0 = 0.5$

得 $$\arccos 0.499\ 5 \approx \arccos(0.5) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big|_{x=0.5}\cdot(0.5 - 0.000\ 5)$$

$$\approx 60°2'.$$

9. 当 $|x|$ 较小时，证明下列近似公式：

(1) $\tan x \approx x$（x 是角的弧度值）；(2) $\ln(1+x) \approx x$；

(3) $\frac{1}{1+x}\approx 1-x$.

并计算 tan 45′和 ln 1.002 的近似值.

解 (1) $\tan x\approx\tan 0+(\tan x)'\big|_{x=0}\cdot x=0+\sec^2 0\cdot x=x$.

(2) $\ln(1+x)\approx\ln(1+0)+[\ln(1+x)]'\big|_{x=0}\cdot x=0+\frac{1}{1+0}x=x$.

(3) $\frac{1}{1+x}\approx\frac{1}{1+0}+\left(\frac{1}{1+x}\right)'\Big|_{x=0}\cdot x=1-\frac{1}{(1+0)^2}\cdot x=1-x$.

$\tan 45'\approx 45'=0.013\ 09$, $\ln(1.002)\approx 0.002$.

10. 计算下列各根式的近似值:

(1) $\sqrt[3]{996}$; (2) $\sqrt[6]{65}$.

解 由 $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{x}{n}$ 知

(1) $\sqrt[3]{996}=\sqrt[3]{1\ 000-4}=10\sqrt[3]{1-\frac{4}{1\ 000}}\approx 10\left[1+\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{1\ 000}\right)\right]$

≈ 9.987.

(2) $\sqrt[6]{65}=\sqrt[6]{64+1}=2\sqrt[6]{1+\frac{1}{64}}\approx 2\left(1+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{64}\right)\approx 2.005\ 2$.

11. 计算球体体积时,要求精确度在 2% 以内.问这时测量直径 D 的相对误差不能超过多少?

解 由 $V=\frac{1}{6}\pi D^3$ 知 $\mathrm{d}V=\frac{\pi}{2}D^2\Delta D$,

于是由 $\left|\frac{\mathrm{d}V}{V}\right|=\left|\frac{\frac{\pi}{2}D^2\Delta D}{\frac{1}{6}\pi D^3}\right|=3\left|\frac{\Delta D}{D}\right|\leqslant 2\%$,知

$$\left|\frac{\Delta D}{D}\right|\leqslant\frac{2}{3}\%.$$

12. 某厂生产如图 2-6 所示的扇形板,半径 $R=200$ mm,要求中心角 α 为 55°.产品检验时,一般用测量弦长 l 的办法来间接测量中心角 α.如果测量弦长 l 时的误差 $\delta_l=0.1$ mm,问由此而引起的中心角测量误差 δ_α 是多少?

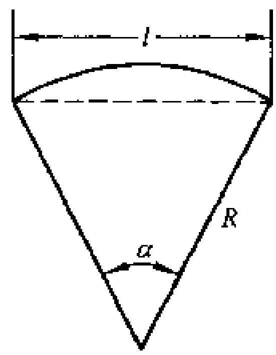


图 2-6

解 如图 2-6,由 $\frac{l}{2}=R\sin\frac{\alpha}{2}$ 得

$$\alpha=2\arcsin\frac{l}{2R}=2\arcsin\frac{l}{400}$$

故 $\delta_\alpha=|\alpha_l'|\delta_l$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{l}{400}\right)^2}}\cdot\frac{1}{400}\cdot\delta_l.$$

当 $\alpha-55°$时,$l=2R\sin\frac{\alpha}{2}=400\sin(27.5°)\approx184.7$.

将 $l=184.7,\delta_l=0.1$ 代人上式　得

$$\delta_\alpha=\frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{184.7}{400}\right)^2}}\cdot\frac{1}{400}\cdot0.1\approx0.000\ 56(\text{弧度})=1'55''.$$

总 习 题 二

1. 在"充分"、"必要"和"充分必要"三者中选择一个正确的填人下列空格内:

(1) $f(x)$在点 x_0 可导是 $f(x)$在点 x_0 连续的________条件. $f(x)$在点 x_0 连续是 $f(x)$在点 x_0 可导的________条件.

(2) $f(x)$在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$及右导数 $f'_+(x_0)$都存在且相等是 $f(x)$在点 x_0 可导的________条件.

(3) $f(x)$在点 x_0 可导是 $f(x)$在点 x_0 可微的________条件.

解 (1) 充分,必要.

(2) 充分必要.

(3) 充分必要.

2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设 $f(x)$在 $x=a$ 的某个邻域内有定义,则 $f(x)$在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是(　　).

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]$存在.

(B) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在.

(C) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在.

(D) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在.

解 由 $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]=\lim\limits_{h\to+\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)}{\frac{1}{h}}$存在,仅可知

$f'_+(a)$存在. 故不能选(A).

取 $f(x)=\begin{cases}1, x\neq 0,\\ 0, x=0.\end{cases}$ 显然 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+2h)-f(0+h)}{h}=0$,

但 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导,故不能选择(B).

取 $f(x)=|x|$,显然 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}=0$. 但 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导,故不能选择(C).

而 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim\limits_{-h\to 0}\dfrac{f(a+(-h))-f(a)}{-h}$存在,按导数定义知 $f'(a)$存在,故选择(D).

3. 设有一根细棒,取棒的一端作为原点,棒上任意点的坐标为 x,于是分布在区间$[0,x]$上细棒的质量 m 是 x 的函数 $m=m(x)$. 应怎样确定细棒在点 x_0 处的线密度(对于均匀细棒来说,单位长度细棒的质量叫做这细棒的线密度)?

解 在区间$[x_0,x_0+\Delta x]$上的平均线密度为

$$\bar{\rho}=\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}.$$

在点 x_0 处的线密度为

$$\rho(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}=\left.\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$

4. 根据导数的定义,求 $f(x)=\dfrac{1}{x}$的导数.

解 由导数的定义知,当 $x\neq 0$ 时

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)}=-\frac{1}{x^2}.$$

5. 求下列函数 $f(x)$的 $f'_-(0)$及 $f'_+(0)$,又 $f'(0)$是否存在:

(1) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 (1) $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$,

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

由 $f'_-(0)=f'_+(0)=1$ 知 $f'(0)=f'_-(0)=f'_+(0)=1$.

(2) $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$,

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0.$$

由 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$ 知 $f'(0)$ 不存在.

6. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x}\text{不存在},$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

7. 求下列函数的导数：

(1) $y=\arcsin(\sin x)$;

(2) $y=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$;

(3) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\tan x$;

(4) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$;

(5) $y=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$.

解 (1) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2x}}\cos x=\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$.

(2) $y'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\dfrac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{1+x^2}$.

(3) $y'=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{2}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\sin x\ln\tan x-\cos x\dfrac{1}{\tan x}\sec^2x$

$=\sin x\cdot\ln\tan x$.

(4) $y'=\dfrac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\left(e^x+\dfrac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}\right)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

(5) 先在等式两端分别取对数，得 $\ln y=\frac{\ln x}{x}$，再在所得等式两端分别对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2},$$

于是
$$y'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

8. 求下列函数的二阶导数：

(1) $y=\cos^2 x\cdot\ln x$；

(2) $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 (1) $y'=2\cos x(-\sin x)\cdot\ln x+\cos^2 x\cdot\frac{1}{x}=-\sin 2x\cdot\ln x+\frac{\cos^2 x}{x}$.

$$y''=-2\cos 2x\cdot\ln x-\sin 2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{2\cos x(-\sin x)\cdot x-\cos^2 x}{x^2}$$

$$=-2\cos 2x\cdot\ln x-\frac{2\sin 2x}{x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}.$$

(2) $y'=\frac{\sqrt{1-x^2}-x\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2}=\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$.

$$y''=-\frac{3}{2}\cdot(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-2x)=\frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}.$$

9. 求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y=\sqrt[m]{1+x}$；　　　　(2) $y=\frac{1-x}{1+x}$.

解 (1) $y'=\frac{1}{m}(1+x)^{\frac{1}{m}-1}, y''=\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{1}{m}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-2},\cdots,$

$$y^{(n)}=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{m}-n+1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-n}.$$

(2) 由 $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ 知

$$y^{(n)}=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{(n)}=\left(-1+\frac{2}{x+1}\right)^{(n)}=2\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}$$

$$=\frac{2\cdot(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

10. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 所确定，求 $y''(0)$.

解 把方程两边分别对 x 求导，得

$$e^y y'+y+xy'=0. \tag{1}$$

将 $x=0$ 代入 $e^y+xy=e$. 得 $y=1$,再将 $x=0,y=1$ 代入(1)式得 $y'|_{x=0}=-\frac{1}{e}$,在(1)式两边分别关于 x 再求导,可得

$$e^y\cdot y'^2+e^y y''+y'+y'+xy''=0. \tag{2}$$

将 $x=0,y=1,y'|_{x=0}=-\frac{1}{e}$ 代入(2)式,得 $y''(0)=\frac{1}{e^2}$.

11. 求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $\begin{cases}x=a\cos^3\theta\\ y=a\sin^3\theta;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2},\\ y=\arctan t.\end{cases}$

解 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)}=-\tan\theta,$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-\sec^2\theta}{-3\cos^2\theta\sin\theta}=\frac{1}{3a}\sec^4\theta\csc\theta.$$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=\frac{1}{t},$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{t^3}.$$

12. 求曲线 $\begin{cases}x=2e^t\\ y=e^{-t}\end{cases}$ 在 $t=0$ 相应的点处的切线方程及法线方程.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-e^{-t}}{2e^t}=-\frac{1}{2e^{2t}},\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=-\frac{1}{2}.$

$t=0$ 对应的点为(2,1),故过点(2,1)的切线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-2),\quad 即\quad x+2y-4=0$$

法线方程为 $y-1=2(x-2)$, 即 $2x-y-3=0$.

13. 甲船以 6 km/h 的速率向东行驶,乙船以 8 km/h 的速率向南行驶. 在中

午十二点正，乙船位于甲船之北 16 km 处. 问下午一点正两船相离的速率为多少？

解 设从中午十二点正起，经过 t 小时，甲船与乙船的距离为

$$s=\sqrt{(16-8t)^2+(6t)^2},$$

故速率
$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{2(16-8t)\cdot(-8)+72t}{2\sqrt{(16-8t)^2+(6t)^2}}.$$

当 $t=1$ 时(即下午一点正)两船相离的速率为

$$v|_{t=1}=\frac{-128+72}{20}=-2.8(\mathrm{km/h})$$

14. 利用函数的微分代替函数的增量求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

解 利用 $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{1}{3}x$，取 $x=0.02$，

得 $\sqrt[3]{1.02}\approx 1+\frac{1}{3}\times(0.02)=1.007.$

15. 已知单摆的振动周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，其中 $g=980\ \mathrm{cm/s^2}$，l 为摆长(单位为 cm). 设原摆长为 20 cm，为使周期 T 增大 0.05 s，摆长约需加长多少？

解 由 $\mathrm{d}T=\frac{\pi}{\sqrt{gl}}\Delta l$，得

$$\Delta l=\frac{\sqrt{gl}}{\pi}\mathrm{d}T\approx\frac{\sqrt{gl}}{\pi}\Delta T.$$

故
$$\Delta l|_{l=20}\approx\frac{\sqrt{980\times 20}}{3.14}\times 0.05=2.23(\mathrm{cm}).$$

即摆长约需加长 2.23 cm.

第三章 微分中值定理与导数的应用

习题 3－1

1．验证罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上的正确性．

证 函数 $f(x)=\ln\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上连续，在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ 内可导，又 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\ln\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]=\ln\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\ln\left[\sin\frac{5\pi}{6}\right]=\ln\frac{1}{2}$ 即 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5}{6}\pi\right)$，故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上满足罗尔定理条件，由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，使 $f'(\xi)=0$．又，$f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$（$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$）．

取 $n=0$，得 $\xi=\frac{\pi}{2}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$．因此罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上是正确的．

2．验证拉格朗日中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0,1]$ 上的正确性．

证 函数 $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，从而至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{-2-(-2)}{1}=0.$$

又，$f'(\xi)=12\xi^2-10\xi+1=0$ 可知 $\xi=\frac{5\pm\sqrt{13}}{12}\in(0,1)$，因此拉格朗日中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0,1]$ 上是正确的．

3．对函数 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上验证柯西中值定理的正确性．

证 函数 $f(x)=\sin x$，$F(x)=x+\cos x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，在

$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内可导，且在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内 $F'(x)=1-\sin x\neq0$，故 $f(x)$、$F(x)$满足柯西中值定理条件，从而至少存在一点 $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使

$$\frac{F\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)},$$

由

$$\frac{1-0}{\frac{\pi}{2}-1}=\frac{\cos\xi}{1-\sin\xi},$$

可得 $\tan\frac{\xi}{2}=\frac{\pi-2}{2}$. 因 $0<\frac{\pi-2}{2}<1$，故 $\xi=2\arctan\left(\frac{\pi-2}{2}\right)\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 因此，柯西中值定理对 $f(x)=\sin x$，$F(x)=x+\cos x$ 在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上是正确的.

4. 试证明对函数 $y=px^2+qx+r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总是位于区间的正中间.

证 任取数值 a,b，不妨设 $a<b$，函数 $f(x)=px^2+qx+r$ 在区间$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，故由拉格朗日中值定理知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，

即

$$pb^2+qb+r-pa^2-qa-r=(2p\xi+q)(b-a).$$

经整理得 $\xi=\frac{a+b}{2}$. 即所求得的 ξ 总是位于区间的正中间.

5. 不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的区间.

解 函数 $f(x)$分别在$[1,2]$，$[2,3]$，$[3,4]$上连续，分别在$(1,2)$，$(2,3)$，$(3,4)$内可导，且 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$. 由罗尔定理知至少存在 $\xi_1\in(1,2)$，$\xi_2\in(2,3)$，$\xi_3\in(3,4)$，使

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0.$$

即方程 $f'(x)=0$ 至少有三个实根，又方程 $f'(x)=0$ 为三次方程，故它至多有三个实根，因此方程 $f'(x)=0$ 有且仅有三个实根，它们分别位于区间$(1,2)$，$(2,3)$，$(3,4)$内.

6. 证明恒等式：$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}(-1\leqslant x\leqslant1)$.

证 取函数 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$，$x\in[-1,1]$. 因 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\equiv0$，故 $f(x)\equiv C$. 取 $x=0$，得 $f(0)=C=\frac{\pi}{2}$.

因此 $$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},x\in[-1,1].$$

7. 若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一个正根 $x=x_0$，证明方程 $a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

证 取函数 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$. $f(x)$在$[0,x_0]$上连续，在$(0,x_0)$内可导，且 $f(0)=f(x_0)=0$，由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in(0,x_0)$，使 $f'(\xi)=0$，即方程 $a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

8. 若函数 $f(x)$在(a,b)内具有二阶导数，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$. 证明：在(x_1,x_3)内至少有一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$.

证 根据题意知函数 $f(x)$在$[x_1,x_2]$，$[x_2,x_3]$上连续，在(x_1,x_2)，(x_2,x_3)内可导且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，故由罗尔定理知至少存在点 $\xi_1\in(x_1,x_2)$，$\xi_2\in(x_2,x_3)$，使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，

又 $f'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上连续，在(ξ_1,ξ_2)内可导，故由罗尔定理知至少存在点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(x_1,x_2)$使 $f''(\xi)=0$.

9. 设 $a>b>0,n>1$，证明：
$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$$

证 取函数 $f(x)=x^n$，$f(x)$在$[b,a]$上连续，在(b,a)内可导，由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(b,a)$，使
$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),$$
即 $$a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b).$$
又 $0<b<\xi<a,n>1$ 故 $0<b^{n-1}<\xi^{n-1}<a^{n-1}$.

因此 $$nb^{n-1}(a-b)<n\xi^{n-1}(a-b)<na^{n-1}(a-b),$$
即 $$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$$

10. 设 $a>b>0$，证明：
$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}.$$

证 取 $f(x)=\ln x$，$f(x)$在$[b,a]$上连续，在(b,a)内可导，由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(b,a)$，使
$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),$$
即 $$\ln a-\ln b=\frac{1}{\xi}(a-b).$$
又，$0<b<\xi<a$，故 $0<\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{b}$，

因此 $$\frac{a-b}{a}<\frac{a-b}{\xi}<\frac{a-b}{b},$$

即 $$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}.$$

11. 证明下列不等式：

(1) $|\arctan a-\arctan b|\leqslant|a-b|$；

(2) 当 $x>1$ 时，$e^x>e\cdot x$.

证 (1) 当 $a=b$ 时，显然成立. 当 $a\neq b$ 时，取函数 $f(x)=\arctan x$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 或 $[b,a]$ 上连续，在 (a,b) 或 (b,a) 内可导，由拉格朗日中值定理知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 或 (b,a) 使 $f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b)$，

即 $$\arctan a-\arctan b=\frac{1}{1+\xi^2}(a-b),$$

故 $$|\arctan a-\arctan b|=\frac{1}{1+\xi^2}|a-b|\leqslant|a-b|.$$

(2) 取函数 $f(t)=e^t$，$f(t)$ 在 $[1,x]$ 上连续，在 $(1,x)$ 内可导. 由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(1,x)$，使

$$f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1),$$

即 $$e^x-e=e^{\xi}(x-1).$$

又，$1<\xi<x$，故 $e^{\xi}>e$，因此

$$e^x-e>e(x-1),$$

即 $$e^x>x\cdot e.$$

12. 证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

证 取函数 $f(x)=x^5+x-1$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=-1<0$，$f(1)=1>0$，由零点定理知至少存在点 $x_1\in(0,1)$ 使 $f(x_1)=0$，即方程 $x^5+x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个正根.

若方程 $x^5+x-1=0$ 还有一个正根 x_2，即 $f(x_2)=0$. 则由 $f(x)=x^5+x-1$ 在 $[x_1,x_2]$（或 $[x_2,x_1]$）上连续，在 (x_1,x_2)（或 (x_2,x_1)）内可导知 $f(x)$ 满足罗尔定理条件，故至少存在点 $\xi\in(x_1,x_2)$（或 (x_2,x_1)），使

$$f'(\xi)=0.$$

但 $f'(\xi)=5\xi^4+1>0$，矛盾. 因此方程 $x^5+x-1=0$ 只有一正根.

13. 设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明在 (a,b) 内有一点 ξ，使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b)\\ g(a) & g(b)\end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi)\\ g(a) & g'(\xi)\end{vmatrix}.$$

证 取 $F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(x)\\ g(a) & g(x)\end{vmatrix}$，由 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，由拉格朗日中值定理知至少

存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$.

即 $$F(b)=\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix},\quad F(a)=\begin{vmatrix} f(a) & f(a) \\ g(a) & g(a) \end{vmatrix}=0,$$

$$F'(x)=\begin{vmatrix} 0 & f(x) \\ 0 & g(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f(a) & f'(x) \\ g(a) & g'(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f(a) & f'(x) \\ g(a) & g'(x) \end{vmatrix},$$

故 $$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}(b-a).$$

14. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x)=f(x)$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)=e^x$.

证 取 $F(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，因 $F'(x)=\dfrac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}=0$，

故 $F(x)=C$. 又 $F(0)=C=f(0)=1$，因此 $F(x)=1$. 即 $\dfrac{f(x)}{e^x}=1$，

故 $f(x)=e^x$.

15. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有 n 阶导数，且 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，试用柯西中值定理证明：

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!},(0<\theta<1).$$

证 已知 $f(x)$ 在某邻域内具有 n 阶导数，在该邻域内任取点 x，由柯西中值定理得

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f(x)-f(0)}{x^n-0^n}=\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}},\text{其中 } \xi_1 \text{ 介于 } 0,x \text{ 之间.}$$

又 $$\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{n(\xi_1^{n-1}-0^{n-1})}=\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}},\text{其中 } \xi_2 \text{ 介于 } 0,\xi_1 \text{ 之间.}$$

依次类推，得

$$\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!\ \xi_{n-1}}=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{n!\ (\xi_{n-1}-0)}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!},\text{其中 } \xi_n \text{ 介于 } 0,\xi_{n-1} \text{ 之间.}$$

因此 $$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!},(0<\theta<1).$$

习 题 3-2

1. 用洛必达法则求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}\ (a\neq 0)$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$；　　(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$；

(11) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$；　　(12) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\mathrm{e}^{1/x^2}$；

(13) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$；　　(14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$；

(15) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$；　　(16) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\cos x}=\dfrac{2}{1}=2$.

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x}{1}=\cos a$.

(4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{3\cos 3x}{5\sec^2 5x}=-\dfrac{3}{5}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{2(\pi-2x)\cdot(-2)}=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cot x}{4(\pi-2x)}$

$=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\csc^2 x}{-8}=-\dfrac{1}{8}$.

(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\dfrac{m}{n}a^{m-n}\ (a\neq 0)$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{\tan 7x}\cdot\sec^2 7x\cdot 7}{\frac{1}{\tan 2x}\sec^2 2x\cdot 2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan 2x}{\tan 7x}\cdot\dfrac{\sec^2 7x}{\sec^2 2x}\cdot\dfrac{7}{2}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{7x}\cdot\dfrac{\sec^2 7x}{\sec^2 2x}\cdot\dfrac{7}{2}=1$.

(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-6\cos 3x\sin 3x}{-6\cos x\sin x}$

$=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\cos x}=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-3\sin 3x}{-\sin x}=3$.

$$(9)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x+x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x}+1}=1.$$

$$(10)\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\sec x\tan x+\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\cdot\frac{2}{1+x^2}=1.$$

$$(11)\ \lim_{x\to0}x\cot 2x=\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan 2x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2\sec^2 2x}=\frac{1}{2}.$$

$$(12)\ \lim_{x\to0}x^2e^{1/x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^{1/x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{e^{1/x^2}\left(\frac{1}{x^2}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=\lim_{x\to0}e^{1/x^2}=+\infty.$$

$$(13)\ \lim_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{-x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

$$(14)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}}\left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{1+\frac{a}{x}}}=e^a.$$

$$(15)\ \lim_{x\to0^+}x^{\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}(-x)}=e^0=1.$$

$$(16)\ \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\tan x\ln\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{-\ln x}{\frac{1}{x}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x}=e^0=1.$$

注　在用洛必达法则求极限时，除了注意用洛必达法则对极限类型等的要求以外，还要注意求极限的过程中合理地应用重要极限、等价无穷小、初等变换等方法，以使运算过程更快捷、简洁.

2．验证极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$存在，但不能用洛必达法则得出．

证　由于$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$不存在，故不能使用洛必达法则来求此极限，但并不表明此极限不存在，此极限可用以下方法求得：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1+0=1.$$

3．验证极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$存在，但不能用洛必达法则得出．

证　由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$不存在，故不能使用洛必达法则来求此极限，但可用以下方法求此极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=1\cdot 0=0$$

4．讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\leqslant 0\end{cases}$$

在点$x=0$处的连续性．

解　$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}-\frac{1}{2(1+x)}}=e^{-\frac{1}{2}},$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}e^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}},\ f(0)=e^{-\frac{1}{2}}.$$

因为$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$，故函数$f(x)$在$x=0$处连续．

习　题　3－3

1．按$(x-4)$的幂展开多项式$f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$．

解　因为$f'(x)=4x^3-15x^2+2x-3$，$f''(x)=12x^2-30x+2$，

$f'''(x)=24x-30$，$f^{(4)}(x)=24$，$f^{(n)}(x)=0(n\geqslant 5)$．

$$f(4)=-56, f'(4)=21, f''(4)=74, f'''(4)=66, f^{(4)}(4)=24,$$

故 $\quad x^4-5x^3+x^2-3x+4$

$$=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f^{(4)}(4)}{4!}(x-4)^4$$

$$=-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4.$$

2. 应用麦克劳林公式，按 x 的幂展开函数 $f(x)=(x^2-3x+1)^3$.

解 $f(x)=x^6-9x^5+30x^4-45x^3+30x^2-9x+1,\quad f(0)=1,$

$f'(x)=6x^5-45x^4+120x^3-135x^2+60x-9,\quad f'(0)=-9,$

$f''(x)=30x^4-180x^3+360x^2-270x+60,\quad f''(0)=60,$

$f'''(x)=120x^3-540x^2+720x-270,\quad f'''(0)=-270,$

$f^{(4)}(x)=360x^2-1\,080x+720,\quad f^{(4)}(0)=720,$

$f^{(5)}(x)=720x-1\,080,\quad f^{(5)}(0)=-1\,080,$

$f^{(6)}(x)=720,\quad f^{(6)}(0)=720,$

$f^{(n)}(x)=0\quad(n\geqslant 7),$

故 $\quad(x^2-3x+1)^3$

$$=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+\frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6$$

$$=1-9x+30x^2-45x^3+30x^4-9x^5+x^6.$$

3. 求函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 按 $(x-4)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的 3 阶泰勒公式.

解 因为 $f(x)=\sqrt{x}, f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}, f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}},$

$f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$. $f(4)=2, f'(4)=\frac{1}{4}, f''(4)=-\frac{1}{32}, f'''(4)=\frac{3}{256}.$

故 $\quad\sqrt{x}=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-4)^4$

$=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3-\frac{15}{384\xi^{7/2}}(x-4)^4$，其中 ξ 介于 x 与 4 之间.

4. 求函数 $f(x)=\ln x$ 按 $(x-2)$ 的幂展开的带有佩亚诺型余项的 n 阶泰勒公式.

解 因为 $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, f^{(n)}(2)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n},$

故 $\quad\ln x=f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3+\cdots+$

$$\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+o[(x-2)^n]$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{2^3}(x-2)^2 + \frac{1}{3\cdot 2^3}(x-2)^3 + \cdots +$$

$$(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}(x-2)^n + o[(x-2)^n].$$

5．求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式．

解 因为 $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$，$f^{(n)}(-1)=-n!$，

故 $\frac{1}{x}=f(-1)+f'(-1)(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3+\cdots+$

$$\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x+1)^{n+1}$$

$=-[1+(x+1)+(x+1)^2+\cdots+(x+1)^n]+(-1)^{n+1}\xi^{-(n+2)}(x+1)^{n+1}$，其中 ξ 介于 x 与 -1 之间．

6．求函数 $f(x)=\tan x$ 的带有拉格朗日型余项的 3 阶麦克劳林公式．

解 因为 $f(x)=\tan x$，$f'(x)=\sec^2 x$，$f''(x)=2\sec^2 x\tan x$，

$$f'''(x)=4\sec^2 x\tan^2 x+2\sec^4 x,$$

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= 8\sec^2 x\tan^3 x+8\sec^4 x\tan x+8\sec^4 x\tan x \\ &= 8\sec^2 x\tan^3 x+16\sec^4 x\tan x \\ &= \frac{8(\sin^2 x+2)\sin x}{\cos^5 x}, \end{aligned}$$

$$f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=0,f'''(0)=2,$$

故
$$\begin{aligned} \tan x &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 \\ &= x+\frac{1}{3}x^3+\frac{(\sin^2\xi+2)\sin\xi}{3\cos^5\xi}x^4, \end{aligned}$$
其中 ξ 介于 $0,x$ 之间．

7．求函数 $f(x)=xe^x$ 的带有佩亚诺型余项的 n 阶麦克劳林公式．

解 因为 $f(x)=xe^x$，$f^{(n)}(x)=(n+x)e^x$（见习题 2－3，8(4)），$f^{(n)}(0)=n$，故

$$\begin{aligned} xe^x &= f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+o(x^n) \\ &= x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+o(x^n). \end{aligned}$$

8．验证当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，按公式 $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时，所产生的误差小于 0.01，并求 $\sqrt{e}$ 的近似值，使误差小于 0.01．

证 设 $f(x)=e^x$，则 $f^{(n)}(0)=1$，故 $f(x)=e^x$ 的三阶麦克劳林公式为 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{e^\xi}{4!}x^4$，其中 ξ 介于 $0,x$ 之间. 按 $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时，其误差为

$$|R_3(x)|=\frac{e^\xi}{4!}x^4.$$

当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$0<\xi<\frac{1}{2}$，$|R_3(x)|\leqslant\frac{3^{\frac{1}{2}}}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\approx 0.004\,5<0.01$，

$$\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3\approx 1.645.$$

9. 应用三阶泰勒公式求下列各数的近似值，并估计误差：

(1) $\sqrt[3]{30}$； (2) $\sin 18^\circ$.

解 (1) 因为 $f(x)=\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}$

$$\approx 1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3$$ (见教材上册第 142 页)

$$=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3,\ R_3(x)=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}(1+\xi)^{\frac{1}{3}-4}x^4,$$

其中 ξ 介于 $0,x$ 之间.

故 $\sqrt[3]{30}=\sqrt[3]{27+3}=3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}}\approx 3\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^2+\frac{5}{81}\left(\frac{1}{9}\right)^3\right]\approx 3.107\,24$

误差 $|R_3|=3\cdot\left|\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}(1+\xi)^{\frac{1}{3}-4}\left(\frac{1}{9}\right)^4\right|$，$\xi$ 介于 0 与 $\frac{1}{9}$ 之间，即 $0<\xi<\frac{1}{9}$，因此

$$|R_3|=\left|\frac{80}{4!\cdot 3^{11}}\right|\approx 1.88\times 10^{-5}$$

(2) 已知 $\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}$，$R_4(x)=\frac{\sin\left(\xi+\frac{5}{2}\pi\right)}{5!}x^5$，$\xi$ 介于 0 与 $\frac{\pi}{10}$ 之间.（见教材上册第 141 页），故

$$\sin 18^\circ=\sin\frac{\pi}{10}\approx\frac{\pi}{10}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3\approx 0.309\,0,\ |R_4|\leqslant\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5\approx 2.55\times 10^{-5}.$$

注 利用 $R_3(x)=\frac{\sin\left(\xi+\frac{4}{2}\pi\right)}{4!}x^4$，$\xi\in\left(0,\frac{\pi}{10}\right)$，可得

误差 $|R_3|\leqslant\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4\approx1.3\times10^{-4}$.

10. 利用泰勒公式求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{2}+\frac{o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]=\frac{3}{2}.$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-1-\left(-\frac{x^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)}{x^2\left[x+\left(-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\right]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^4)}{x^4}}=\frac{-\frac{1}{12}}{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}.$$

(3) $$\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right)}{\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-1-x^2+o(x^2)\right][x^2+o(x^2)]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{8}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{3}{2}+\frac{o(x^4)}{x^4}}=\frac{\frac{1}{8}}{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{12}.$$

习 题 3－4

1. 判定函数 $f(x)=\arctan x-x$ 的单调性.

解 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1=-\frac{x^2}{1+x^2}\leqslant0$ 且 $f'(x)=0$ 仅在 $x=0$ 时成立. 因

此函数 $f(x)=\arctan x-x$ 在$(-\infty,+\infty)$内单调减少.

2. 判定函数 $f(x)=x+\cos x(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$的单调性.

解 $f'(x)=1-\sin x\geqslant 0$ 且 $f'(x)=0$ 仅在 $x=\dfrac{\pi}{2}$时成立,因此函数 $f(x)=x+\cos x$ 在$[0,2\pi]$上单调增加.

3. 确定下列函数的单调区间:

(1) $y=2x^3-6x^2-18x-7$;　　(2) $y=2x+\dfrac{8}{x}\quad(x>0)$;

(3) $y=\dfrac{10}{4x^3-9x^2+6x}$;　　(4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(5) $y=(x-1)(x+1)^3$;　　(6) $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}\quad(a>0)$;

(7) $y=x^n e^{-x}\quad(n>0,x\geqslant 0)$;　(8) $y=x+|\sin 2x|$.

解 (1) 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,在$(-\infty,+\infty)$内可导,且

$$y'=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1).$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-1,x_2=3$,这两个驻点把$(-\infty,+\infty)$分成三个部分区间$(-\infty,-1),(-1,3),(3,+\infty)$.

当$-\infty<x<-1$ 及 $3<x<+\infty$时,$y'>0$,因此函数在$(-\infty,-1]$、$[3,+\infty)$内单调增加,当$-1<x<3$时,$y'<0$,因此函数在$[-1,3]$上单调减少.

(2) 函数的定义域为$(0,+\infty)$,在$(0,+\infty)$内可导,且

$$y'=2-\frac{8}{x^2}=\frac{2x^2-8}{x^2}=\frac{2(x-2)(x+2)}{x^2}.$$

令 $y'=0$,得驻点 $x_1=-2$(舍去),$x_2=2$.它把$(0,+\infty)$分成二个部分区间$(0,2),(2,+\infty)$.

当$0<x<2$时,$y'<0$,因此函数在$(0,2]$内单调减少,

当$2<x<+\infty$时,$y'>0$,因此函数在$[2,+\infty)$内单调增加.

(3) 函数除 $x=0$ 外处处可导,且

$$y'=\frac{-10(12x^2-18x+6)}{(4x^3-9x^2+6x)^2}=-\frac{120\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{(4x^3-9x^2+6x)^2}.$$

令$y'=0$,得驻点 $x_1=\dfrac{1}{2}$,$x_2=1$.这两个驻点及点 $x=0$ 把区间$(-\infty,+\infty)$分成四个部分区间$(-\infty,0)$,$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$,$(1,+\infty)$.

当$-\infty<x<0,0<x<\dfrac{1}{2},1<x<+\infty$时,$y'<0$,因此函数在$(-\infty,0)$,$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$,$[1,+\infty)$内单调减少.

当$\frac{1}{2}<x<1$时，$y'>0$，因此函数在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上单调增加.

(4) 函数在$(-\infty,+\infty)$内可导，且 $y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$，因此函数在$(-\infty,+\infty)$内单调增加.

(5) 函数在$(-\infty,+\infty)$内可导，且 $y'=(x+1)^3+(x-1)\cdot 3(x+1)^2$

$=(x+1)^2(4x-2)=4(x+1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

令 $y'=0$，得驻点 $x_1=-1$，$x_2=\frac{1}{2}$，这两个驻点把区间$(-\infty,+\infty)$分成三个部分区间$(-\infty,-1)$，$\left(-1,\frac{1}{2}\right)$及$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

当$-\infty<x<-1$及$-1<x<\frac{1}{2}$时，$y'<0$，因此函数在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$内单调减少，

当$\frac{1}{2}<x<+\infty$时，$y'>0$，因此函数在$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$内单调增加.

(6) 函数在$\left(-\infty,\frac{a}{2}\right)$，$\left(\frac{a}{2},a\right)$，$(a,+\infty)$内可导，当 $x_1=\frac{a}{2}$，$x_2=a$ 时函数不可导，$y'=\frac{-6\left(x-\frac{2a}{3}\right)}{3\sqrt[3]{(2x-a)^2(a-x)}}$.

令 $y'=0$ 得驻点 $x_3=\frac{2a}{3}$，这个驻点及 $x_1=\frac{a}{2}$，$x_2=a$ 把区间$(-\infty,+\infty)$分成四个部分区间$\left(-\infty,\frac{a}{2}\right)$，$\left(\frac{a}{2},\frac{2}{3}a\right)$，$\left(\frac{2}{3}a,a\right)$，$(a,+\infty)$.

当$-\infty<x<\frac{a}{2}$及$\frac{a}{2}<x<\frac{2}{3}a$，$a<x<+\infty$时 $y'>0$，因此函数在$\left(-\infty,\frac{2}{3}a\right]$，$[a,+\infty)$内单调增加；

当$\frac{2a}{3}<x<a$ 时 $y'<0$，因此函数在$\left[\frac{2}{3}a,a\right]$单调减少.

(7) 函数在$[0,+\infty)$内可导，且 $y'=nx^{n-1}e^{-x}-x^ne^{-x}=x^{n-1}e^{-x}(n-x)$.

令 $y'=0$，得驻点 $x_1=n$，这个驻点把区间$[0,+\infty)$分成两个部分区间$[0,n]$，$[n,+\infty)$.

当 $0<x<n$ 时，$y'>0$，因此函数在$[0,n]$上单调增加，

当 $n<x<+\infty$时，$y'<0$，因此函数在$[n,+\infty)$内单调减少.

(8) 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且

$$y=\begin{cases} x+\sin 2x, & n\pi\leqslant x\leqslant n\pi+\dfrac{\pi}{2}, \\ x-\sin 2x, & n\pi+\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant(n+1)\pi, \end{cases} \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

$$y'=\begin{cases} 1+2\cos 2x, & n\pi<x<n\pi+\dfrac{\pi}{2}, \\ 1-2\cos 2x, & n\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<(n+1)\pi, \end{cases} \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{3}$ 及 $x=n\pi+\dfrac{5\pi}{6}$，按照这些驻点将区间$(-\infty,+\infty)$分成下列部分区间

$$\left(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{3}\right),\left(n\pi+\frac{\pi}{3},n\pi+\frac{\pi}{2}\right),\left(n\pi+\frac{\pi}{2},n\pi+\frac{5\pi}{6}\right),\left(n\pi+\frac{5\pi}{6},(n+1)\pi\right)$$
$$(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

当 $n\pi<x<n\pi+\dfrac{\pi}{3}$时，$y'>0$，因此函数在该区间内单调增加，

当 $n\pi+\dfrac{\pi}{3}<x<n\pi+\dfrac{\pi}{2}$时，$y'<0$，因此函数在该区间内单调减少，

当 $n\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<n\pi+\dfrac{5\pi}{6}$时，$y'>0$，因此函数在该区间内单调增加，

当 $n\pi+\dfrac{5\pi}{6}<x<(n+1)\pi$ 时，$y'<0$，因此函数在该区间内单调减少.

综上可知，函数在$\left[\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right]$上单调增加，

在$\left[\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3},\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调减少$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

4. 证明下列不等式：

(1) 当 $x>0$ 时，$1+\dfrac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$；

(2) 当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$；

(3) 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$\sin x+\tan x>2x$；

(4) 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$\tan x>x+\dfrac{1}{3}x^3$；

(5) 当 $x>4$ 时，$2^x>x^2$.

解 (1) 取 $f(t)=1+\dfrac{1}{2}t-\sqrt{1+t}$，$t\in[0,x]$.

$$f'(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+t}}=\frac{\sqrt{1+t}-1}{2\sqrt{1+t}}>0,\quad t\in(0,x).$$

因此,函数 $f(t)$在$[0,x]$上单调增加,故当 $x>0$ 时,$f(x)>f(0)$.

即
$$1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}>1+\frac{1}{2}\cdot 0-\sqrt{1+0}=0,$$

亦即
$$1+\frac{x}{2}>\sqrt{1+x}\quad (x>0).$$

(2) 取 $f(t)=1+t\ln(t+\sqrt{1+t^2})-\sqrt{1+t^2},t\in[0,x]$.

$$f'(t)=\ln(t+\sqrt{1+t^2})+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=\ln(t+\sqrt{1+t^2})>0,t\in(0,x).$$

因此,函数 $f(t)$在$[0,x]$上单调增加,故当 $x>0$ 时,$f(x)>f(0)$,即

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}>1+0-1=0,$$

亦即
$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}\quad (x>0).$$

(3) 取 $f(x)=\sin x+\tan x-2x,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

$$f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2,\quad f''(x)=-\sin x+2\sec^2 x\tan x$$
$$=\sin x(2\sec^3 x-1)>0,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

因此,$f'(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调增加,故当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$f'(x)>f'(0)=0$,从而 $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调增加,即 $f(x)>f(0)=0$,

亦即
$$\sin x+\tan x-2x>0,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

所以
$$\sin x+\tan x>2x,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

(4) 取 $f(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x^3,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

$$f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x-x^2=(\tan x-x)(\tan x+x).$$

由 $g'(x)=(\tan x-x)'=\sec^2 x-1=\tan^2 x>0$ 知 $g(x)=\tan x-x$ 在$(0,x)$内单调增加,即 $g(x)=\tan x-x>g(0)=0$.

故 $f'(x)>0,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.从而 $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加,因此 $f(x)>f(0),x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.即当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时,$\tan x-x-\frac{1}{3}x^3>0$.

从而
$$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3\quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

(5) 取 $f(t)=t\ln 2-2\ln t, t\in(4,x)$.

$$f'(t)=\ln 2-\frac{2}{t}=\frac{\ln 4}{2}-\frac{2}{x}>\frac{\ln e}{2}-\frac{2}{4}=0,$$

故当 $x>4$ 时，$f(x)$单调增加，从而 $f(x)>f(4)=0$，即

$$x\ln 2-2\ln x>0,$$

亦即
$$2^x>x^2 (x>4).$$

5. 讨论方程 $\ln x=ax$(其中 $a>0$)有几个实根？

解 取函数 $f(x)=\ln x-ax, x\in(0,+\infty)$. $f'(x)=\frac{1}{x}-a$.

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=\frac{1}{a}$，

当 $0<x<\frac{1}{a}$时，$f'(x)>0$，因此函数 $f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$内单调增加，

当$\frac{1}{a}<x<+\infty$时，$f'(x)<0$，因此函数 $f(x)$在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$内单调减少.

从而 $f\left(\frac{1}{a}\right)$为最大值，又 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，故

当 $f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1=0$ 即 $a=\frac{1}{e}$时，曲线 $y=\ln x-ax$ 与x 轴仅有一个交点，这时，原方程有惟一实根.

当 $f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1>0$，即 $0<a<\frac{1}{e}$时，曲线 $y=\ln x-ax$ 与 x 轴有两个交点. 这时原方程有两个实根.

当 $f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1<0$，即 $a>\frac{1}{e}$时，曲线 $y=\ln x-ax$ 与 x 轴没有交点，这时原方程没有实根.

6. 单调函数的导函数是否必为单调函数？研究下面这个例子：

$$f(x)=x+\sin x.$$

解 单调函数的导函数不一定是单调函数. 例如函数 $f(x)=x+\sin x$，由于 $f'(x)=1+\cos x\geqslant 0$，且 $f'(x)$在任何有限区间内只有有限个零点. 因此函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内为单调增加函数. 但它的导函数 $f'(x)=1+\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内却不是单调函数.

7. 判定下列曲线的凹凸性：

(1) $y=4x-x^2$； (2) $y=\operatorname{sh} x$；

(3) $y=x+\frac{1}{x}\quad(x>0)$； (4) $y=x\arctan x$.

解 (1) $y'=4-2x, y''=-2<0$. 故曲线 $y=4x-x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$是凸的.

(2) $y'=\text{ch } x, y''=\text{sh } x$，令 $y''=0$ 得 $x=0$.

当 $-\infty<x<0$ 时，$y''<0$，曲线 $y=\sin x$ 在$(-\infty,0]$内是凸的.

当 $0<x<+\infty$时，$y''>0$，曲线 $y=\sin x$ 在$[0,+\infty)$内是凹的.

(3) $y'=1-\dfrac{1}{x^2}, y''=\dfrac{2}{x^3}>0(x>0)$，故曲线 $y=x+\dfrac{1}{x}(x>0)$是凹的.

(4) $y'=\arctan x+\dfrac{x}{1+x^2}, y''=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2}{(1+x^2)^2}>0$，故曲线 $y=x\arctan x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是凹的.

8. 求下列函数图形的拐点及凹或凸的区间：

(1) $y=x^3-5x^2+3x+5$；　　(2) $y=xe^{-x}$；

(3) $y=(x+1)^4+e^x$；　　(4) $y=\ln(x^2+1)$；

(5) $y=e^{\arctan x}$；　　(6) $y=x^4(12\ln x-7)$.

解　(1) $y'=3x^2-10x+3, y''=6x-10$，令 $y''=0$ 得 $x=\dfrac{5}{3}$，

当 $-\infty<x<\dfrac{5}{3}$时，$y''<0$，因此曲线在$\left(-\infty,\dfrac{5}{3}\right]$是凸的，

当$\dfrac{5}{3}<x<+\infty$时，$y''>0$，因此曲线在$\left[\dfrac{5}{3},+\infty\right)$是凹的，

故点$\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{20}{27}\right)$为拐点，

(2) $y'=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}, y''=-e^{-x}+(1-x)(-e^{-x})=e^{-x}(x-2)$，

令 $y''=0$，得 $x=2$，

当 $-\infty<x<2$ 时，$y''<0$，因此曲线在$(-\infty,2]$内是凸的，

当 $2<x<+\infty$时，$y''>0$，因此曲线在$(2,+\infty)$内是凹的，

故点$\left(2,\dfrac{2}{e^2}\right)$为拐点.

(3) $y'=4(x+1)^3+e^x, y''=12(x+1)^2+e^x>0$，因此曲线在$(-\infty,+\infty)$内是凹的，曲线没有拐点.

(4) $y'=\dfrac{2x}{x^2+1}, y''=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$.

令 $y''=0$，得 $x_1=-1, x_2=1$.

当 $-\infty<x<-1$ 时，$y''<0$，因此曲线在$(-\infty,-1]$内是凸的，

当 $-1<x<1$ 时，$y''>0$，因此曲线在$[-1,1]$内是凹的，

当 $1<x<+\infty$时，$y''<0$，因此曲线在$[1,+\infty)$内是凸的，

曲线有二个拐点，分别为$(-1,\ln 2),(1,\ln 2)$.

(5) $y'=e^{\arctan x}\dfrac{1}{1+x^2}, y''=\dfrac{-2e^{\arctan x}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}{(1+x^2)^2}$，令 $y''=0$，得 $x=\dfrac{1}{2}$.

当$-\infty < x < \frac{1}{2}$时，$y'' > 0$，因此曲线在$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$内是凹的，

当$\frac{1}{2} < x < +\infty$时，$y'' < 0$，因此曲线在$\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$内是凸的. 故点$\left(\frac{1}{2}, e^{\arctan\frac{1}{2}}\right)$为拐点.

(6) $y' = 4x^3(12\ln x - 7) + x^4 \cdot 12\frac{1}{x} = 4x^3(12\ln x - 4)$,

$y'' = 12x^2(12\ln x - 4) + 4x^3 \cdot 12\frac{1}{x} = 144x^2\ln x\,(x > 0)$.

令 $y'' = 0$，得 $x = 1$.

当$0 < x < 1$时，$y'' < 0$，因此曲线在$(0,1]$内是凸的，

当$1 < x < +\infty$时，$y'' > 0$，因此曲线在$[1, +\infty)$内是凹的，故点$(1, -7)$为拐点.

9. 利用函数图形的凹凸性，证明下列不等式：

(1) $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x > 0, y > 0, x \neq y; n > 1)$;

(2) $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}\,(x \neq y)$;

(3) $x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}\,(x > 0, y > 0, x \neq y)$.

证 (1) 取函数 $f(t) = t^n, t \in (0, +\infty)$.

$$f'(t) = nt^{n-1}, f''(t) = n(n-1)t^{n-2}, t \in (0, +\infty).$$

当 $n > 1$ 时，$f''(t) > 0, t \in (0, +\infty)$. 因此函数 $f(t) = t^n$ 在$(0, +\infty)$内图形是凹的，故对任何 $x > 0, y > 0, x \neq y$，恒有

$$\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

即
$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1).$$

(2) 取 $f(t) = e^t, t \in (-\infty, +\infty)$. $f'(t) = e^t, f''(t) = e^t > 0, t \in (-\infty, +\infty)$. 因此函数 $f(t) = e^t$ 在$(-\infty, +\infty)$内图形是凹的，故对任何 $x, y \in (-\infty, +\infty), x \neq y$. 恒有$\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f\left(\frac{x+y}{2}\right)$,

即
$$\frac{1}{2}(e^x + e^y) > e^{\frac{x+y}{2}}\,(x \neq y).$$

(3) 取 $f(t) = t\ln t, t \in (0, +\infty), f'(t) = \ln t + 1, f''(t) = \frac{1}{t} > 0, t \in (0, +\infty)$，因此函数 $f(t) = t\ln t$ 在$(0, +\infty)$内图形是凹的，故对任何 $x, y \in (0,$

$+\infty)$，$x\neq y$，恒有$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right)$，即

$$\frac{1}{2}(x\ln x+y\ln y)>\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2},$$

亦即
$$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}\ (x\neq y).$$

10．试证明曲线 $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ 有三个拐点位于同一直线上．

证 $y'=\frac{(x^2+1)-2x(x-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$，

$$y''=\frac{(-2x+2)(x^2+1)^2-2(x^2+1)\cdot 2x(-x^2+2x+1)}{(x^2+1)^4}=\frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3}$$

$$=\frac{2(x+1)[x-(2-\sqrt{3})][x-(2+\sqrt{3})]}{(x^2+1)^3}.$$

令 $y''=0$，得 $x_1=-1$，$x_2=2-\sqrt{3}$，$x_3=2+\sqrt{3}$．

当 $-\infty<x<-1$ 时，$y''<0$，因此曲线在$(-\infty,-1]$内是凸的，

当 $-1<x<2-\sqrt{3}$时，$y''>0$，因此曲线在$[-1,2-\sqrt{3}]$内是凹的，

当 $2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$时，$y''<0$，因此曲线在$[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$内是凸的，

当 $2+\sqrt{3}<x<+\infty$时，$y''>0$，因此曲线在$[2+\sqrt{3},+\infty)$内是凹的，

故曲线有三个拐点，分别为$(-1,-1)$，$\left(2-\sqrt{3},\frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}\right)$，$\left(2+\sqrt{3},\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}\right)$．

由于$\dfrac{\frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}-(-1)}{2-\sqrt{3}-(-1)}=\dfrac{\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}-(-1)}{2+\sqrt{3}-(-1)}=\frac{1}{4}$，故这三个拐点在一条直线上．

11．问 a、b 为何值时，点$(1,3)$为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点？

解 $y'=3ax^2+2bx$，$y''=6ax+2b=6a\left(x+\frac{b}{3a}\right)$．

令 $y''=0$，得 $x_0=-\frac{b}{3a}$．当 $-\infty<x<-\frac{b}{3a}$ 时，$y''<0$，因此曲线在$\left(-\infty,-\frac{b}{3a}\right]$内是凸的；当 $-\frac{b}{3a}<x<+\infty$ 时，$y''>0$．因此曲线在$\left[-\frac{b}{3a},+\infty\right)$内是凹的；当 $x_0=-\frac{b}{3a}$时，$y_0=a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2=\frac{2b^3}{27a^2}$．

由于 y''在 x_0 的两侧变号，故点$\left(-\frac{b}{3a},\frac{2b^3}{27a^2}\right)$为曲线的惟一拐点．

从而要使点(1,3)为拐点,则$\begin{cases}\dfrac{b}{3a}=1,\\ \dfrac{2b^3}{27a^2}=3.\end{cases}$ 解得 $a=-\dfrac{3}{2}, b=\dfrac{9}{2}$.

12. 试决定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a、b、c、d,使得 $x=-2$ 处曲线有水平切线,$(1,-10)$为拐点,且点$(-2,44)$在曲线上.

解 $y'=3ax^2+2bx+c, y''=6ax+2b$.

根据题意有 $y(-2)=44, y'(-2)=0, y(1)=-10, y''(1)=0$.

即

$$\begin{cases}-8a+4b-2c+d=44,\\ 12a-4b+c=0,\\ a+b+c+d=-10,\\ 6a+2b=0.\end{cases}$$

解此方程组得 $a=1, b=-3, c=-24, d=16$.

13. 试决定 $y=k(x^2-3)^2$ 中 k 的值,使曲线的拐点处的法线通过原点.

解 $y'=2k(x^2-3)\cdot(2x)=4kx(x^2-3), y''=4k(x^2-3)+4kx\cdot(2x)=12k(x-1)(x+1)$. 令 $y''=0$,得 $x_1=-1, x_2=1$.

当 $-\infty<x<-1$ 时,$y''>0$,因此曲线在$(-\infty,-1]$内是凹的,

当 $-1<x<1$ 时,$y''<0$,因此曲线在$[-1,1]$上是凸的,

当 $1<x<+\infty$ 时,$y''>0$,因此曲线在$[1,+\infty)$内是凹的,

从而知$(-1,4k)$,$(1,4k)$为曲线的拐点.

由 $y'|_{x=-1}=8k$ 知过点$(-1,4k)$的法线方程为

$$Y-4k=-\frac{1}{8k}(X+1)$$

要使该法线过原点,则(0,0)应满足这方程,将 $X=0$, $Y=0$ 代入上式,得

$$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

由 $y'|_{x=1}=-8k$ 知过点$(1,4k)$的法线方程为

$$Y-4k=\frac{1}{8k}(X-1).$$

同理,要使该法线过原点,故将 $X=0$, $Y=0$ 代入上式得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

所以,当 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$时,该曲线的拐点处的法线通过原点.

14. 设 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导数,如果 $f''(x_0)=0$,而 $f'''(x_0)\neq0$,试问$(x_0,f(x_0))$是否为拐点? 为什么?

解 已知 $f'''(x_0)\neq0$,不妨设 $f'''(x_0)>0$,由于 $f'''(x)$在 $x=x_0$ 的某个邻

域内连续，因此必存在 $\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时 $f'''(x)>0$，故在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内 $f''(x)$ 单调增加. 又已知 $f''(x_0)=0$，从而当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f''(x)<f''(x_0)=0$，即函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内的图形是凸的，当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f''(x)>f''(x_0)=0$，即函数 $f(x)$ 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内的图形是凹的，所以点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线的拐点.

习 题 3-5

1. 求下列函数的极值：

(1) $y=2x^3-6x^2-18x+7$；　(2) $y=x-\ln(1+x)$；

(3) $y=-x^4+2x^2$；　(4) $y=x+\sqrt{1-x}$；

(5) $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$；　(6) $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$；

(7) $y=e^x\cos x$；　(8) $y=x^{\frac{1}{x}}$；

(9) $y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$；　(10) $y=x+\tan x$.

解 (1) $y'=6x^2-12x-18,y''=12x-12$.

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-1,x_2=3$.

由 $y''|_{x=-1}=-24<0$ 知 $y|_{x=-1}=17$ 为极大值，由 $y''|_{x=3}=24>0$ 知 $y|_{x=3}=-47$ 为极小值.

(2) 函数的定义域为 $(-1,+\infty)$，在 $(-1,+\infty)$ 内可导，且

$$y'=1-\frac{1}{1+x},y''=\frac{1}{(1+x)^2}\ (x>-1).$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x=0$. 由 $y''|_{x=0}=1>0$ 知 $y|_{x=0}=0$ 为极小值.

(3) $y'=-4x^3+4x=-4x(x^2-1),y''=-12x^2+4$.

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-1,x_2=1,x_3=0$.

由 $y''|_{x=-1}=-8<0$ 知 $y|_{x=-1}=1$ 为极大值，由 $y''|_{x=1}=-8<0$ 知 $y|_{x=1}=1$ 为极大值，由 $y''|_{x=0}=4>0$ 知 $y|_{x=0}=0$ 为极小值.

(4) 函数的定义域为 $(-\infty,1]$，在 $(-\infty,-1)$ 内可导，且

$$y'=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}},y''=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1-x)^{3/2}}.$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x=\dfrac{3}{4}$，由 $y''|_{x=\frac{3}{4}}=-2<0$ 知 $y|_{x=\frac{3}{4}}=\dfrac{5}{4}$ 为极大值.

(5) $$y'=\frac{3\sqrt{4+5x^2}-(1+3x)\cdot\dfrac{10x}{2\sqrt{4+5x^2}}}{4+5x^2}=\frac{12-5x}{(4+5x^2)^{3/2}}=\frac{-5\left(x-\dfrac{12}{5}\right)}{(4+5x^2)^{3/2}}.$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x=\frac{12}{5}$.

当 $-\infty<x<\frac{12}{5}$ 时，$y'>0$，因此函数在 $\left(-\infty,\frac{12}{5}\right]$ 内单调增加；当 $\frac{12}{5}<x<+\infty$ 时 $y'<0$，因此函数在 $\left[\frac{12}{5},+\infty\right)$ 内单调减少，从而 $y\left(\frac{12}{5}\right)=\frac{\sqrt{205}}{10}$ 为极大值.

(6) $y'=\frac{(6x+4)(x^2+x+1)-(2x+1)(3x^2+4x+4)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$.

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-2, x_2=0$.

当 $-\infty<x<-2$ 时，$y'<0$. 因此函数在 $(-\infty,-2]$ 内单调减少；当 $-2<x<0$ 时 $y'>0$，因此函数在 $[-2,0]$ 上单调增加；当 $0<x<+\infty$ 时，$y'<0$，因此函数在 $[0,+\infty)$ 内单调减少. 从而可知 $y(-2)=\frac{8}{3}$ 为极小值，$y(0)=4$ 为极大值.

(7) $y'=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$, $y''=-2e^x\sin x$.

令 $y'=0$，得驻点 $x_k=2k\pi+\frac{\pi}{4}, x'_k=2k\pi+\frac{5}{4}\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

由 $y''|_{x_k=2k\pi+\frac{\pi}{4}}=-\sqrt{2}e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}<0$ 知 $y\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为极大值.

由 $y''|_{x'_k=2k\pi+\frac{5\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}>0$ 知 $y\left(2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}e^{2k\pi+\frac{5}{4}\pi}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为极小值.

(8) $y'=(e^{\frac{1}{x}\ln x})'=e^{\frac{1}{x}\ln x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)\ (x>0)$，令 $y'=0$，得驻点 $x=e$.

当 $0<x<e$ 时，$y'>0$，因此函数在 $(0,e]$ 内单调增加；当 $e<x<+\infty$ 时 $y'<0$，因此函数在 $[e,+\infty)$ 内单调减少，从而可知 $y(e)=e^{\frac{1}{e}}$ 为极大值.

(9) 当 $x\neq-1$ 时，$y'=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^{2/3}}<0$. 又 $x=-1$ 时函数没有定义. 因此可知函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少，从而函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内无极值.

(10) 由 $y'=1+\sec^2x>0$ 知所给函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加，从而函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内无极值.

2. 试证明：如果函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足条件 $b^2-3ac<0$，那么这函数没有极值.

证 $y'=3ax^2+2bx+c$. 由 $b^2-3ac<0$ 知 $a\neq0, c\neq0$.

y'是二次三项式，$\Delta=(2b)^2-4(3a)\cdot c=4(b^2-3ac)<0$.

当 $a>0$ 时，y'的图像开口向上，且在 x 轴上方，故 $y'>0$，从而所给函数在$(-\infty,+\infty)$内单调增加. 当 $a<0$ 时，y'的图像开口向下，且在 x 轴下方，故 $y'<0$，从而所给函数在$(-\infty,+\infty)$内单调减少. 因此，只要条件 $b^2-3ac<0$ 成立，所给函数在$(-\infty,+\infty)$内单调，故函数在$(-\infty,+\infty)$内无极值.

3. 试问 a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$处取得极值？它是极大值还是极小值？并求此极值.

解 $f'(x)=a\cos x+\cos 3x$，函数在 $x=\frac{\pi}{3}$处取得极值，则

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$ 即 $a\cos\frac{\pi}{3}+\cos\pi=0$，故 $a=2$.

又 $f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x$，$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\sin\frac{\pi}{3}-3\sin\pi=-\sqrt{3}<0$，因此 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\sin\pi=\sqrt{3}$为极大值.

4. 求下列函数的最大值、最小值：

(1) $y=2x^3-3x^2$，$-1\leqslant x\leqslant 4$;

(2) $y=x^4-8x^2+2$，$-1\leqslant x\leqslant 3$;

(3) $y=x+\sqrt{1-x}$，$-5\leqslant x\leqslant 1$.

解 (1) 函数在$[-1,4]$上可导，$y'=6x^2-6x=6x(x-1)$.

令 $y'=0$，得驻点 $x_1=0,x_2=1$. 比较 $y|_{x=-1}=-5$，$y|_{x=0}=0$，$y|_{x=1}=-1$，$y|_{x=4}=80$，得函数的最大值为 $y|_{x=4}=80$，最小值为 $y|_{x=-1}=-5$.

(2) 函数在$[-1,3]$上可导，且 $y'=4x^3-16x=4x(x-2)(x+2)$.

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-2$(舍去)，$x_2=0$，$x_3=2$.

比较 $y|_{x=-1}=-5$，$y|_{x=0}=2$，$y|_{x=2}=-14$，$y|_{x=3}=11$，得函数的最大值为 $y|_{x=3}=11$，最小值为 $y|_{x=2}=-14$.

(3) 函数在$[-5,1)$内可导，且 $y'=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}$.

令 $y'=0$，得驻点 $x=\frac{3}{4}$. 比较 $y|_{x=-5}=-5+\sqrt{6}$，$y|_{x=\frac{3}{4}}=\frac{5}{4}$，$y|_{x=1}=1$，得函数的最大值为 $y|_{x=\frac{3}{4}}=\frac{5}{4}$，最小值为 $y|_{x=-5}=\sqrt{6}-5$.

5. 问函数 $y=2x^3-6x^2-18x-7(1\leqslant x\leqslant 4)$在何处取得最大值？并求出它的最大值.

解 函数在$[1,4]$上可导，且 $y'=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$.

令 $y'=0$,得驻点 $x_1=-1$(舍去),$x_2=3$. 比较 $y|_{x=1}=-29$,$y|_{x=3}=-61$,$y|_{x=4}=-47$,得函数在 $x=1$ 处取得最大值,且最大值为 $y|_{x=1}=-29$.

6. 问函数 $y=x^2-\dfrac{54}{x}(x<0)$在何处取得最小值?

解 函数在$(-\infty,0)$内可导,且 $y'=2x+\dfrac{54}{x^2}=\dfrac{2(x^3+27)}{x^2}$,$y''=2-\dfrac{108}{x^3}$.

令 $y'=0$,得驻点 $x=-3$. 由 $y''|_{x=-3}=6>0$ 知 $x=-3$ 为极小值点.

又函数在$(-\infty,0)$内的驻点惟一,故极小值点就是最小值点,即 $x=-3$ 为最小值点,且最小值为 $y|_{x=-3}=27$.

7. 问函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}(x\geqslant 0)$在何处取得最大值?

解 函数在$[0,+\infty)$内可导,且 $y'=\dfrac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$,

$$y''=\frac{-2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

令 $y'=0$,得驻点 $x=-1$(舍去),$x=1$. 由 $y''|_{x=1}=\dfrac{-4}{8}=-\dfrac{1}{2}<0$ 知 $x=1$ 为极大值点,又函数在$(-\infty,0)$内的驻点惟一,故极大值点就是最大值点,即 $x=1$ 为最大值点,且最大值为 $y|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$.

8. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋,现有存砖只够砌 20 m 长的墙壁. 问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大?

解 如图 3-1,设这间小屋的宽为 x,长为 y,则小屋的面积为 $S=xy$.

已知 $2x+y=20$,即 $y=20-2x$. 故

$$S=x(20-2x)=20x-2x^2,\ x\in(0,10).$$

$S'=20-4x$,$S''=-4$. 令 $S'=0$,得驻点 $x=5$. 由 $S''<0$ 知 $x=5$ 为极大值点,又驻点惟一,故极大值点就是最大值点,即当宽为 5 m,长为 10 m 时这间小屋的面积最大.

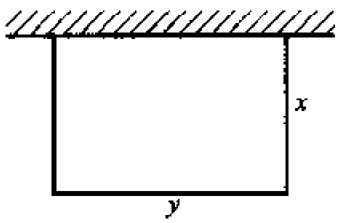


图 3-1

9. 要造一圆柱形油罐,体积为 V,问底半径 r 和高 h 等于多少时,才能使表面积最小? 这时底直径与高的比是多少?

解 已知 $\pi r^2 h=V$,即 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$. 圆柱形油罐的表面积

$$\begin{aligned}A&=2\pi r^2+2\pi rh\\&=2\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{2V}{r},\ r\in(0,+\infty).\end{aligned}$$

$$A'=4\pi r-\frac{2V}{r^2},A''=4\pi+\frac{4V}{r^3}.\text{令 } A'=0,\text{得 } r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

由 $A''\Big|_{r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}=4\pi+8\pi=12\pi>0$ 知 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 为极小值点，又驻点惟一，故极小值点就是最小值点.此时 $h=\frac{V}{\pi r^2}=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=2r$，即 $2r:h=1:1$.所以当底半径为 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 和高 $h=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时，才能使表面积最小.这时底直径与高的比为 1:1.

10. 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆(图 3－2).截面的面积为5 m^2.问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小，从而使建造时所用的材料最省?

解 设截面的周长为 l，已知 $l=x+2y+\frac{\pi x}{2}$

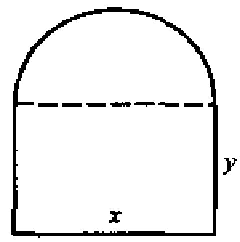


图 3－2

及 $xy+\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2=5$，即 $y=\frac{5}{x}-\frac{\pi x}{8}$.

故 $$l=x+\frac{\pi x}{4}+\frac{10}{x},x\in\left(0,\sqrt{\frac{40}{\pi}}\right).$$

$$l'=1+\frac{\pi}{4}-\frac{10}{x^2},l''=\frac{20}{x^3}.$$

令 $l'=0$，得驻点 $x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$.由 $l''\Big|_{x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}}=\frac{20}{\left(\frac{40}{4+\pi}\right)^{3/2}}>0$ 知 $x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$ 为极小值点，又驻点惟一，故极小值点就是最小值点.所以当截面的底宽为 $x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$ 时，才能使截面的周长最小，从而使建造时所用的材料最省.

11. 设有质量为 5 kg 的物体，置于水平面上，受力 F 的作用而开始移动(图 3－3).设摩擦系数 $\mu=0.25$，问力 F 与水平线的交角 α 为多少时，才可使力 F 的大小为最小.

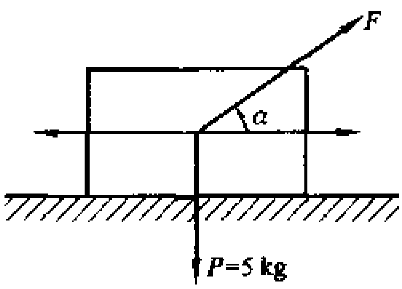


图3－3

解 如图 3－3，力 F 的大小用 $|F|$ 表示，则由 $|F|\cos\alpha=(P-|F|\sin\alpha)\mu$ 知

$$|F|=\frac{\mu P}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha},\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right).$$

设 $y=\cos\alpha+\mu\sin\alpha,\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $y'=-\sin\alpha+\mu\cos\alpha$.

令 $y'=0$，得驻点 $\alpha_0=\arctan\mu$. 又 $y''\Big|_{\alpha=\alpha_0}=-\cos\alpha_0-\mu\sin\alpha_0<0$，所以驻点 α_0 为极大值点，又驻点惟一，因此这 α_0 为函数 $y=y(\alpha)$ 的最大值点，这时，即 $\alpha=\alpha_0=\arctan(0.25)\approx14°2'$ 时，力 F 的大小为最小.

12. 有一杠杆，支点在它的一端. 在距支点 0.1 m 处挂一质量为 49 kg 的物体. 加力于杠杆的另一端使杠杆保持水平(图 3－4). 如果杠杆的线密度为 5 kg/m，求最省力的杆长?

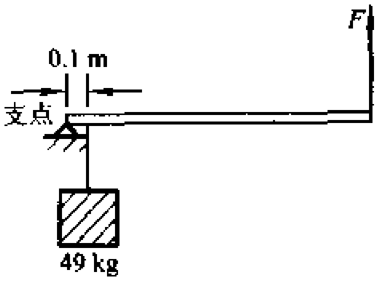


图 3－4

解 如图 3－4，设最省力的杆长为 x，则此时杠杆的重力为 $5gx$，

由力矩平衡公式

$$x|F|=49g\times0.1+5gx\cdot\frac{x}{2}\ (x>0),$$

知
$$|F|=\frac{4.9}{x}g+\frac{5}{2}gx,|F|'=-\frac{4.9}{x^2}g+\frac{5}{2}g,$$

$|F|''=\frac{9.8}{x^3}g$. 令 $|F|'=0$，得驻点 $x=1.4$.

又，$|F|''\Big|_{x=1.4}=\frac{9.8}{(1.4)^3}g>0$，故 $x=1.4$ 为极小值点，又驻点惟一，因此 $x=1.4$ 也是最小值点，即杆长为 1.4 m 时最省力.

13. 从一块半径为 R 的圆铁片上挖去一个扇形做成一个漏斗(图 3－5). 问留下的扇形的中心角 φ 取多大时，做成的漏斗的容积最大?

解 如图 3－5，设漏斗的高为 h，顶面的圆半径为 r，则漏斗的容积为 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$，又 $2\pi r=R\varphi$，$h=\sqrt{R^2-r^2}$. 故 $V=\frac{R^3}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2\varphi^4-\varphi^6}\ (0<\varphi<2\pi)$.

$$V'=\frac{R^3}{24\pi^2}\cdot\frac{16\pi^2\varphi^3-6\varphi^5}{2\sqrt{4\pi^2\varphi^4-\varphi^6}}=\frac{R^3}{24\pi^2}\cdot\frac{8\pi^2\varphi-3\varphi^3}{\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}.$$

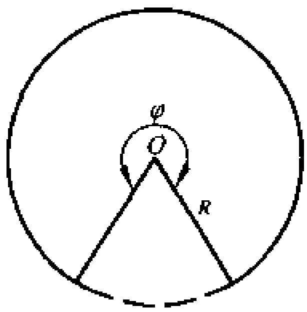


图 3－5

令 $V'=0$ 得 $\varphi=\sqrt{\frac{8}{3}}\pi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$，当 $0<\varphi<\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时，

$V'>0$,故 V 在 $\left[0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\right]$ 内单调增加,当 $\frac{2\sqrt{6}}{3}<\varphi<2\pi$ 时,$V'<0$ 故 V 在 $\left[\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi,2\pi\right)$ 内单调减少.因此 $\varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 为极大值点,又驻点惟一,从而 $\varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 也是最大值点,即当 φ 取 $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时,做成的漏斗的容积最大.

14. 某吊车的车身高为 1.5 m,吊臂长 15 m.现在要把一个 6 m 宽、2 m 高的屋架,水平地吊到 6 m 高的柱子上去(图 3-6),问能否吊得上去?

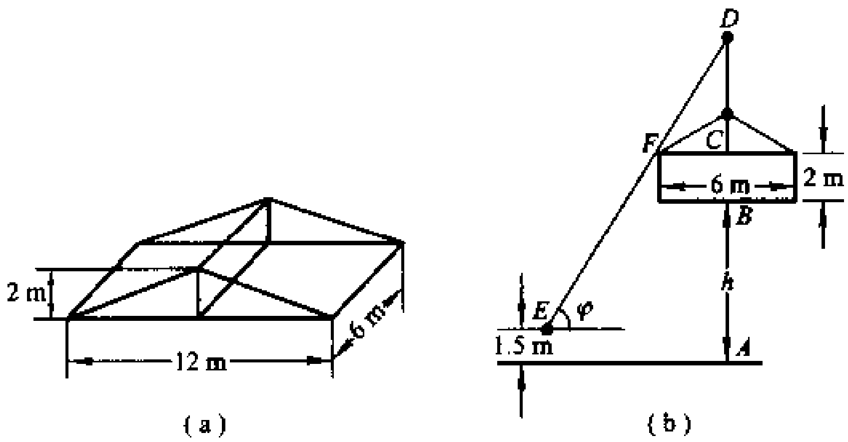


图 3-6

解 如图 3-6,设吊臂对地面的倾角为 φ,屋架能够吊到最大高度为 h,由 $15\sin\varphi=h-1.5+2+3\tan\varphi$ 知

$$h=15\sin\varphi-3\tan\varphi-\frac{1}{2}.$$

$$h'=15\cos\varphi-\frac{3}{\cos^2\varphi},h''=-15\sin\varphi-\frac{6\sin\varphi}{\cos^3\varphi}.$$

令 $h'=0$,得 $\cos\varphi=\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$,即得惟一驻点 $\varphi_0=\arccos\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\approx54°13'$.又,$h''\big|_{\varphi=\varphi_0}<0$,故 $\varphi_0\approx54°13'$ 为极大值点也是最大值点.即当 $\varphi_0\approx54°13'$ 时,h 达到最大值 $h_0=15\sin54°13'-3\tan54°13'-\frac{1}{2}\approx7.506$ m,而柱子高只有 6 m,所以能吊得上去.

15. 一房地产公司有 50 套公寓要出租.当月租金定为 1 000 元时,公寓会全部租出去.当月租金每增加 50 元时,就会多一套公寓租不出去.而租出去的公寓每月需花费 100 元的维修费.试问房租定为多少可获得最大收入?

解 设每套月房租为 x 元,则租不出去的房子套数为 $\frac{x-1\,000}{50}=\frac{x}{50}-20$,

租出去的套数为 $50-\left(\dfrac{x}{50}-20\right)=70-\dfrac{x}{50}$，租出的每套房子获利$(x-100)$元.故总利润为

$$y=\left(70-\frac{x}{50}\right)(x-100)=-\frac{x^2}{50}+72x-7\,000.$$

$$y'=-\frac{x}{25}+72,\ y''=\frac{-1}{25}.$$

令 $y'=0$，得驻点 $x=1\,800$. 由 $y''<0$ 知 $x=1\,800$ 为极大值点，又驻点惟一，这极大值点就是最大值点. 即当每套月房租定在 1 800 元时，可获得最大收入.

习 题 3-6

描绘下列函数的图形：

1. $y=\dfrac{1}{5}(x^4-6x^2+8x+7)$；　　2. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$；

3. $y=\mathrm{e}^{-(x-1)^2}$；　　4. $y=x^2+\dfrac{1}{x}$；

5. $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$.

1. **解**　(1) 所给函数 $y=\dfrac{1}{5}(x^4-6x^2+8x+7)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$. 而

$$y'=\frac{1}{5}(4x^3-12x+8)=\frac{4}{5}(x+2)(x-1)^2,\ y''=\frac{4}{5}(3x^2-3)=\frac{12}{5}(x+1)(x-1).$$

(2) 令 $y'=0$，得 $x_1=-2$，$x_2=1$，令 $y''=0$，得 $x_2=1$，$x_3=-1$. 根据上述点将区间$(-\infty,+\infty)$分成下列四个部分区间：

$$(-\infty,-2],[-2,-1],[-1,1],[1,+\infty).$$

(3) 在各部分区间内 $f'(x)$及 $f''(x)$的符号、相应曲线弧的升降及凹凸，以及极值点和拐点等如下表：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y=f(x)$ 的图形		极小		拐点		拐点	

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，图形没有铅直、水平、斜渐近线.

(5) 由 $f(-2)=-\frac{17}{5}$，$f(-1)=-\frac{6}{5}$，$f(1)=2$，$f(0)=\frac{7}{5}$ 得图形上的四个点 $\left(-2,-\frac{17}{5}\right)$，$\left(-1,-\frac{6}{5}\right)$，$(1,2)$，$\left(0,\frac{7}{5}\right)$.

(6) 作图如图 3-7.

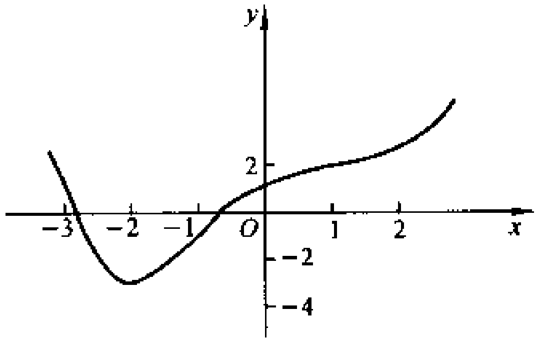


图 3-7

2. (1) 所给函数 $y=\frac{x}{1+x^2}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 由于 $y=\frac{x}{1+x^2}$ 是奇函数，它的图形关于原点对称，因此可以只讨论 $[0,+\infty)$ 上该函数的图形，求出

$$y'=\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\ y''=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

(2) 在 $[0,+\infty)$ 内 y' 的零点为 $x=1$，y'' 的零点为 $x=\sqrt{3}$，根据这两点把区间 $[0,+\infty)$ 分成三个区间：$[0,1]$，$[1,\sqrt{3}]$，$[\sqrt{3},+\infty)$.

(3) 在 $[0,+\infty)$ 内的各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号、相应曲线弧的升降及凹凸，以及极值点和拐点等如下表：

x	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'	+	+	0	−	−	−
y''	−	−	−	−	0	+
$y=f(x)$ 的图形	拐点		极大		拐点	

(4) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2}=0$，所以图形有一条水平渐近线 $y=0$，图形无铅直渐近线及斜渐近线.

(5) 由 $f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{2}$，$f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 得在 $[0,+\infty)$ 内图形上的点 $(0,0)$，

$\left(1,\frac{1}{2}\right),\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

(6) 利用图形的对称性，作出图形如图 3－8.

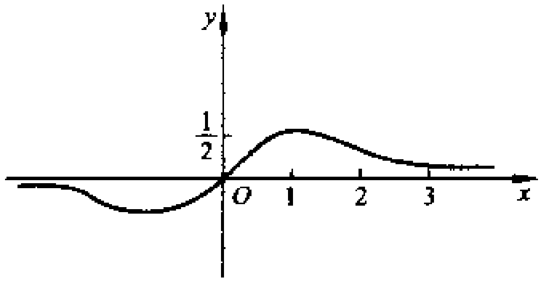


图 3－8

3. (1) 所给函数 $y=e^{-(x-1)^2}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而

$$y'=-2(x-1)e^{-(x-1)^2},$$

$$y''=-4(2x^2-4x+1)e^{-(x-1)^2}.$$

(2) 令 $y'=0$，得驻点 $x=1$；令 $y''=0$，得 $x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，根据上述点将区间 $(-\infty,+\infty)$ 分成四个部分区间：

$$\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right],\left[1-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right),\left(1,1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right).$$

(3) 在各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号，相应曲线弧的升降及凹凸，以及极值点和拐点等如下表：

x	$\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$	1	$\left(1,1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$
y'	+	+	+	0	－	－	－
y''	+	0	－	－		0	+
$y=f(x)$ 的图形		拐点		极大		拐点	

(4) 由 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-(x-1)^2}=0$ 知图形有一条水平渐近线 $y=0$，图形无铅直渐近线及斜渐近线.

(5) 由 $f(1)=1$，$f\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}$，$f(0)=e^{-1}$，$f\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}$，得图形上

的点$(1,1)$，$\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$，$(0,e^{-1})$，$\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

(6) 作图如图 3－9.

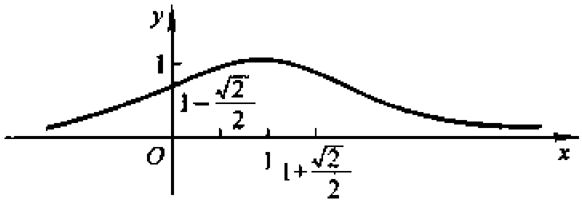


图 3－9

4. (1) 所给函数 $y=x^2+\dfrac{1}{x}$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

$$y'=2x-\frac{1}{x^2},\ y''=2+\frac{2}{x^3}.$$

(2) 令 $y'=0$，得 $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$；令 $y''=0$，得 $x=-1$，又 $x=0$ 时函数无定义，根据上述点，将区间$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$分成四个部分区间：$(-\infty,-1]$，$[-1,0)$，$\left(0,\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$，$\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},+\infty\right)$.

(3) 在各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号，相应曲线弧的升降及凹凸，以及极值点和拐点等如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},+\infty\right)$
y'	$-$	$-$	$-$		$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$		$+$	$+$	$+$
$y=f(x)$ 的图形		拐点				极小	

(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)=\infty$，所以图形有一条铅直渐近线 $x=0$，图形无水平、斜渐近线.

(5) 由 $f(-1)=0$，$f\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ 得在$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$内图形上的点$(-1,0)$，$\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right)$.

(6) 作图如图 3 - 10.

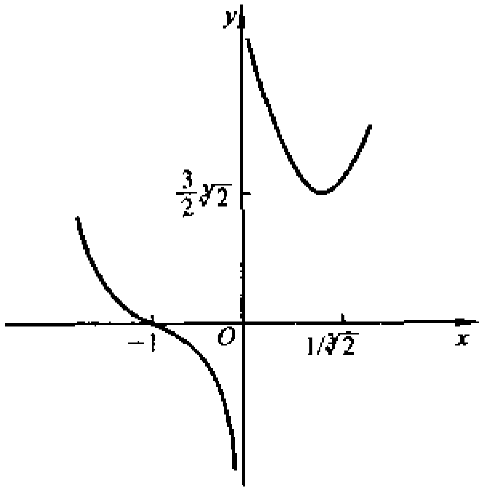


图 3　10

5. (1) 所给函数 $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$ 的定义域 $D=\{x \mid x\neq \dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}, x\in\mathbf{R}, n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$. 由于 $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$ 是偶函数，它的图形关于 y 轴对称，且由于函数是以 2π 为周期的函数，因此可以只讨论 $[0,\pi]$ 部分的图形. 求出

$$y'=\frac{-\sin x\cos 2x+\cos x(2\sin 2x)}{\cos^2(2x)}=\frac{\sin x(3-2\sin^2 x)}{\cos^2(2x)},$$

$$y''=\frac{\cos x(3+12\sin^2 x-4\sin^4 x)}{\cos^3(2x)}.$$

(2) 令 $y'=0$，得 $x=0, x=\pi$；令 $y''=0$，得 $x=\dfrac{\pi}{2}$；又函数在点 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 及 $x=\dfrac{3}{4}\pi$ 处无定义. 根据这些点把区间 $[0,\pi]$ 分成四个部分区间：$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$，$\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$.

(3) 在 $[0,\pi]$ 内的各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号，相应曲线弧的升降及凹凸，以及极值点和拐点等如下表：

x	0	$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$	$\frac{3\pi}{4}$	$\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$	π
y'	0	+		+	+	+		+	0
y''	+	+		−	+	+		−	−
$y=f(x)$ 的图形	极小				拐点				极大

(4) 由 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\infty$ 及 $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}} f(x)=\infty$，知图形有两条铅直渐近线：$x=\frac{\pi}{4}$ 及 $x=\frac{3}{4}\pi$，图形无水平及斜渐近线.

(5) 由 $f(0)=1, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ 得图形上的点 $(0,1)$，$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.

(6) 利用图形对称性及函数的周期性，作图如图 3－11.

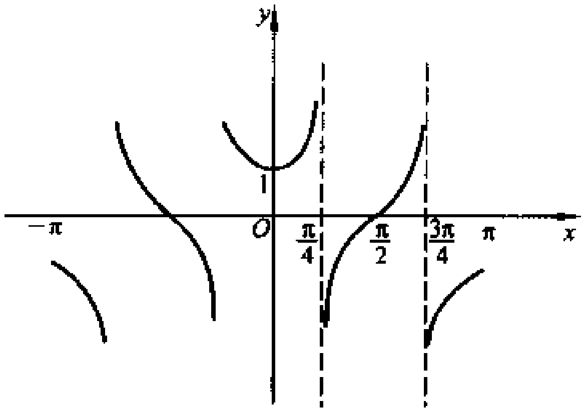


图 3－11

习 题 3－7

1. 求椭圆 $4x^2+y^2=4$ 在点 $(0,2)$ 处的曲率.

解 由 $8x+2yy'=0$ 知 $y'=\frac{-4x}{y}, y''=\frac{-16}{y^3}$.

故 $y'|_{x=0}=0, y''|_{x=0}=-2$，故在点 $(0,2)$ 处的曲率为

$$K=\left.\frac{|y''|}{[1+y'^2]^{\frac{3}{2}}}\right|_{(0,2)}=2.$$

2. 求曲线 $y=\ln\sec x$ 在点 (x,y) 处的曲率及曲率半径.

解 $y'=\frac{1}{\sec x}\cdot\sec x\tan x=\tan x, y''=\sec^2 x$.

故曲率 $K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}=\frac{\sec^2 x}{(1+\tan^2 x)^{3/2}}=|\cos x|$，

曲率半径 $\rho=\frac{1}{K}=|\sec x|$.

3. 求抛物线 $y=x^2-4x+3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径.

解 抛物线的顶点为 $(2,-1)$，$y'=2x-4, y''=2$.

抛物线 $y=x^2-4x+3$ 在其顶点处的曲率

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\bigg|_{(2,-1)}=2,$$

曲率半径 $\rho=\frac{1}{K}=\frac{1}{2}$.

4. 求曲线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 在 $t=t_0$ 处的曲率.

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}.$$

故曲线在 $t=t_0$ 处的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\bigg|_{t=t_0}=\frac{\left|\frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}\right|}{[1+(-\tan t)^2]^{3/2}}\Bigg|_{t=t_0}=\frac{2}{|3a\sin(2t_0)|}.$$

5. 对数曲线 $y=\ln x$ 上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

解 $y'=\frac{1}{x}$, $y''=-\frac{1}{x^2}$. 曲线的曲率 $K=\frac{|y''|}{[1+y'^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|-\frac{1}{x^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]^{3/2}}=\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$，曲率半径为

$$\rho=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}.$$

又，$\rho'=\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(2x^2-1)}{x^2}$. 令 $\rho'=0$ 得驻点 $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$(舍去).

当$0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$\rho'<0$，即 ρ 在$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$内单调减少；当$\frac{\sqrt{2}}{2}<x<+\infty$时，$\rho'>0$，即 ρ 在$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$内单调增加. 因此在 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$处 ρ 取得极小值；驻点惟一，从而 ρ 的极小值就是最小值，因此最小的曲率半径为

$$\rho\Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

6. 证明曲线 $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ 在点(x,y)处的曲率半径为$\dfrac{y^2}{a}$.

证 $y'=\operatorname{sh}\dfrac{x}{a}$，$y''=\dfrac{1}{a}\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$，曲线在点$(x,y)$处的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|\dfrac{1}{a}\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}\right|}{\left(1+\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a\operatorname{ch}^2\dfrac{x}{a}},$$

曲率半径为 $$\rho=\frac{1}{K}=a\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}=\frac{y^2}{a}.$$

7. 一飞机沿抛物线路径 $y=\dfrac{x^2}{10\ 000}$（y 轴铅直向上，单位为 m）作俯冲飞行. 在坐标原点 O 处飞机的速度为 $v=200$ m/s. 飞行员体重 $G=70$ kg. 求飞机俯冲至最低点即原点 O 处时座椅对飞行员的反力.

解 $y'=\dfrac{2x}{10\ 000}=\dfrac{x}{5\ 000}$，$y''=\dfrac{1}{5\ 000}$.

抛物线在坐标原点的曲率半径为

$$\rho=\frac{1}{K}\bigg|_{x=0}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\bigg|_{x=0}=5\ 000.$$

所以向心力为 $F_1=\dfrac{mv^2}{\rho}=\dfrac{70\times200^2}{5\ 000}=560$（牛顿）.

座椅对飞行员的反力 F 等于飞行员的离心力及飞行员本身的重量对座椅的压力之和，因此

$$F=mg+F_1=70\times9.8+560=1\ 246(\text{牛顿}).$$

8. 汽车连同载重共 5 t，在抛物线拱桥上行驶，速度为 21.6 km/h，桥的跨度为 10 m，拱的矢高为 0.25 m（图 3-12）. 求汽车越过桥顶时对桥的压力.

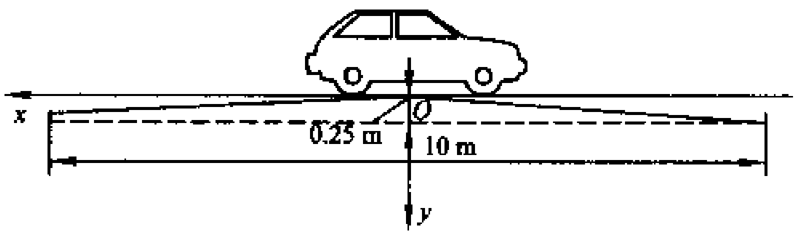


图 3-12

解 设立直角坐标系如图 3-12 所示，设抛物线拱桥方程为

$$y=ax^2$$

由于抛物线过点(5,0.25),代入方程得 $a=\left.\dfrac{y}{x^2}\right|_{(5,0.25)}=\dfrac{0.25}{25}=0.01$.

$$y'=2ax,\qquad y''=2a,$$

因此 $$\left.y'\right|_{x=0}=0,\left.y''\right|_{x=0}=0.02,$$

$$\left.\rho\right|_{x=0}=\left.\frac{1}{K}\right|_{x=0}=\left.\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\right|_{x=0}=50.$$

汽车越过桥顶点时对桥的压力为

$$F=mg-\frac{mv^2}{\rho}=5\times10^3\times9.8-\frac{5\times10^3\times\left(\frac{21.6\times10^3}{3\,600}\right)}{50}=45\,400(\text{牛顿}).$$

*9. 求曲线 $y=\ln x$ 在与 x 轴交点处的曲率圆方程.

解 解方程组 $\begin{cases}y=\ln x,\\y=0.\end{cases}$ 得曲线与 x 轴的交点为(1,0).

$$y'=\frac{1}{x},y''=-\frac{1}{x^2},\text{故 }y'|_{x=1}=1,\left.y''\right|_{x=1}=-1.$$

设曲线在点(1,0)处的曲率中心为(α,β),则

$$\alpha=\left[x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]_{(1,0)}=1-\frac{1\cdot(1+1^2)}{-1}=3,$$

$$\beta=\left[y+\frac{1+y'^2}{y''}\right]_{(1,0)}=0+\frac{1+1^2}{-1}=-2.$$

曲率半径 $\rho=\left.\dfrac{1}{K}\right|_{x=1}=\left.\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\right|_{x=1}=\dfrac{(1+1^2)^{\frac{3}{2}}}{1}=\sqrt{8}$,因此所求的曲率圆方程为$(\xi-3)^2+(\eta+2)^2=8$.

*10. 求曲线 $y=\tan x$ 在点$\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$处的曲率圆方程.

解 $y'=\sec^2 x,y''=2\sec^2 x\tan x$,故 $y'|_{x=\frac{\pi}{4}}=2,y''|_{x=\frac{\pi}{4}}=4$.

设曲线在点$\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$处的曲率中心的坐标为$(\alpha,\beta)$,则

$$\alpha=\left[x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]_{(\frac{\pi}{4},1)}=\frac{\pi}{4}-\frac{2(1+4)}{4}=\frac{\pi-10}{4},)$$

$$\beta=\left[y+\frac{1+y'^2}{y''}\right]_{(\frac{\pi}{4},1)}=1+\frac{1+4}{4}=\frac{9}{4}.$$

曲率半径 $\rho=\left.\dfrac{1}{K}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=\left.\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{5^{\frac{3}{2}}}{4}$,

此所求的曲率圆方程为$\left(\xi-\dfrac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(\eta-\dfrac{9}{4}\right)^2=\dfrac{125}{16}$.

*11. 求抛物线 $y^2=2px$ 的渐屈线方程.

解 由 $2yy'=2p$，及 $y'^2+yy''=0$ 知 $y'=\frac{p}{y}$，$y''=-\frac{p^2}{y^3}$.

故抛物线 $y^2=2px$ 的渐屈线方程为

$$\begin{cases}\alpha=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}=x-\dfrac{\dfrac{p}{y}\left[1+\left(\dfrac{p}{y}\right)^2\right]}{-\dfrac{p^2}{y^3}}=\dfrac{3y^2}{2p}+p, \\ \beta=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}=y+\dfrac{1+\left(\dfrac{p}{y}\right)^2}{\dfrac{p^2}{y^3}}=-\dfrac{y^3}{p^2},\end{cases}$$

其中 y 为参数.或消去参数 y 得渐屈线方程为

$$27p\beta^2=8(\alpha-p)^3.$$

习 题 3-8

1. 试证明方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有惟一的实根，并用二分法求这个根的近似值，使误差不超过 0.01.

解 设函数 $f(x)=x^3-3x^2+6x-1$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=-1<0$，$f(1)=3>0$. 由零点定理知至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=0$，即方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

又 $f'(x)=3x^2-6x+6=3(x-1)^2+3>0$，故函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增加，从而方程 $f(x)=0$ 即 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内至多有一个实根. 因此方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内有惟一的实根.

现用二分法求这个实根的近似值：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	0	0	0	0.125	0.125	0.157	0.173	0.180	0.180	0.182	0.183
b_n	1	0.5	0.25	0.25	0.188	0.188	0.188	0.188	0.184	0.184	0.184
中点 x_n	0.5	0.25	0.125	0.188	0.157	0.173	0.180	0.184	0.182	0.183	0.183
$f(x_n)$ 符号	+	+	−	+	−		−	+	−	+	+

故使误差不超过 0.01 的根的近似值为 $\xi=0.183$.

2. 试证明方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内有惟一的实根，并用切线

法求这个根的近似值,使误差不超过0.01.

解 设函数 $f(x)=x^5+5x+1$. $f(x)$在$[-1,0]$上连续,且 $f(-1)=-5<0$, $f(0)=1>0$. 由零点定理知至少存在一点 $\xi\in(-1,0)$,使 $f(\xi)=0$ 即方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间$(-1,0)$内至少有一实根.

又 $f'(x)=5x^4+5>0$,故函数 $f(x)$在$[-1,0]$上单调增加,从而方程 $f(x)=0$即 $x^5+5x+1=0$ 在$(-1,0)$内至多有一个实根,因此方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间$(-1,0)$内有惟一的实根.

现用切线法求这个实根的近似值:

由 $f''(x)=20x^3$, $f''(-1)=-20<0$ 知取 $x_0=-1$,利用递推公式 $x_n=x_{n-1}-\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$,得:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=-1-\frac{f(-1)}{f'(-1)}=-0.5,$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=-0.5-\frac{f(-0.5)}{f'(-0.5)}=-0.26,$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=-0.26-\frac{f(-0.26)}{f'(-0.26)}\approx-0.20,$$

$$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}=-0.20-\frac{f(-0.20)}{f'(-0.20)}\approx-0.20.$$

故使误差不超过0.01的根的近似值为 $\xi=-0.20$.

3. 求方程 $x^3+3x-1=0$ 的近似根,使误差不超过0.01.

解 设函数 $f(x)=x^3+3x-1$, $f(x)$在$[0,1]$上连续,且 $f(0)=-1<0$, $f(1)=3>0$,由零点定理知至少存在一点 $\xi\in(0,1)$,使 $f(\xi)=0$,即方程 $x^3+3x-1=0$ 在区间$(0,1)$内至少有一实根.

又 $f'(x)=3x^2+3>0$,故函数 $f(x)$在$[0,1]$上单调增加,从而方程 $f(x)=0$ 即 $x^3+3x-1=0$ 在区间$(0,1)$内至多有一实根. 因此方程 $x^3+3x-1=0$ 在区间$(0,1)$内有惟一的实根.

现用切线法求这个根的近似值:

由 $f''(x)=6x$, $f''(1)=6>0$ 知取 $x_0=1$,利用递推公式 $x_n=x_{n-1}-\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$,得:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1-\frac{f(1)}{f'(1)}=0.5,$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=0.5-\frac{f(0.5)}{f'(0.5)}\approx0.33,$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.33 - \frac{f(0.33)}{f'(0.33)} \approx 0.32,$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0.32 - \frac{f(0.32)}{f'(0.32)} \approx 0.32.$$

故使误差不超过 0.01 的根的近似值为 $\xi = 0.32$.

4. 求方程 $x\lg x = 1$ 的近似根，使误差不超过 0.01.

解 设函数 $f(x) = x\lg x - 1$. $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续，且 $f(1) = -1 < 0$，$f(3) = 3\lg 3 - 1 > 0$，由零点定理知至少存在一点 $\xi \in (1,3)$，使 $f(\xi) = 0$，即方程 $x\lg x = 1$ 在区间 $(1,3)$ 内至少有一实根.

又，$f'(x) = \lg x + x \cdot \frac{1}{x\ln 10} = \lg x + \frac{1}{\ln 10} > 0 (x \geqslant 1)$，故函数 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上单调增加，从而方程 $f(x) = 0$ 即 $x\lg x = 1$ 在 $(1,3)$ 内至多有一个实根，因此方程 $x\lg x = 1$ 在 $(1,3)$ 内有惟一的实根.

现用二分法求这个根的近似值：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	2	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50
b_n	3	3	3	2.75	2.63	2.57	2.53	2.52	2.51
中点 x_n	2	2.50	2.75	2.63	2.57	2.53	2.52	2.51	2.51
$f(x_n)$符号	−	−	+	+	+	+	+	+	+

故误差不超过 0.01 的根的近似值为 $\xi = 2.51$.

总 习 题 三

1. 填空：

设常数 $k > 0$，函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点的个数为__________.

解 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e - x}{xe}$，令 $f'(x) = 0$，得驻点 $x = e$.

当 $0 < x < e$ 时 $f'(x) > 0$，故函数 $f(x)$ 在 $(0, e]$ 内单调增加；

当 $e < x < +\infty$ 时 $f'(x) < 0$，故函数 $f(x)$ 在 $[e, +\infty)$ 内单调减少.

从而 $x = e$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点. 由于驻点惟一，极大值也是最大值且最大值 $f(e) = k > 0$，

又 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$,

故曲线 $y = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 与 x 轴有两个交点,因此函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内的零点的个数为 2.

2. 选择以下题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$,则 $f'(0), f'(1), f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 几个数的大小顺序为( ).

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$. (B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$.

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$. (D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

解 由拉格朗日中值定理知 $f(1)-f(0)=f'(\xi)$,其中 $\xi\in(0,1)$.由于 $f''(x)>0$, $f'(x)$ 单调增加,故 $f'(0)<f'(\xi)<f'(1)$.即

$$f'(0)<f(1)-f(0)<f'(1).$$

因此应填(B).

3. 列举一个函数 $f(x)$ 满足:$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内除某一点外处处可导,但在 (a,b) 内不存在点 ξ,使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

解 取 $f(x)=|x|$,区间为 $[-1,1]$.函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续,在 $(-1,1)$ 内除点 $x=0$ 外处处可导,但 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内不存在点 ξ,使 $f'(\xi)=0$,即不存在 $\xi\in(-1,1)$ 使 $f(1)-f(-1)=f'(\xi)[1-(-1)]$.

4. 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=k$,求 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]$.

解 由拉格朗日中值定理知 $f(x+a)-f(x)=f'(\xi)a$, $\xi\in(x,x+a)$,当 $x\to\infty$ 时,$\xi\to\infty$.故

$$\lim_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]=\lim_{\xi\to\infty}f'(\xi)a=ka.$$

5. 证明多项式 $f(x)=x^3-3x+a$ 在 $[0,1]$ 上不可能有两个零点.

证 假设多项式 $f(x)=x^3-3x+a$ 在 $[0,1]$ 上有两个零点,即存在 $x_1, x_2\in[0,1]$ 使 $f(x_1)=f(x_2)=0$,不妨设 $x_1<x_2$.

函数 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续,在 $(x_1 x_2)$ 内可导,由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in(x_1 x_2)\subset(0,1)$,使 $f'(\xi)=0$,但 $f'(x)=3x^2-3$ 在 $(0,1)$ 内恒不等于零,故多项式 $f(x)=x^3-3x+a$ 在 $[0,1]$ 上不可能有两个零点.

6. 设 $a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$,证明多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点.

证 取函数 $F(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$. $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导且 $F(0)=0$, $F(1)=a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$,由罗尔定理知至少存

在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$，即

多项式 $f(x)=F'(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在$(0,1)$内至少有一个零点.

7. 设 $f(x)$在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$内可导，且 $f(a)=0$，证明存在一点 $\xi\in(0,a)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证 取函数 $F(x)=xf(x)$. $F(x)$在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$内可导，且 $F(0)=0$，$F(a)=af(a)=0$，由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in(0,a)$，使 $F'(\xi)=[xf(x)]'|_{x=\xi}=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

8. 设 $0<a<b$，函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，试利用柯西中值定理，证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

证 取 $F(x)=\ln x$，$f(x)$、$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $F'(x)=\frac{1}{x}\neq0$，$x\in(a,b)$. 由柯西中值定理知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

即
$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}},$$

亦即
$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

9. 设 $f(x)$、$g(x)$都是可导函数，且 $|f'(x)|<g'(x)$，证明：当 $x>a$ 时，$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$.

分析 要证 $x>a$ 时，$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$，

即要证
$$-[g(x)-g(a)]<f(x)-f(a)<g(x)-g(a),$$

亦即要证
$$f(x)-g(x)<f(a)-g(a),$$
$$f(x)+g(x)>f(a)+g(a).$$

证 取 $F(x)=f(x)-g(x)$，$G(x)=f(x)+g(x)$，$x\in(a,+\infty)$.

由 $|f'(x)|<g'(x)$知 $f'(x)-g'(x)<0$，及 $f'(x)+g'(x)>0$

故 $F'(x)=f'(x)-g'(x)<0$，$G'(x)=f'(x)+g'(x)>0$，即当 $x>a$ 时函数 $F(x)$单调减少，$G(x)$单调增加. 因此

$$F(x)<F(a)\text{及 }G(x)>G(a)\qquad(x>a).$$

从而 $f(x)-g(x)<f(a)-g(a)$，$f(x)+g(x)>f(a)+g(a)$ $(x>a)$.

即当 $x>a$ 时，$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$.

10. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^{x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)/n\right]^{nx}$ （其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$）.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^x(1+\ln x)}{-1+\dfrac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^x\ln x+x^x-1}{x-1}\cdot x$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)\ln x+x^{x-1}+x^x(\ln x+1)}{1}$$

$$=2.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{2}{\pi}+\ln\arctan x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}}$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}}=e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)/n\right]^{nx}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}nx\left[\ln\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)-\ln n\right]}$$

$$=e^{n\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)-\ln n}{\frac{1}{x}}}$$

$$=e^{n\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}\left[a_1^{\frac{1}{x}}\ln a_1+a_2^{\frac{1}{x}}\ln a_2+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\ln a_n\right]\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}}$$

$$=e^{n\cdot\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)}=e^{\ln(a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n)}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n.$$

11. 证明下列不等式：

(1) 当 $0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{\tan x_2}{\tan x_1}>\dfrac{x_2}{x_1}$；

证 取函数 $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}, 0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)=\dfrac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}>0(x\sec^2 x-\tan x>x-\tan x>0)$

故 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内为单调增加，因此，当 $0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$ 时，

$$f(x_2)>f(x_1),$$

即
$$\frac{\tan x_2}{x_2}>\frac{\tan x_1}{x_1},$$

亦即
$$\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}.$$

(2) 当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$.

证 取函数 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x(x>0)$.

当 $x>0$ 时，$f'(x)=\ln(1+x)+1-\dfrac{1}{1+x^2}>0$,

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调增加，因此当 $x>0$ 时

$$f(x)>f(0),$$

即
$$(1+x)\ln(1+x)-\arctan x>0,$$

亦即
$$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}.$$

12. 设 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0\\ x+2, & x\leqslant 0\end{cases}$，求 $f(x)$ 的极值.

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2)=2$.

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^{2x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}2x\ln x}=e^{2\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$$

$$=e^{2\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{2\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)}=e^0=1,$$

由 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，从而也不可导.

$$f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(\ln x+1), & x>0,\\ 1, & x<0.\end{cases}$$

令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=\dfrac{1}{e}$.

当 $-\infty<x<0$ 时，$f'(x)>0$；当 $0<x<\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)<0$；当 $\dfrac{1}{e}<x<+\infty$ 时，$f'(x)>0$. 故点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点，且极大值 $f(0)=2$；点 $x=\dfrac{1}{e}$ 为

$f(x)$的极小值点，且极小值 $f\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2}{e}}=e^{-\frac{2}{e}}$.

13. 求椭圆 $x^2-xy+y^2=3$ 上纵坐标最大和最小的点.

解 在椭圆方程两端分别对 x 求导，得

$$2x-y-xy'+2yy'=0,$$

$$y'=\frac{y-2x}{2y-x}.$$

令 $y'=0$，得 $y=2x$. 将 $y=2x$ 代入椭圆方程后得 $x^2=1$，故 $x=\pm1$. 从而得到椭圆上的点$(1,2)$，$(-1,-2)$. 根据题意即知点$(1,2)$、$(-1,-2)$为椭圆 $x^2-xy+y^2=3$ 上纵坐标最大和最小的点.

14. 求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的最大项.

解 取函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$. $f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=e$. 当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$；当 $e<x<+\infty$时，$f'(x)<0$，因此点 $x=e$ 为 $f(x)$的极大值点. 由于驻点惟一，极大值点也是最大值点且最大值为 $f(e)=e^{\frac{1}{e}}$.

由 $1<\sqrt{2}$及 $f(x)$在$(e,+\infty)$内单调减少，知

$$\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}>\cdots>\sqrt[n]{n}>\cdots$$

又 $\max\{\sqrt{2},\sqrt[3]{3}\}=\sqrt[3]{3}$，故数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的最大项为$\sqrt[3]{3}$.

15. 曲线弧 $y=\sin x(0<x<\pi)$上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

解 $y'=\cos x$，$y''=-\sin x$，曲线 $y=\sin x$ $(0<x<\pi)$的曲率为

$$K=\frac{|-\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{3/2}},$$

由 $K'=\dfrac{2\cos x(1+\sin^2 x)}{(1+\cos^2 x)^{\frac{5}{2}}}=0$ 知 $x=\dfrac{\pi}{2}$.

当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$K'>0$；当$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$时，$K'<0$. 因此 $x=\dfrac{\pi}{2}$为 K 的极大值点. 又驻点惟一，故极大值点也是最大值点，且 K 的最大值 $K=\left.\dfrac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$.

此时曲率半径 $\rho=1$ 最小，故曲线弧 $y=\sin x(0<x<\pi)$上点 $x=\dfrac{\pi}{2}$处的曲率半径最小且曲率半径为 $\rho=1$.

16. 证明方程 $x^3-5x-2=0$ 只有一个正根，并求此正根的近似值，精确到 10^{-3}.

证 取函数 $f(x)=x^3-5x-2$, $f'(x)=3x^2-5$.

令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=\sqrt{\frac{5}{3}}$，当 $0<x<\sqrt{\frac{5}{3}}$ 时 $f'(x)<0$，

故 $f(x)$ 在 $\left[0,\sqrt{\frac{5}{3}}\right]$ 上单调减少，又 $f(0)=-2<0$，$f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)=\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{2}}-5\sqrt{\frac{5}{3}}-2<0$. 因此方程 $f(x)=0$ 即 $x^3-5x-2=0$ 在 $\left(0,\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ 内没有实根.

当 $\sqrt{\frac{5}{3}}<x<+\infty$ 时 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $\left[\sqrt{\frac{5}{3}},+\infty\right)$ 内单调增加，因此方程 $f(x)=0$ 在 $\left[\sqrt{\frac{5}{3}},+\infty\right)$ 内至多有一实根，又 $f(3)=10>0$，由零点定理知至少存在一点 $\xi\in\left(\sqrt{\frac{5}{3}},3\right)$ 使 $f(\xi)=0$，即方程 $f(x)=0$ 亦即 $x^3-5x-2=0$ 在 $\left(\sqrt{\frac{5}{3}},3\right)$ 内至少有一实根，因此方程 $x^3-5x-2=0$ 在 $\left(\sqrt{\frac{5}{3}},3\right)$ 内只有一正根.

综上，方程 $x^3-5x-2=0$ 只有一个正根.

现在用二分法来求该方程正根的近似值，由 $f(2)=-4<0$，为了方便起见，取区间 $[2,3]$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	2	2	2.25	2.375	2.375	2.406	2.406	2.414	2.414	2.414	2.414
b_n	3	2.5	2.5	2.5	2.438	2.438	2.422	2.422	2.418	2.416	2.415
中点 x_n	2.5	2.25	2.375	2.438	2.406	2.422	2.414	2.418	2.416	2.415	2.415
$f(x_n)$ 符号	+	-	-	+	-	+	-	+	+	+	+

故误差不超过 10^{-3} 的正根的近似值为 $\xi=2.415$.

17. 设 $f''(x_0)$ 存在，证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0).$$

证 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-h}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[f''(x_0)+f''(x_0)]$$

$= f''(x_0)$.

18. 设 $f^{(n)}(x_0)$存在,且 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(n)}(x_0)=0$,证明

$$f(x)=o[(x-x_0)^n](x\to x_0).$$

证 根据题设,使用 $n-1$ 次泰勒中值定理

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}=\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n-(x_0-x_0)^n}=\frac{f'(\xi_1)}{n(\xi_1-x_0)^{n-1}}$$

$$=\frac{f'(\xi_1)-f'(x_0)}{n[(\xi_1-x_0)^{n-1}-(x_0-x_0)^{n-1}]}$$

$$=\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2-x_0)^{n-2}}=\cdots=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!\ (\xi_{n-1}-x_0)}$$

其中 $\xi_1,\cdots\xi_{n-1}$均介于 x,x_0 之间,且当 $x\to x_0$ 时,$\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}$均趋于 x_0,利用 $f^{(n)}(x_0)$的定义即有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!\ (\xi_{n-1}-x_0)}=\frac{1}{n!}\lim_{\xi_{n-1}\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(x_0)}{\xi_{n-1}-x_0}$$

$$=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)=0,$$

故 $f(x)=o[(x-x_0)^n]$.

19. 设 $f(x)$在(a,b)内二阶可导,且 $f''(x)\geqslant0$. 证明对于(a,b)内任意两点 x_1、x_2 及 $0\leqslant t\leqslant1$,有

$$f[(1-t)x_1+tx_2]\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2).$$

证 由 $x_1,x_2\in(a,b)$知 $x_0=(1-t)x_1+tx_2\in(a,b)$,利用泰勒公式有

$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\dfrac{1}{2!}f''(\xi_1)(x_1-x_0)^2$,$\xi_1$ 介于 x_1,x_0 之间;

$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\dfrac{1}{2!}f''(\xi_2)(x_2-x_0)^2$,$\xi_2$ 介于 x_2,x_0 之间.

由 $f''(x)\geqslant0$ 知 $f''(\xi_1)\geqslant0,f''(\xi_2)\geqslant0$,故

$f(x_1)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)$及 $f(x_2)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)$,因此,$(1-t)f(x_1)+tf(x_2)\geqslant(1-t)f(x_0)+tf(x_0)+f'(x_0)[(1-t)(x_1-x_0)+t(x_2-x_0)]=f(x_0)+f'(x_0)[(1-t)x_1+tx_2-x_0]=f(x_0)$即 $f[(1-t)x_1+tx_2]\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$.

20. 试确定常数 a 和 b,使 $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 为当$x\to0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小.

解 利用泰勒公式

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x - a\sin x - \frac{b}{2}\sin 2x \\
&= x - a\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right] - \frac{b}{2}\left[2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + o(x^5)\right] \\
&= (1-a-b)x + \left(\frac{a}{6} + \frac{2b}{3}\right)x^3 - \left(\frac{a}{120} + \frac{2b}{15}\right)x^5 + o(x^5)
\end{aligned}
$$

按题意,应有$\begin{cases} 1-a-b=0, \\ \dfrac{a}{6}+\dfrac{2b}{3}=0, \\ \dfrac{a}{120}+\dfrac{2b}{15}\neq 0, \end{cases}$ 得 $a=\dfrac{4}{3}, b=-\dfrac{1}{3}$.

因此,当 $a=\dfrac{4}{3}, b=-\dfrac{1}{3}$时,$f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 是$x\to 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小.

第四章　不定积分

习题 4－1

1. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{x^2}$；　　(2) $\int x\sqrt{x}\,dx$；

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$；　　(4) $\int x^2\sqrt[3]{x}\,dx$；

(5) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$；　　(6) $\int \sqrt[m]{x^n}\,dx$；

(7) $\int 5x^3\,dx$；　　(8) $\int (x^2-3x+2)\,dx$；

(9) $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$（$g$ 是常数）；　　(10) $\int (x-2)^2\,dx$；

(11) $\int (x^2+1)^2\,dx$；　　(12) $\int (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)\,dx$；

(13) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\,dx$；　　(14) $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,dx$；

(15) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$；　　(16) $\int \left(2e^x+\frac{3}{x}\right)dx$；

(17) $\int \left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$；　　(18) $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx$；

(19) $\int 3^x e^x\,dx$；　　(20) $\int \frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}\,dx$；

(21) $\int \sec x(\sec x-\tan x)\,dx$；　　(22) $\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx$；

(23) $\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$；　　(24) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\,dx$；

(25) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,dx$；　　(26) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$.

解　(1) $\int \frac{dx}{x^2}=\int x^{-2}\,dx=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C=-\frac{1}{x}+C$.

(2) $\int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+C=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C.$

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C=2\sqrt{x}+C.$

(4) $\int x^2\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x=\int x^{\frac{7}{3}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\frac{7}{3}+1}x^{\frac{7}{3}+1}+C=\frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}}+C.$

(5) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x}}=\int x^{-\frac{5}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{-\frac{5}{2}+1}x^{-\frac{5}{2}+1}+C=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+C.$

(6) $\int\sqrt[m]{x^n}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\frac{n}{m}+1}x^{\frac{n}{m}+1}+C=\frac{m}{m+n}x^{\frac{m+n}{m}}+C.$

(7) $\int 5x^3\mathrm{d}x=\frac{5}{3+1}x^{3+1}+C=\frac{5}{4}x^4+C.$

(8) $\int(x^2-3x+2)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x-3\int x\,\mathrm{d}x+2\int\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x+C.$

(9) $\int\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2gh}}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int h^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}h=\frac{1}{\sqrt{2g}}\times2\sqrt{h}+C=\sqrt{\frac{2h}{g}}+C.$

(10) $\int(x-2)^2\mathrm{d}x=\int(x^2-4x+4)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x-4\int x\,\mathrm{d}x+4\int\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-2x^2+4x+C.$

(11) $\int(x^2+1)^2\mathrm{d}x=\int(x^4+2x^2+1)\mathrm{d}x=\int x^4\mathrm{d}x+2\int x^2\mathrm{d}x+\int\mathrm{d}x=\frac{x^5}{5}+\frac{2}{3}x^3+x+C.$

(12)
$$\begin{aligned}\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)\mathrm{d}x&=\int(x^2+x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}-1)\mathrm{d}x\\&=\int x^2\mathrm{d}x+\int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x-\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x\\&=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+C.\end{aligned}$$

(13)
$$\begin{aligned}\int\frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x&=\int(x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\mathrm{d}x\\&=\int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x-2\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C.\end{aligned}$$

(14) $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int\left(3x^2+\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 3\int x^2\mathrm{d}x +$

$\int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = x^3+\arctan x + C.$

(15) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = x - \arctan x + C.$

(16) $\int\left(2\mathrm{e}^x+\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x = 2\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x + 3\int\frac{\mathrm{d}x}{x} = 2\mathrm{e}^x + 3\ln|x| + C.$

(17) $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x = 3\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} - 2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

$= 3\arctan x - 2\arcsin x + C.$

(18) $\int \mathrm{e}^x\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x - \int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - 2x^{\frac{1}{2}} + C.$

(19) $\int 3^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int (3\mathrm{e})^x\mathrm{d}x = \frac{(3\mathrm{e})^x}{\ln(3\mathrm{e})} + C = \frac{3^x\mathrm{e}^x}{\ln 3+1} + C.$

(20) $\int \frac{2\cdot 3^x - 5\cdot 2^x}{3^x}\mathrm{d}x = 2\int\mathrm{d}x - 5\int\left(\frac{2}{3}\right)^x\mathrm{d}x = 2x - \frac{5}{\ln\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^x + C$

$= 2x - \frac{5}{\ln 2-\ln 3}\left(\frac{2}{3}\right)^x + C.$

(21) $\int \sec x(\sec x - \tan x)\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\mathrm{d}x - \int \sec x\tan x\mathrm{d}x$

$= \tan x - \sec x + C.$

(22) $\int \cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \int\frac{1+\cos x}{2}\mathrm{d}x = \frac{x+\sin x}{2} + C.$

(23) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x} = \int\frac{\sec^2 x}{2}\mathrm{d}x = \frac{\tan x}{2} + C.$

(24) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\mathrm{d}x = \int\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x}\mathrm{d}x = \sin x - \cos x + C.$

(25) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int(\csc^2 x - \sec^2 x)\mathrm{d}x$

$= \int\csc^2 x\mathrm{d}x - \int\sec^2 x\mathrm{d}x = -(\cot x + \tan x) + C.$

(26) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int(x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{5}{4}})\mathrm{d}x = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}} + C$

$= \frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}} + C.$

2. 一曲线通过点$(\mathrm{e}^2,3)$，且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数，求该曲线的方程.

解 设曲线方程为 $y=f(x)$，则点(x,y)处的切线斜率为 $f'(x)$，由条件得

$$f'(x)=\frac{1}{x},$$

因此 $f(x)$为$\frac{1}{x}$的一个原函数，故有 $f(x)=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$.

又，根据条件曲线过点$(\mathrm{e}^2,3)$，有 $f(\mathrm{e}^2)=3$ 解得 $C=1$，即得所求曲线方程为

$$y=\ln x+1.$$

3. 一物体由静止开始运动，经 t 秒后的速度是 $3t^2(\mathrm{m/s})$，问

(1) 在 3 秒后物体离开出发点的距离是多少？

(2) 物体走完 360 m 需要多少时间？

解 (1) 设此物体自原点沿横轴正向由静止开始运动，位移函数为 $s=s(t)$，则

$$s'(t)=v(t)=3t^2,$$

于是由假设可知 $s(0)=0$，故 $s(t)=t^3$，所求距离为 $s(3)=27(\mathrm{m})$.

(2) 由 $t^3=360$，得 $t=\sqrt[3]{360}\approx 7.11(\mathrm{s})$.

4. 证明函数$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$，$\mathrm{e}^x\operatorname{sh}x$ 和 $\mathrm{e}^x\operatorname{ch}x$ 都是$\frac{\mathrm{e}^x}{\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x}$的原函数.

解 由于 $\mathrm{e}^x\operatorname{sh}x=\mathrm{e}^x\cdot\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}-\frac{1}{2}$，$\mathrm{e}^x\operatorname{ch}x=\mathrm{e}^x\cdot\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+\frac{1}{2}$，

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x}=\frac{\mathrm{e}^x}{\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}-\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}}=\mathrm{e}^{2x}.$$

根据求导公式可知，$\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\right)'=\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+\frac{1}{2}\right)'=\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right)'=\mathrm{e}^{2x}$，故得结论.

习 题 4－2

1. 在下列各式等号右端的空白处填入适当的系数，使等式成立（例如：$\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{d}(4x+7)$）：

(1) $\mathrm{d}x=\quad\mathrm{d}(ax)$；　　(2) $\mathrm{d}x=\quad\mathrm{d}(7x-3)$；

(3) $x\mathrm{d}x=\quad\mathrm{d}(x^2)$；　　(4) $x\mathrm{d}x=\quad\mathrm{d}(5x^2)$；

(5) $x\mathrm{d}x=\quad\mathrm{d}(1-x^2)$；　　(6) $x^3\mathrm{d}x=\quad\mathrm{d}(3x^4-2)$；

(7) $\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\quad\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})$；　　(8) $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\quad\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}})$；

(9) $\sin\frac{3}{2}x\mathrm{d}x=\quad\mathrm{d}(\cos\frac{3}{2}x)$；　　(10) $\frac{\mathrm{d}x}{x}=\quad\mathrm{d}(5\ln|x|)$；

(11) $\frac{\mathrm{d}x}{x}=\underline{\qquad}\mathrm{d}(3-5\ln|x|)$;　　(12) $\frac{\mathrm{d}x}{1+9x^2}=\underline{\qquad}\mathrm{d}(\arctan 3x)$;

(13) $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\underline{\qquad}\mathrm{d}(1-\arcsin x)$;　　(14) $\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\underline{\qquad}\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$.

解 (1) $\frac{1}{a}$;　(2) $\frac{1}{7}$;　(3) $\frac{1}{2}$;　(4) $\frac{1}{10}$;　(5) $-\frac{1}{2}$;

(6) $\frac{1}{12}$;　(7) $\frac{1}{2}$;　(8) 2;　(9) $-\frac{2}{3}$;　(10) $\frac{1}{5}$;

(11) $-\frac{1}{5}$;　(12) $\frac{1}{3}$;　(13) -1;　(14) -1.

2. 求下列不定积分(其中 a、b、ω、φ 均为常数):

(1) $\int \mathrm{e}^{5t}\mathrm{d}t$;　　(2) $\int (3-2x)^3\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-2x}$;　　(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2-3x}}$;

(5) $\int (\sin ax-\mathrm{e}^{\frac{x}{b}})\mathrm{d}x$;　　(6) $\int \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$;

(7) $\int \tan^{10}x\cdot\sec^2 x\,\mathrm{d}x$;　　(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x}$;

(9) $\int \tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$;　　(10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x}$;

(11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$;　　(12) $\int x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$;

(13) $\int x\cos(x^2)\mathrm{d}x$;　　(14) $\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}\mathrm{d}x$;

(15) $\int \frac{3x^3}{1-x^4}\mathrm{d}x$;　　(16) $\int \cos^2(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t$;

(17) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$;　　(18) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x$;

(19) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}\mathrm{d}x$;　　(20) $\int \frac{x^3}{9+x^2}\mathrm{d}x$;

(21) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-1}$;　　(22) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-2)}$;

(23) $\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$;　　(24) $\int \cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t$;

(25) $\int \sin 2x\cos 3x\,\mathrm{d}x$;　　(26) $\int \cos x\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$;

(27) $\int \sin 5x \sin 7x \mathrm{d}x$；

(28) $\int \tan^3 x \sec x \mathrm{d}x$；

(29) $\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$；

(30) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} \mathrm{d}x$；

(31) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$；

(32) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2} \mathrm{d}x$；

(33) $\int \frac{\ln \tan x}{\cos x \sin x} \mathrm{d}x$；

(34) $\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} (a>0)$；

(35) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$；

(36) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$；

(37) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} \mathrm{d}x$；

(38) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}}$；

(39) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}$；

(40) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

解 (1) 令 $u=5t$，由第一类换元法得 $\int \mathrm{e}^{5t}\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\int \mathrm{e}^u \mathrm{d}u = \frac{1}{5}\mathrm{e}^u + C = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5t} + C$.

(2) 令 $u=3-2x$，由第一类换元法得 $\int (3-2x)^3 \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int u^3 \mathrm{d}u = -\frac{u^4}{8} + C = -\frac{(3-2x)^4}{8} + C$.

(3) 令 $u=1-2x$，由第一类换元法得 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-2x} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{1}{2}\ln|u| + C = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C$.

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2-3x}} = \int -\frac{1}{3}(2-3x)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}(2-3x)$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}} + C = -\frac{1}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}} + C.$$

(5) $\int (\sin ax - \mathrm{e}^{\frac{x}{b}})\mathrm{d}x = \int \sin ax \mathrm{d}x - \int \mathrm{e}^{\frac{x}{b}}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{1}{a}\sin ax \mathrm{d}(ax) - \int b\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{a}(-\cos ax) - b\mathrm{e}^{\frac{x}{b}} + C = -\frac{\cos ax}{a} - b\mathrm{e}^{\frac{x}{b}} + C.$$

(6) $\int \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int 2\sin\sqrt{t}\mathrm{d}\sqrt{t} = -2\cos\sqrt{t} + C$.

(7) $\int \tan^{10} x \cdot \sec^2 x \mathrm{d}x = \int \tan^{10} x \mathrm{d} \tan x = \frac{1}{11}\tan^{11} x + C.$

(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln \ln x} = \int \frac{\mathrm{d} \ln x}{\ln x \ln \ln x} = \int \frac{\mathrm{d} \ln \ln x}{\ln \ln x} = \ln|\ln \ln x| + C.$

(9) $\int \tan \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \int \tan \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$

$$= \int \tan \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})$$

$$= -\ln\left|\cos \sqrt{1+x^2}\right| + C.$$

(10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x} = \int \csc 2x \mathrm{d}(2x) = \ln|\csc 2x - \cot 2x| + C = \ln|\tan x| + C.$

(11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \int \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \arctan(\mathrm{e}^x) + C.$

(12) $\int x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}(-x^2) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + C.$

(13) $\int x\cos(x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos(x^2)\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C.$

(14) $\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\int (2-3x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(2-3x^2)$

$$= -\frac{1}{6}\cdot 2(2-3x^2)^{\frac{1}{2}} + C = -\frac{\sqrt{2-3x^2}}{3} + C.$$

(15) $\int \frac{3x^3}{1-x^4}\mathrm{d}x = -\frac{3}{4}\int \frac{1}{1-x^4}\mathrm{d}(1-x^4) = -\frac{3}{4}\ln|1-x^4| + C.$

(16) $\int \cos^2(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t = -\frac{1}{\omega}\int \cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}[\cos(\omega t+\varphi)]$

$$= -\frac{1}{3\omega}\cos^3(\omega t+\varphi) + C.$$

(17) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos^3 x}\mathrm{d}(\cos x) = \frac{1}{2\cos^2 x} + C.$

(18) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x - \cos x)}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} = \frac{3}{2}(\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + C.$

(19) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{2x}{3}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}} + \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}(9-4x^2)}{\sqrt{9-4x^2}}$

$$= \frac{\arcsin \frac{2x}{3}}{2} + \frac{\sqrt{9-4x^2}}{4} + C.$$

(20) $\int \frac{x^3}{9+x^2}dx = \int x dx - \frac{9}{2}\int \frac{d(9+x^2)}{9+x^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}\ln(9+x^2) + C.$

(21) $\int \frac{dx}{2x^2-1} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\sqrt{2}x-1} - \frac{1}{\sqrt{2}x+1}\right)dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}\right| + C.$

(22) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)} = \int \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-2}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C.$$

(23) $\int \cos^3 x dx = \int (1-\sin^2 x)d(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$

(24) $\int \cos^2(\omega t+\varphi)dt = \int \frac{\cos 2(\omega t+\varphi)+1}{2}dt = \frac{\sin 2(\omega t+\varphi)}{4\omega} + \frac{t}{2} + C.$

(25) $\int \sin 2x\cos 3x dx = \int \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x)dx = -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C.$

(26) $\int \cos x\cos \frac{x}{2}dx = \int \frac{1}{2}\left(\cos \frac{3}{2}x + \cos \frac{1}{2}x\right)dx$

$$= \frac{1}{3}\sin \frac{3}{2}x + \sin \frac{1}{2}x + C.$$

(27) $\int \sin 5x\sin 7x dx = \int -\frac{1}{2}(\cos 12x - \cos 2x)dx$

$$= -\frac{1}{24}\sin 12x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

(28) $\int \tan^3 x\sec x dx = \int (\sec^2 x - 1)d\sec x = \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C.$

(29) $\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int -10^{2\arccos x}d\arccos x = -\frac{10^{2\arccos x}}{2\ln 10} + C.$

(30) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \int \frac{2\arctan\sqrt{x}}{1+x}d\sqrt{x} = \int 2\arctan\sqrt{x}d(\arctan\sqrt{x})$

$$= (\arctan\sqrt{x})^2 + C.$$

(31) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d\arcsin x}{(\arcsin x)^2} = -\frac{1}{\arcsin x} + C.$

(32) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx = \int \frac{d(x\ln x)}{(x\ln x)^2} = -\frac{1}{x\ln x} + C.$

(33) $\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx = \int \frac{\ln\tan x}{\tan x}d\tan x = \int \ln\tan x d(\ln\tan x)$

$$= \frac{(\ln\tan x)^2}{2} + C.$$

(34) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \xlongequal{x = a\sin u} \int a^2 \sin^2 u du = a^2 \int \frac{1-\cos 2u}{2} du$

$$= \frac{a^2}{2}\left(u - \frac{\sin 2u}{2}\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin \frac{x}{a} - \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C.$$

(35) 当 $x>0$ 时，$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \xlongequal{x = \frac{1}{t}} -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C$

$$= -\arcsin \frac{1}{x} + C,$$

当 $x<0$ 时，$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \xlongequal{x = -\frac{1}{t}} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{1}{x} + C$，故可统一写作

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\arcsin \frac{1}{|x|} + C.$$

(36) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \xlongequal{x = \tan u} \int \cos u du = \sin u + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$

(37) 当 $x>0$ 时，令 $x = 3\sec u\left(0 \leqslant u < \frac{\pi}{2}\right)$，

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx = \int 3\tan^2 u du = 3\int (\sec^2 u - 1) du = 3\tan u - 3u + C$$

$$= \sqrt{x^2-9} - 3\arccos \frac{3}{x} + C;$$

当 $x<0$ 时，令 $x = 3\sec u\left(\frac{\pi}{2} < u \leqslant \pi\right)$，

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx = -\int 3\tan^2 u du = -3\int (\sec^2 u - 1) du = -3\tan u + 3u + C$$

$$= \sqrt{x^2-9} + 3\arccos \frac{3}{x} + C'$$

$$= \sqrt{x^2-9} - 3\arccos \frac{3}{-x} + C' + 3\pi,$$

故可统一写作 $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx = \sqrt{x^2-9} - 3\arccos \frac{3}{|x|} + C.$

(38) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}} \xlongequal{x = \frac{u^2}{2}} \int \frac{u du}{1+u} = u - \ln(1+u) + C = \sqrt{2x} - \ln(1+\sqrt{2x}) + C.$

(39) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}} \xlongequal{x=\sin t} \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{1+\cos t} = \int \frac{\left(2\cos^2\frac{t}{2}-1\right)\mathrm{d}t}{2\cos^2\frac{t}{2}} = t - \tan\frac{t}{2} + C$

$$= \arcsin x - \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + C.$$

(40) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}} \xlongequal{x=\sin t} \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}$，记 $\displaystyle I_1 = \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}$，

$\displaystyle I_2 = \int \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}$，利用 $\displaystyle I_1 + I_2 = \int \mathrm{d}t = t + C$，

$$I_1 - I_2 = \int \frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}(\sin t+\cos t)}{\sin t+\cos t} = \ln|\sin t+\cos t| + C,$$

求得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}} = \frac{\arcsin x + \ln\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|}{2} + C.$$

对积分 $\displaystyle I_1 = \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}$ 也可利用 $\sin t + \cos t = \sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$，再作换元 $t = u - \frac{\pi}{4}$ 来求得.

注 这里(1)—(33)的计算中主要利用了第一类换元法，(34)—(40)的计算中主要利用了第二类换元法.

习 题 4－3

求下列不定积分：

1. $\int x\sin x\,\mathrm{d}x$；
2. $\int \ln x\,\mathrm{d}x$；
3. $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$；
4. $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；
5. $\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x$；
6. $\int \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$；
7. $\int \mathrm{e}^{-2x}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x$；
8. $\int x\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$；
9. $\int x^2\arctan x\,\mathrm{d}x$；
10. $\int x\tan^2 x\,\mathrm{d}x$；
11. $\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$；
12. $\int t\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$；
13. $\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x$；
14. $\int x\sin x\cos x\,\mathrm{d}x$；

15. $\int x^2\cos^2\frac{x}{2}dx$;

16. $\int x\ln(x-1)dx$;

17. $\int (x^2-1)\sin 2x dx$;

18. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx$;

19. $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$;

20. $\int \cos\ln x dx$;

21. $\int (\arcsin x)^2 dx$;

22. $\int e^x\sin^2 x dx$.

解 1. $\int x\sin x dx = -\int x d(\cos x) = -x\cos x + \int \cos x dx$

$$= -x\cos x + \sin x + C.$$

2. $\int \ln x dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C.$

3. $\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

4. $\int xe^{-x}dx = -\int x de^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$

5. $\int x^2\ln x dx = \frac{1}{3}\int \ln x d(x^3) = \frac{x^3\ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^3\ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C.$

6. $\int e^{-x}\cos x dx = -\int \cos x d(e^{-x}) = -e^{-x}\cos x + \int e^{-x}(-\sin x)dx$

$$= -e^{-x}\cos x + \int \sin x d(e^{-x})$$

$$= -e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\cos x dx,$$

故有

$$\int e^{-x}\cos x dx = \frac{e^{-x}(\sin x - \cos x)}{2} + C.$$

7. $\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx = -\frac{1}{2}\int \sin\frac{x}{2}d(e^{-2x})$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{8}\int \cos\frac{x}{2}d(e^{-2x})$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{8}e^{-2x}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\int e^{-2x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{8}\left(4\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)e^{-2x} - \frac{1}{16}\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx,$$

故 $$\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx = -\frac{2}{17}\left(4\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)e^{-2x} + C.$$

$$8.\ \int x\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x = 2\int x\,\mathrm{d}\sin\frac{x}{2} = 2x\sin\frac{x}{2} - 2\int\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$= 2x\sin\frac{x}{2} + 4\cos\frac{x}{2} + C.$$

$$9.\ \int x^2\arctan x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\arctan x\,\mathrm{d}(x^3) = \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C.$$

$$10.\ \int x\tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int x(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\tan x) - \frac{x^2}{2}$$

$$= x\tan x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.$$

$$11.\ \int x^2\cos x\,\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}(\sin x) = x^2\sin x - \int 2x\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= x^2\sin x + \int 2x\,\mathrm{d}(\cos x)$$

$$= x^2\sin x + 2x\cos x - \int 2\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

$$12.\ \int t\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int t\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2t}) = -\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t} + C.$$

$$13.\ \int\ln^2 x\,\mathrm{d}x = x\ln^2 x - \int 2\ln x\,\mathrm{d}x = x\ln^2 x - 2x\ln x + \int 2\mathrm{d}x$$

$$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C.$$

$$14.\ \int x\sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \int -\frac{x}{4}\mathrm{d}(\cos 2x) = -\frac{x\cos 2x}{4} + \frac{1}{4}\int\cos 2x\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{x\cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + C.$$

$$15.\ \int x^2\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x^2(1+\cos x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}(\sin x)$$

$$= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\sin x - \int x\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\sin x + \int x\,\mathrm{d}(\cos x)$$

$$= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\sin x + x\cos x - \int\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\sin x+x\cos x-\sin x+C.$$

16. $\int x\ln(x-1)dx=\frac{1}{2}\int\ln(x-1)d(x^2-1)$

$$=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int(x+1)dx$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+C.$$

17. $\int(x^2-1)\sin 2x dx=-\frac{1}{2}\int(x^2-1)d(\cos 2x)$

$$=-\frac{1}{2}(x^2-1)\cos 2x+\int x\cos 2x dx$$

$$=-\frac{1}{2}(x^2-1)\cos 2x+\frac{1}{2}\int x d(\sin 2x)$$

$$=-\frac{1}{2}(x^2-1)\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2x dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{3}{2}\right)\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+C.$$

18. $\int\frac{\ln^3 x}{x^2}dx=\int-\ln^3 x d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln^3 x}{x}-3\int\ln^2 x d\left(\frac{1}{x}\right)$

$$=-\frac{\ln^3 x}{x}-3\left[\frac{\ln^2 x}{x}+2\int\ln x d\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$=-\frac{\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6}{x}+C.$$

19. $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx\xlongequal{x=u^3}\int 3u^2e^u du=\int 3u^2 d(e^u)=3u^2e^u-\int 6u d(e^u)$

$$=(3u^2-6u+6)e^u+C=3e^{\sqrt[3]{x}}(x^{2/3}-2x^{1/3}+2)+C.$$

20. $\int\cos\ln x dx\xlongequal{x=e^u}\int e^u\cos u du$,

而 $\int e^u\cos u du=\int\cos u d(e^u)=e^u\cos u+\int e^u\sin u du$

$$=e^u\cos u+\int\sin u d(e^u)$$

$$=e^u\cos u+e^u\sin u-\int e^u\cos u du,$$

因此 $\int e^u\cos u du=\frac{e^u(\cos u+\sin u)}{2}+C$,故有

$$\int\cos\ln x dx=\frac{x(\cos\ln x+\sin\ln x)}{2}+C.$$

21. $\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x = x(\arcsin x)^2 - \int\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$$= x(\arcsin x)^2 + \int 2\arcsin x\,\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

22. $\int e^x\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^x(1-\cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\int e^x\cos 2x\,\mathrm{d}x$,

$$\int e^x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \int\cos 2x\,\mathrm{d}(e^x) = e^x\cos 2x + 2\int e^x\sin 2x\,\mathrm{d}x$$

$$= e^x\cos 2x + 2\int\sin 2x\,\mathrm{d}(e^x)$$

$$= e^x\cos 2x + 2e^x\sin 2x - 4\int e^x\cos 2x\,\mathrm{d}x,$$

得 $\int e^x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{e^x\cos 2x + 2e^x\sin 2x}{5} + C$,因此有

$$\int e^x\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{5}e^x\sin 2x - \frac{1}{10}e^x\cos 2x + C.$$

习　题　4－4

求下列不定积分：

1. $\int\frac{x^3}{x+3}\mathrm{d}x$；

2. $\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}\mathrm{d}x$；

3. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}\mathrm{d}x$；

4. $\int\frac{3}{x^3+1}\mathrm{d}x$；

5. $\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$；

6. $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x$；

7. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$；

8. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x)}$；

9. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$；

10. $\int\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x$；

11. $\int\frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$；

12. $\int\frac{\mathrm{d}x}{3+\sin^2 x}$；

13. $\int\frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x}$；

14. $\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$；

15. $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$；

16. $\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$；

17. $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+1}}$；

18. $\int\frac{(\sqrt{x})^3+1}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x$；

19. $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx$;　　20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;

21. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$;　　22. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

解 1. $\int \frac{x^3}{x+3}dx = \int \left(x^2 - 3x + 9 - \frac{27}{x+3}\right)dx$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27\ln|x+3| + C.$$

2. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx = \int \frac{d(x^2+3x-10)}{x^2+3x-10} = \ln|x^2+3x-10| + C.$

3. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx = \int \left(x^2+x+1+\frac{8}{x}-\frac{3}{x-1}-\frac{4}{x+1}\right)dx$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+8\ln|x|-3\ln|x-1|-4\ln|x+1|+C.$$

4. $\int \frac{3}{1+x^3}dx = \int \frac{3}{(1+x)(x^2-x+1)}dx = \int \left(\frac{1}{1+x}+\frac{2-x}{x^2-x+1}\right)dx$

$$= \ln|1+x| - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx$$

$$= \ln|1+x| - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}d\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \ln|1+x| - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

5. $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \int \left[-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{2}{x+2}-\frac{3}{2(x+3)}\right]dx$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + C.$$

6. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx = \int \left[\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}\right]dx$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

7. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

8. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)} = \int \left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1+x}{2(x^2+1)}\right]dx$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| \quad \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + C.$$

9. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \int \left(\frac{-x}{x^2+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x$

$$= -\frac{\ln(x^2+1)}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{x^2+x+1} +$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\ln(x^2+1)}{2} + \frac{\ln(x^2+x+1)}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

10. **解法一**

$$\int \frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \left[\frac{-x+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right]\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) +$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4}\left[-\arctan(\sqrt{2}x-1) + \frac{1}{2}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)\right] +$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\arctan(\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)\right] + C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x-1) +$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1) + C.$$

解法二

$$\int \frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C.$$

11. $$\int\frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\left[-\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\int\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2}-\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x,$$

令 $u=x+\frac{1}{2}$,并记 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则

$$\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(u^2+a^2)^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2a^2}\left[\frac{u}{u^2+a^2}+\int\frac{1}{u^2+a^2}\mathrm{d}u\right]$$

$$=\frac{u}{2a^2(u^2+a^2)}+\frac{1}{2a^2}\int\frac{1}{u^2+a^2}\mathrm{d}u,$$

由此得

$$\int\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x+\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{1}{u^2+a^2}\mathrm{d}u+\frac{3}{2}\left[\frac{u}{2a^2(u^2+a^2)}+\frac{1}{2a^2}\int\frac{1}{u^2+a^2}\mathrm{d}u\right]$$

$$=\frac{3u}{4a^2(u^2+a^2)}+\left(\frac{3}{4a^2}+1\right)\int\frac{1}{u^2+a^2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{3u}{4a^2(u^2+a^2)}+\frac{1}{a}\left(\frac{3}{4a^2}+1\right)\arctan\frac{u}{a}+C_1$$

$$=\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)}+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C_1,$$

因此有

$$\int\frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2(x^2+x+1)}-\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)}-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$= -\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

12. $\int \frac{dx}{3+\sin^2 x} = -\int \frac{d(\cot x)}{3\csc^2 x + 1} \xlongequal{u=\cot x} -\int \frac{du}{3u^2+4}$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}u}{2} + C$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}\cot x}{2} + C.$$

13. 令 $u = \tan\frac{x}{2}$，则

$$\int \frac{dx}{3+\cos x} = \int \frac{1}{3+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}du = \int \frac{1}{2+u^2}du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C.$$

14. 令 $u = \tan\frac{x}{2}$，则

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{1}{2+\frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}du = \int \frac{1}{u^2+u+1}du$$

$$= \int \frac{1}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}du = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C.$$

15. 令 $u = \tan\frac{x}{2}$，则

$$\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}du$$

$$= \int \frac{du}{1+u} = \ln|1+u| + C = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

16. 令 $u = \tan\frac{x}{2}$，则

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \int \frac{1}{\frac{4u}{1+u^2} - \frac{1-u^2}{1+u^2} + 5} \cdot \frac{2}{1+u^2}du$$

$$= \int \frac{1}{3u^2 + 2u + 2} \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(u + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} \mathrm{d}\left(u + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3u + 1}{\sqrt{5}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3\tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C.$$

17. 令 $u = \sqrt[3]{x+1}$，即 $x = u^3 - 1$，则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sqrt[3]{x+1}} = \int \frac{3u^2}{1+u} \mathrm{d}u = \int \left(3u - 3 + \frac{3}{1+u}\right) \mathrm{d}u$$

$$= \frac{3}{2}u^2 - 3u + 3\ln|1+u| + C$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln\left|1 + \sqrt[3]{x+1}\right| + C.$$

18. $$\int \frac{(\sqrt{x})^3 + 1}{\sqrt{x} + 1} \mathrm{d}x = \int \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} \mathrm{d}x$$

$$= \int (x - \sqrt{x} + 1) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + x + C.$$

19. 令 $u = \sqrt{x+1}$，即 $x = u^2 - 1$，则

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1} \mathrm{d}x = \int \frac{u-1}{u+1} \cdot 2u \mathrm{d}u = 2\int \left(u - 2 + \frac{2}{u+1}\right) \mathrm{d}u$$

$$= u^2 - 4u + 4\ln|u+1| + C_1$$

$$= x - 4\sqrt{x+1} + 4\ln\left(\sqrt{x+1} + 1\right) + C.$$

20. 令 $u = \sqrt[4]{x}$，即 $x = u^4$，则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} = \int \frac{1}{u^2 + u} \cdot 4u^3 \mathrm{d}u = 4\int \left(u - 1 + \frac{1}{u+1}\right) \mathrm{d}u$$

$$= 2u^2 - 4u + 4\ln|u+1| + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(\sqrt[4]{x} + 1) + C.$$

21. **方法一**

令 $u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$，即 $x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$，则

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int u \cdot \frac{1+u^2}{1-u^2} \cdot \frac{-4u}{(1+u^2)^2} \mathrm{d}u = \int \frac{-4u^2}{(1-u^2)(1+u^2)} \mathrm{d}u$$

$$= \int\left(\frac{2}{1+u^2} - \frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u}\right)du$$
$$= 2\arctan u + \ln|1-u| - \ln|1+u| + C$$
$$= 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + C.$$

方法二

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x} = \int\frac{1-x}{x\sqrt{1-x^2}}dx \xlongequal{x=\sin u} \int\frac{1-\sin u}{\sin u}du = \int\csc u\,du - \int du$$
$$= \ln|\csc u - \cot u| - u + C$$
$$= \ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{|x|} - \arcsin x + C.$$

22. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int\frac{1}{x^2-1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$，令 $u = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$，即 $x = \frac{u^3+1}{u^3-1}$，得到

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int\frac{u}{\left(\frac{u^3+1}{u^3-1}\right)^2-1}\cdot\frac{-6u^2}{(u^3-1)^2}du = -\frac{3}{2}\int du$$
$$= -\frac{3}{2}u + C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

习 题 4-5

利用积分表计算下列不定积分：

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$；
2. $\int\frac{1}{x^2+2x+5}dx$；
3. $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x+x^2}}$；
4. $\int\sqrt{2x^2+9}\,dx$；
5. $\int\sqrt{3x^2-2}\,dx$；
6. $\int e^{2x}\cos x\,dx$；
7. $\int x\arcsin\frac{x}{2}dx$；
8. $\int\frac{dx}{(x^2+9)^2}$；
9. $\int\frac{dx}{\sin^3 x}$；
10. $\int e^{-2x}\sin 3x\,dx$；
11. $\int\sin 3x\sin 5x\,dx$；
12. $\int\ln^3 x\,dx$；

13. $\int \frac{1}{x^2(1-x)}dx$;

14. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$;

15. $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$;

16. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$;

17. $\int \frac{x}{(2+3x)^2}dx$;

18. $\int \cos^6 x dx$;

19. $\int x^2\sqrt{x^2-2}dx$;

20. $\int \frac{1}{2+5\cos x}dx$;

21. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-1}}$;

22. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$;

23. $\int \frac{x+5}{x^2-2x-1}dx$;

24. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$;

25. $\int \frac{x^4}{25+4x^2}dx$.

解　注意:下列各题中最后括号内所标的是所用积分公式在教材上册附录Ⅲ积分表中的编号.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2-3^2}} = \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{(2x)^2-3^2}\right|+C$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-9}\right|+C.(45)$$

2. $\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+2^2}d(x+1) = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C.(19)$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x+x^2}} = \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+1}} = \ln\left[x-2+\sqrt{(x-2)^2+1}\right]+C$

$$= \ln\left(x-2+\sqrt{5-4x+x^2}\right)+C.(31)$$

4. $\int \sqrt{2x^2+9}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sqrt{(\sqrt{2}x)^2+3^2}d(\sqrt{2}x)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{\sqrt{2}x}{2}\sqrt{(\sqrt{2}x)^2+3^2}+\frac{3^2}{2}\ln\left[\sqrt{2}x+\sqrt{(\sqrt{2}x)^2+3^2}\right]\right\}+C$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{2x^2+9}+\frac{9\sqrt{2}}{4}\ln\left(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+9}\right)+C.(39)$$

5. $\int \sqrt{3x^2-2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \sqrt{(\sqrt{3}x)^2-(\sqrt{2})^2}d(\sqrt{3}x)$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}x}{2}\sqrt{(\sqrt{3}x)^2-(\sqrt{2})^2}-\frac{(\sqrt{2})^2}{2}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{(\sqrt{3}x)^2-(\sqrt{2})^2}\right|\right]+C$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{3x^2-2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}\right|+C.(53)$$

6. $\int e^{2x}\cos x\,dx = \frac{1}{2^2+1^2}e^{2x}(\sin x + 2\cos x) + C$

$= \frac{1}{5}e^{2x}(\sin x + 2\cos x) + C.$ (129)

7. $\int x\arcsin\frac{x}{2}dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{4}\sqrt{2^2 - x^2} + C$

$= \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{4}\sqrt{4 - x^2} + C.$ (114)

8. $\int\frac{dx}{(x^2+9)^2} = \int\frac{dx}{(x^2+3^2)^2}$

$= \frac{x}{2(2-1)3^2(x^2+3^2)} + \frac{2\times 2-3}{2(2-1)3^2}\int\frac{dx}{x^2+3^2}$

$= \frac{x}{18(x^2+9)} + \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + C$

$= \frac{x}{18(x^2+9)} + \frac{1}{54}\arctan\frac{x}{3} + C.$ (20,19)

9. $\int\frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$ (97,
88)

10. $\int e^{-2x}\sin 3x\,dx = \frac{1}{(-2)^2+3^2}e^{-2x}(-2\sin 3x - 3\cos 3x) + C$

$= -\frac{e^{-2x}}{13}(2\sin 3x + 3\cos 3x) + C.$ (128)

11. $\int\sin 3x\sin 5x\,dx = -\frac{1}{2(3+5)}\sin(3+5)x + \frac{1}{2(3-5)}\sin(3-5)x + C$

$= -\frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$ (101)

12. $\int\ln^3 x\,dx = x(\ln x)^3 - 3\int\ln^2 x\,dx$

$= x(\ln x)^3 - 3\left[x(\ln x)^2 - 2\int\ln x\,dx\right]$

$= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6\int\ln x\,dx$

$= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6(x\ln x - x) + C$

$= x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6x + C.$ (135,132)

13. $\int\frac{1}{x^2(1-x)}dx = -\frac{1}{x} - \ln\left|\frac{1-x}{x}\right| + C.$ (6)

14. $\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx = 2\sqrt{x-1} - \int\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$

$$= 2\sqrt{x-1} - 2\arctan\sqrt{x-1} + C.(17,15)$$

15. $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}dx$

$$= \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + C.(20,19)$$

16. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \arccos\frac{1}{|x|} + C.(51)$

17. $\int \frac{x}{(2+3x)^2}dx = \frac{1}{9}\left(\ln|2+3x| + \frac{2}{2+3x}\right) + C.(7)$

18. $\int \cos^6 x dx = \frac{1}{6}\cos^5 x\sin x + \frac{5}{6}\int \cos^4 x dx$

$$= \frac{1}{6}\cos^5 x\sin x + \frac{5}{6}\left(\frac{1}{4}\cos^3 x\sin x + \frac{3}{4}\int \cos^2 x dx\right)$$

$$= \frac{1}{6}\cos^5 x\sin x + \frac{5}{24}\cos^3 x\sin x + \frac{5}{8}\int \cos^2 x dx$$

$$= \frac{1}{6}\cos^5 x\sin x + \frac{5}{24}\cos^3 x\sin x + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{2}\cos x\sin x + \frac{1}{2}\int dx\right)$$

$$= \frac{1}{6}\cos^5 x\sin x + \frac{5}{24}\cos^3 x\sin x + \frac{5}{16}\cos x\sin x + \frac{5}{16}x + C.(96)$$

19. $\int x^2\sqrt{x^2-2}dx = \frac{x}{8}(2x^2-2)\sqrt{x^2-2} - \frac{4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right| + C$

$$= \frac{x}{4}(x^2-1)\sqrt{x^2-2} - \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right| + C.(56)$$

20. $\int \frac{1}{2+5\cos x}dx = \frac{1}{7}\sqrt{\frac{7}{3}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{7}{3}}}{\tan\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{7}{3}}}\right| + C$

$$= \frac{1}{\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}+\sqrt{7}}{\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}-\sqrt{7}}\right| + C.(106)$$

21. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-1}} = -\frac{\sqrt{2x-1}}{-x} - \frac{2}{-2}\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}}$

$$= \frac{\sqrt{2x-1}}{x} + 2\arctan\sqrt{2x-1} + C.(16,15)$$

22. **方法一**

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C.(59,61)$$

方法二

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x = (x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 2\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{2}} + C$$

$$= \sqrt{1-x^2} - 2\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{2}} + C.(80)$$

23. $\int \frac{x+5}{x^2-2x-1}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{x^2-2x-1}\mathrm{d}x + 5\int \frac{1}{x^2-2x-1}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-1| - \frac{-2}{2}\int \frac{1}{x^2-2x-1}\mathrm{d}x + 5\int \frac{1}{x^2-2x-1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-1| + 6\cdot\frac{1}{\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}\cdot$$

$$\ln\left|\frac{2x-2-\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2x-2+\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-1| + \frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-(\sqrt{2}+1)}{x+(\sqrt{2}-1)}\right| + C.(30,29)$$

24. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}} = -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C.(78)$

25. $\int \frac{x^4}{25+4x^2}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{25}{16} + \frac{625}{16}\cdot\frac{1}{25+4x^2}\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{x^3}{12} - \frac{25}{16}x + \frac{625}{32}\int\frac{1}{5^2+(2x)^2}\mathrm{d}(2x)$$

$$= \frac{x^3}{12} - \frac{25}{16}x + \frac{625}{32}\cdot\frac{1}{5}\arctan\frac{2x}{5} + C$$

$$= \frac{x^3}{12} - \frac{25}{16}x + \frac{125}{32}\arctan\frac{2x}{5} + C.(19)$$

总 习 题 四

求下列不定积分(其中 a、b 为常数):

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x - e^{-x}}$.
2. $\int \frac{x}{(1-x)^3}\mathrm{d}x$.
3. $\int \frac{x^2}{a^6 - x^6}\mathrm{d}x$.
4. $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}\mathrm{d}x$.
5. $\int \frac{\ln\ln x}{x}\mathrm{d}x$.
6. $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$.

7. $\int \tan^4 x\,\mathrm{d}x$.

8. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,\mathrm{d}x$.

9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)}$.

10. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$.

11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}$.

12. $\int x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

13. $\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$.

14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$.

15. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{5/2}}$.

17. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

18. $\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

19. $\int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$.

20. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$.

21. $\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

22. $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

23. $\int \frac{x^3}{(1+x^8)^2}\,\mathrm{d}x$.

24. $\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}\,\mathrm{d}x$.

25. $\int \frac{\mathrm{d}x}{16-x^4}$.

26. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$.

27. $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

28. $\int \mathrm{e}^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

29. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x$.

30. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$.

31. $\int \frac{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{4x}-\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$.

32. $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

33. $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$.

34. $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$.

35. $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,\mathrm{d}x$.

36. $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

37. $\int \frac{\cot x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$.

38. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos x}$.

39. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$.

40. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

解 1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}} = \int \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}-1} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{|\mathrm{e}^x-1|}{\mathrm{e}^x+1}+C.$$

2. $\int \frac{x}{(1-x)^3}dx \xlongequal{u=1-x} \int\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u^3}\right)du = -\frac{1}{u}+\frac{1}{2u^2}+C$

$$= -\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2(1-x)^2}+C.$$

3. $\int \frac{x^2}{a^6-x^6}dx = \int \frac{d(x^3)}{3(a^6-x^6)} \xlongequal{u=x^3} \int \frac{du}{3(a^6-u^2)}$

$$= \frac{1}{6a^3}\int\left(\frac{1}{a^3+u}+\frac{1}{a^3-u}\right)du$$

$$= \frac{1}{6a^3}\ln\left|\frac{a^3+u}{a^3-u}\right|+C = \frac{1}{6a^3}\ln\left|\frac{a^3+x^3}{a^3-x^3}\right|+C.$$

4. $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx = \int \frac{d(x+\sin x)}{x+\sin x} = \ln|x+\sin x|+C.$

5. $\int \frac{\ln\ln x}{x}dx = \int \ln\ln x\, d(\ln x) = \ln x\ln\ln x - \int \ln x \cdot \frac{1}{x\ln x}dx$

$$= \ln x(\ln\ln x - 1)+C.$$

6. $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(\sin^2 x)}{1+\sin^4 x} = \frac{\arctan(\sin^2 x)}{2}+C.$

7. $\int \tan^4 x dx = \int \tan^2 x(\sec^2 x - 1)dx$

$$= \int \tan^2 x d(\tan x) - \int(\sec^2 x - 1)dx$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C.$$

8. $\int \sin x\sin 2x\sin 3x dx = \int \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)\sin 3x dx$

$$= \frac{1}{2}\int \cos x\sin 3x dx - \frac{1}{2}\int \cos 3x\sin 3x dx$$

$$= \frac{1}{4}\int(\sin 2x + \sin 4x)dx - \frac{1}{12}\sin^2 3x$$

$$= -\frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{12}\sin^2 3x + C.$$

9. $\int \frac{dx}{x(x^6+4)} \xlongequal{x=\frac{1}{u}} \int \frac{-u^5 du}{1+4u^6} = -\frac{1}{24}\int \frac{d(1+4u^6)}{1+4u^6}$

$$= -\frac{1}{24}\ln(1+4u^6)+C = -\frac{1}{24}\ln\frac{x^6+4}{x^6}+C$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{24}\ln(x^6+4)+C.$$

10. **方法一**

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x=\int\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=a\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

方法二 令 $u=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$,即 $x=a\frac{u^2-1}{u^2+1}$,则

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x=\int u\cdot\frac{4au}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u=\int-2au\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+u^2}\right)$$

$$=-\frac{2au}{1+u^2}+\int\frac{2a}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{2au}{1+u^2}+2a\arctan u+C$$

$$=(x-a)\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+2a\arctan\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+C$$

$$=-\sqrt{a^2-x^2}+2a\arctan\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+C.$$

11. **方法一**

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$\xlongequal{x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sec u}\int\sec u\,\mathrm{d}u=\ln|\sec u+\tan u|+C$$

$$=\ln\left|2x+1+2\sqrt{x(1+x)}\right|+C.$$

方法二 当 $x>0$ 时,因为$\frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{1+x}}$,故令 $u=\sqrt{\frac{x}{1+x}}$,

即 $x=\frac{u^2}{1-u^2}$,则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=\int\frac{2}{1-u^2}\mathrm{d}u=\int\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}\right|+C$$

$$=\ln\left|2x+1+2\sqrt{x(1+x)}\right|+C,$$

当 $x<-1$ 时,同样可得$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=\ln\left|2x+1+2\sqrt{x(1+x)}\right|+C.$

12. $\int x\cos^2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x(1+\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int x\,\mathrm{d}(2x+\sin 2x)$

$$= \frac{x(2x+\sin 2x)}{4} - \frac{1}{4}\int(2x+\sin 2x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{x\sin 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8} + C.$$

13. 当 $a \neq 0$ 时，

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int\cos bx\mathrm{d}(\mathrm{e}^{ax})$$

$$= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int\mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\int\sin bx\mathrm{d}(\mathrm{e}^{ax})$$

$$= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}\int\mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x.$$

因此有

$$\int\mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}(a\cos bx + b\sin bx) + C,$$

当 $a = 0$ 时，$\int\mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\sin bx}{b} + C, & b \neq 0 \text{ 时} \\ x + C, & b = 0 \text{ 时}. \end{cases}$

14. 令 $u = \sqrt{1+\mathrm{e}^x}$，即作换元 $x = \ln(u^2-1)$，得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}} = \int\frac{2\mathrm{d}u}{u^2-1} = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1} + C.$$

15. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}} \xlongequal{x=\frac{1}{u}} -\int\frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \sqrt{1-u^2} + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C,$

易知当 $x < 0$ 和 $x > 0$ 时的结果相同.

16. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{5/2}} \xlongequal{x=a\sin u} \frac{1}{a^4}\int\sec^4 u\mathrm{d}u = \frac{1}{a^4}\int(\tan^2 u+1)\mathrm{d}(\tan u)$

$$= \frac{\tan^3 u}{3a^4} + \frac{\tan u}{a^4} + C$$

$$= \frac{1}{3a^4}\left[\frac{x^3}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} + \frac{3x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right] + C.$$

17. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}} \xlongequal{x=\frac{1}{u}} \int\frac{-u^3\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = -\int\left(u\sqrt{1+u^2} - \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)\mathrm{d}u$

$$= -\frac{1}{3}(1+u^2)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{1+u^2} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^3} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C,$$

易知当 $x<0$ 和 $x>0$ 时结果相同.

$$18.\ \int\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=u^2}\int 2u^2\sin u\,\mathrm{d}u=-\int 2u^2\mathrm{d}(\cos u)$$

$$=-2u^2\cos u+\int 4u\cos u\,\mathrm{d}u$$

$$=-2u^2\cos u+\int 4u\,\mathrm{d}(\sin u)$$

$$=-2u^2\cos u+4u\sin u-\int 4\sin u\,\mathrm{d}u$$

$$=-2u^2\cos u+4u\sin u+4\cos u+C$$

$$=-2x\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+4\cos\sqrt{x}+C.$$

$$19.\ \int\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x=x\ln(1+x^2)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C.$$

$$20.\ \int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x=\int\tan^2 x\sec x\,\mathrm{d}x=\int\sec^3 x\,\mathrm{d}x-\int\sec x\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\int\sec x\,\mathrm{d}x\right)-\int\sec x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\sec x\tan x-\frac{1}{2}\int\sec x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\sec x\tan x-\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C.$$

$$21.\ \int\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\int\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}(1+x)=(1+x)\arctan\sqrt{x}-\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$=(1+x)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C.$$

$$22.\ \int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\pm\sqrt{2}\int\csc\frac{x}{2}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$=\pm\sqrt{2}\ln\left|\csc\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}\right|+C,$$

上式当 $\cos\frac{x}{2}>0$ 时取正,当 $\cos\frac{x}{2}<0$ 时取负.

$$\text{当 }\cos\frac{x}{2}>0\text{ 时},\ln\left|\csc\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}\right|=\ln\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

$$=\ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right|-\left|\cot\frac{x}{2}\right|\right),$$

当 $\cos\frac{x}{2}<0$ 时，$\ln\left|\csc\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}\right| = \ln\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$

$$= \ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right|+\left|\cot\frac{x}{2}\right|\right) = \ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right|-\left|\cot\frac{x}{2}\right|\right),$$

因此有 $\int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\mathrm{d}x = \sqrt{2}\ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right|-\left|\cot\frac{x}{2}\right|\right)+C.$

23. $\int\frac{x^3}{(1+x^8)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\frac{1}{(1+x^8)^2}\mathrm{d}(x^4) \xlongequal{u=x^4} \frac{1}{4}\int\frac{1}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u$

$$\xlongequal{u=\tan t} \frac{1}{4}\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{2t+\sin 2t}{16}+C$$

$$= \frac{\arctan x^4}{8}+\frac{x^4}{8(1+x^8)}+C.$$

24. $\int\frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}\mathrm{d}x \xlongequal{u=x^4} \frac{1}{4}\int\frac{u^2}{u^2+3u+2}\mathrm{d}u$

$$= \frac{1}{4}\int\left(1+\frac{1}{u+1}-\frac{4}{u+2}\right)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{4}u+\frac{1}{4}\ln|1+u|-\ln|2+u|+C$$

$$= \frac{x^4}{4}+\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{2+x^4}+C.$$

25. $\int\frac{\mathrm{d}x}{16-x^4} = \int\frac{1}{(2-x)(2+x)(4+x^2)}\mathrm{d}x$

$$= \int\left[\frac{1}{32(2-x)}+\frac{1}{32(2+x)}+\frac{1}{8(4+x^2)}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{32}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+\frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2}+C.$$

26. **方法一** 令 $u=\tan\frac{x}{2}$，得

$$\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x = \int\frac{4u}{(1+u)^2(1+u^2)}\mathrm{d}u = \int\left[\frac{-2}{(1+u)^2}+\frac{2}{1+u^2}\right]\mathrm{d}u$$

$$= \frac{2}{1+u}+2\arctan u+C = \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+x+C.$$

方法二 $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x = \int\frac{\sin x(1-\sin x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$= -\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}(\cos x) - \int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x$$

$$= \sec x - \tan x + x + C.$$

27. $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{x}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx + \int \tan \frac{x}{2} dx$

$$= \int x d\left(\tan \frac{x}{2}\right) + \int \tan \frac{x}{2} dx$$

$$= x \tan \frac{x}{2} + C.$$

28. $\int e^{\sin x} \cdot \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx = \int x e^{\sin x} \cos x dx - \int e^{\sin x} \tan x \sec x dx$

$$= \int x d(e^{\sin x}) - \int e^{\sin x} d(\sec x)$$

$$= x e^{\sin x} - \int e^{\sin x} dx - \left(\sec x e^{\sin x} - \int e^{\sin x} dx\right)$$

$$= (x - \sec x) e^{\sin x} + C.$$

29. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx \xlongequal{x = u^6} \int \frac{6}{u(u+1)} du = 6\int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du$

$$= 6\ln\left|\frac{u}{1+u}\right| + C = \ln \frac{x}{(\sqrt[6]{x} + 1)^6} + C.$$

30. $\int \frac{dx}{(1 + e^x)^2} \xlongequal{x = \ln u} \int \frac{du}{u(1+u)^2} = \int \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} - \frac{1}{(1+u)^2}\right] du$

$$= \ln u - \ln(1 + u) + \frac{1}{1+u} + C$$

$$= x - \ln(1 + e^x) + \frac{1}{1 + e^x} + C.$$

31. $\int \frac{e^{3x} + e^x}{e^{4x} - e^{2x} + 1} dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x} - 1 + e^{-2x}} dx = \int \frac{d(e^x - e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2 + 1}$

$$= \arctan(e^x - e^{-x}) + C.$$

32. $\int \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2} dx = -\int x d\left(\frac{1}{e^x + 1}\right) = -\frac{x}{e^x + 1} + \int \frac{dx}{e^x + 1}$

$$= -\frac{x}{e^x + 1} + \int \frac{e^{-x} dx}{1 + e^{-x}}$$

$$= -\frac{x}{e^x + 1} - \ln(1 + e^{-x}) + C.$$

33. $\int \ln^2\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) dx = x\ln^2\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \int \frac{2x\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}{\sqrt{1 + x^2}} dx$

$$= x\ln^2\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \int 2\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) d\left(\sqrt{1 + x^2}\right)$$

$$= x\ln^2\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - 2\sqrt{1 + x^2}\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + 2x + C.$$

34. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\frac{1}{u}} \int \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u = -\int \ln u\,\mathrm{d}((1+u^2)^{-\frac{1}{2}})$

$$= -\frac{\ln u}{\sqrt{1+u^2}} + \int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}$$

$$= \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C.$$

35. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin u} \int u\cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int u(1+\cos 2u)\mathrm{d}u$

$$= \frac{1}{4}\int u\,\mathrm{d}(2u+\sin 2u)$$

$$= \frac{u(2u+\sin 2u)}{4} - \frac{1}{4}\int(2u+\sin 2u)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{u^2}{4} + \frac{u}{4}\sin 2u - \frac{\sin^2 u}{4} + C$$

$$= \frac{(\arcsin x)^2}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{x^2}{4} + C.$$

36. $\displaystyle\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\cos u} -\int u\cos^3 u\,\mathrm{d}u = -\int u\,\mathrm{d}\left(\sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u\right)$

$$= -u\left(\sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u\right) + \int\left(\sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u\right)\mathrm{d}u$$

$$= -u\left(\sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u\right) - \frac{1}{3}\int(2+\cos^2 u)\mathrm{d}(\cos u)$$

$$= -u\left(\sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u\right) - \frac{2}{3}\cos u - \frac{1}{9}\cos^3 u + C$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}(2+x^2)\arccos x - \frac{1}{9}x(6+x^2) + C.$$

37. $\displaystyle\int \frac{\cot x}{1+\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x(1+\sin x)}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{1+\sin x}\right)\mathrm{d}(\sin x)$

$$= \ln\left|\frac{\sin x}{1+\sin x}\right| + C.$$

38. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos x} = -\int \cot x\sec^2 x\,\mathrm{d}(\cot x) \xlongequal{u=\cot x} -\int u\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u$

$$= -\frac{u^2}{2} - \ln|u| + C = -\frac{\cot^2 x}{2} - \ln|\cot x| + C.$$

39. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{(2+\cos x)(\cos^2 x - 1)}$

$$\xlongequal{u=\cos x}\int\frac{du}{(2+u)(u^2-1)}$$

$$=\int\left[\frac{1}{6(u-1)}-\frac{1}{2(u+1)}+\frac{1}{3(u+2)}\right]du$$

$$=\frac{1}{6}\ln|u-1|-\frac{1}{2}\ln|u+1|+\frac{1}{3}\ln|u+2|+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln(1-\cos x)-\frac{1}{2}\ln(1+\cos x)+\frac{1}{3}\ln(2+\cos x)+C.$$

40. **方法一**

$$\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)^2-\frac{1}{2}}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int(\sin x+\cos x)dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2}(-\cos x+\sin x)-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin x+\cos x}dx,$$

令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$，$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$，$dx=\frac{2}{1+u^2}du$，故有

$$\int\frac{1}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{2}{2u+1-u^2}du=-\int\frac{2}{(u-1)^2-(\sqrt{2})^2}du$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{u-1-\sqrt{2}}du+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{u-1+\sqrt{2}}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-1+\sqrt{2}}{u-1-\sqrt{2}}\right|+C',$$

因此有 $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|+C.$

方法二

$$\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx\xlongequal{u=x+\frac{\pi}{4}}\int\frac{2\sin^2u-1}{2\sqrt{2}\sin u}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\sin u\,du-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\csc u\,du$$

$$=-\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

第五章　定　积　分

习　题　5－1

1．利用定积分定义计算由抛物线 $y = x^2 + 1$，两直线 $x = a$、$x = b(b > a)$ 及横轴所围成的图形的面积.

解　由于函数 $f(x) = x^2 + 1$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，因此可积，为计算方便，不妨把 $[a,b]$ 分成 n 等份，则分点为 $x_i = a + \dfrac{i(b-a)}{n}(i = 0,1,2,\cdots,n)$，每个小区间长度为 $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$，取 ξ_i 为小区间的右端点 x_i，则

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right)^2 + 1\right]\frac{b-a}{n} \\
&= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(a^2+1) + 2\,\frac{a(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{(b-a)^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= (b-a)(a^2+1) + a(b-a)^2\,\frac{(n+1)}{n} + (b-a)^3\,\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.
\end{aligned}
$$

当 $n \to \infty$ 时，上式极限为 $(b-a)(a^2+1) + a(b-a)^2 + \dfrac{1}{3}(b-a)^3 = \dfrac{b^3 - a^3}{3} + b - a$，即为所求图形的面积.

2．利用定积分定义计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

解　由于被积函数在积分区间上连续，因此把积分区间分成 n 等份，并取 ξ_i 为小区间的右端点，得到

$$
\begin{aligned}
(1)\ \int_a^b x\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2}\right] \\
&= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.
\end{aligned}
$$

(2) $\int_0^1 e^x dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}e^{\frac{i}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(e^{\frac{1}{n}})^{n+1}-1}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(e^{\frac{n+1}{n}}-1)}{\lim\limits_{n\to\infty}n(e^{\frac{1}{n}}-1)} = e-1.$$

3. 利用定积分的几何意义,证明下列等式:

(1) $\int_0^1 2x dx = 1$;　　　(2) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx = 0$;　　　(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$.

证　(1) 根据定积分的几何意义,定积分$\int_0^1 2x dx$ 表示由直线 $y = 2x$、$x = 1$ 及 x 轴围成的图形的面积,该图形是三角形,底边长为 1,高为 2,因此面积为 1,即$\int_0^1 2x dx = 1$.

(2) 根据定积分的几何意义,定积分$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ 表示的是由曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ 以及 x 轴、y 轴围成的在第 Ⅰ 象限内的图形面积,即单位圆的四分之一的图形,因此有$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

(3) 由于函数 $y = \sin x$ 在区间$[0,\pi]$上非负,在区间$[-\pi,0]$上非正.根据定积分的几何意义,定积分$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx$ 表示曲线 $y = \sin x(x\in[0,\pi])$ 与 x 轴所围成的图形 D_1 的面积减去曲线 $y = \sin x(x\in[-\pi,0])$ 与 x 轴所围成的图形 D_2 的面积,显然图形 D_1 与 D_2 的面积是相等的,因此有$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx = 0$.

(4) 由于函数 $y = \cos x$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上非负.根据定积分的几何意义,定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$ 表示曲线 $y = \cos x(x\in[0,\frac{\pi}{2}])$ 与 x 轴和 y 轴所围成的图形 D_1 的面积加上曲线 $y = \cos x(x\in[-\frac{\pi}{2},0])$ 与 x 轴和 y 轴所围成的图形 D_2 的面积,而图形 D_1 的面积和图形 D_2 的面积显然相等,因此有$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$.

4. 水利工程中要计算拦水闸门所受的水压力. 已知闸门上水的压强 p(单位面积上的压力大小)与水深 h 存在函数关系,且有 $p = 9.8\,h(\mathrm{kN/m^2})$. 若闸门高 $H = 3\ \mathrm{m}$,宽 $L = 2\ \mathrm{m}$,求水面与闸门顶相齐时闸门所受的水压力 P.

解 在区间[0,3]上插入 $n-1$ 个分点 $0 = h_0 < h_1 < \cdots < h_n = 3$,取 $\xi_i \in [h_{i-1}, h_i]$ 并记 $\Delta h_i = h_i - h_{i-1}$,得到闸门所受水压力的近似值为 $\sum\limits_{i=1}^{n} p(\xi_i)2\Delta h_i$,根据定积分的定义可知闸门所受的水压力为

$$P = \int_0^3 2p(h)\mathrm{d}h = 19.6\int_0^3 h\,\mathrm{d}h,$$

由于被积函数连续,而连续函数是可积的,因此积分值与积分区间的分法和 ξ_i 的取法无关. 为方便计算,对区间[0,3]进行 n 等分,并取 ξ_i 为小区间的端点 $h_i = \dfrac{3i}{n}$,于是

$$\int_0^3 h\,\mathrm{d}h = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{9i}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{9(n+1)}{2n} = \frac{9}{2},$$

故

$$P = 19.6\int_0^3 h\,\mathrm{d}h = 88.2\ (\mathrm{kN}).$$

5. 证明定积分性质:

(1) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$($k$ 是常数); (2) $\int_a^b 1\cdot\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a$.

证 根据定积分的定义,在区间$[a,b]$中插入 $n-1$个点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$,记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$,则

(1) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i = k\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(2) $\int_a^b 1\cdot\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i = \lim\limits_{\lambda\to 0}(b-a) = b-a$.

6. 估计下列各积分的值:

(1) $\int_1^4 (x^2+1)\mathrm{d}x$; (2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\sin^2 x)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\,\mathrm{d}x$; (4) $\int_2^0 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x$.

解 (1) 在区间[1,4]上,$2 \leqslant x^2+1 \leqslant 17$,因此有

$$6 = \int_1^4 2\mathrm{d}x \leqslant \int_1^4 (x^2+1)\mathrm{d}x \leqslant \int_1^4 17\mathrm{d}x = 51.$$

(2) 在区间$\left[\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$上,$1 = 1+0 \leqslant 1+\sin^2 x \leqslant 1+1 = 2$,因此有

$$\pi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (1+\sin^2 x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} 2\mathrm{d}x = 2\pi.$$

(3) 在区间 $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$ 上，函数 $f(x) = x\arctan x$ 是单调增加的，因此 $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \leqslant f(x) \leqslant f(\sqrt{3})$，即 $\frac{\pi}{6\sqrt{3}} \leqslant x\arctan x \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{3}}$，故有

$$\frac{\pi}{9} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi.$$

(4) 设 $f(x) = x^2 - x, x \in [0,2]$. 则 $f'(x) = 2x - 1$，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最大值、最小值必为 $f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f(2)$ 中的最大值和最小值，即最大值和最小值分别为 $f(2) = 2$ 和 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$，因此有

$$2e^{-\frac{1}{4}} = \int_0^2 e^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 e^{x^2 - x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 e^2 \mathrm{d}x = 2e^2,$$

而 $\int_2^0 e^{x^2-x}\mathrm{d}x = -\int_0^2 e^{x^2-x}\mathrm{d}x$，故 $-2e^2 \leqslant \int_2^0 e^{x^2-x}\mathrm{d}x \leqslant -2e^{-\frac{1}{4}}$.

7. 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

(1) 若在 $[a,b]$ 上，$f(x) \geqslant 0$，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$，则在 $[a,b]$ 上 $f(x) \equiv 0$；

(2) 若在 $[a,b]$ 上，$f(x) \geqslant 0$，且 $f(x) \not\equiv 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$；

(3) 若在 $[a,b]$ 上，$f(x) \leqslant g(x)$，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，则在 $[a,b]$ 上 $f(x) \equiv g(x)$.

证 先证明(2).

(2) 根据条件必定存在 $x_0 \in [a,b]$，使得 $f(x_0) > 0$. 由函数 $f(x)$ 在 x_0 连续可知，存在 $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$，使得当 $x \in [\alpha,\beta]$ 时 $f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$. 因此有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x + \int_\beta^b f(x)\mathrm{d}x,$$

由定积分性质得到：

$$\int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0,\quad \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_\alpha^\beta \frac{f(x_0)}{2}\mathrm{d}x = \frac{\beta-\alpha}{2}f(x_0) > 0,\quad \int_\beta^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

故得到结论 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

(1) 用反证法. 如果 $f(x) \not\equiv 0$，则由(2)得到 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$，与假设条件矛

盾,因此(1)成立.

(3) 因为 $h(x)=g(x)-f(x)\geqslant 0$,且 $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$,由(1)可得在 $[a,b]$ 上

$$h(x)\equiv 0,$$

从而结论成立.

8. 根据定积分的性质及第 7 题的结论,说明下列积分哪一个的值较大:

(1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$?

(2) $\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$ 还是 $\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$?

(3) $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$ 还是 $\int_1^2 (\ln x)^2\mathrm{d}x$?

(4) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$?

(5) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x$?

解 (1) 在区间 $[0,1]$ 上 $x^2\geqslant x^3$,因此 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 比 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$ 大.

(2) 在区间 $[1,2]$ 上 $x^2\leqslant x^3$,因此 $\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$ 比 $\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$ 大.

(3) 在区间 $[1,2]$ 上由于 $0\leqslant \ln x\leqslant 1$,得 $\ln x\geqslant (\ln x)^2$,因此 $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$ 比 $\int_1^2 (\ln x)^2\mathrm{d}x$ 大.

(4) 由教材第三章第一节例 1 可知当 $x>0$ 时,$\ln(1+x)<x$,因此 $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 比 $\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$ 大.

(5) 由于当 $x>0$ 时 $\ln(1+x)<x$,故此时有 $1+x<\mathrm{e}^x$,因此 $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 比 $\int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x$ 大.

习 题 5-2

1. 试求函数 $y=\int_0^x \sin t\mathrm{d}t$ 当 $x=0$ 及 $x=\frac{\pi}{4}$ 时的导数.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\sin x$，因此$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2．求由参数表达式 $x=\int_0^t \sin u\,du$，$y=\int_0^t \cos u\,du$ 所确定的函数对 x 的导数.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\cos t}{\sin t}=\cot t$.

3．求由$\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t\,dt=0$ 所决定的隐函数对 x 的导数$\dfrac{dy}{dx}$.

解 方程两端分别对 x 求导，得 $e^y\dfrac{dy}{dx}+\cos x=0$，故$\dfrac{dy}{dx}=-e^{-y}\cos x$.

4．当 x 为何值时，函数 $I(x)=\int_0^x te^{-t^2}dt$ 有极值.

解 容易知道 $I(x)$ 可导，而 $I'(x)=xe^{-x^2}=0$ 只有惟一解 $x=0$. 当 $x<0$ 时 $I'(x)<0$，当 $x>0$ 时 $I'(x)>0$，故 $x=0$ 为函数 $I(x)$ 的惟一的极值点（极小值点）.

5．计算下列各导数：

(1) $\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$；　　(2) $\dfrac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$；

(3) $\dfrac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$.

解 (1) $\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt=2x\sqrt{1+x^4}$.

(2)
$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}=\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}-\int_0^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}\right)$$
$$=\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}.$$

(3)
$$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt=\frac{d}{dx}\left[\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt-\int_0^{\sin x}\cos(\pi t^2)dt\right]$$
$$=-\sin x\cos(\pi\cos^2 x)-\cos x\cos(\pi\sin^2 x)$$
$$=-\sin x\cos(\pi-\pi\sin^2 x)-\cos x\cos(\pi\sin^2 x)$$
$$=(\sin x-\cos x)\cos(\pi\sin^2 x).$$

6．计算下列积分：

(1) $\int_0^a(3x^2-x+1)dx$；　　(2) $\int_1^2\left(x^2+\dfrac{1}{x^4}\right)dx$；

(3) $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$；

(4) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$；

(5) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$；

(6) $\int_0^{\sqrt{3}a} \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$；

(7) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$；

(8) $\int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$；

(9) $\int_{-e-1}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$；

(10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta\mathrm{d}\theta$；

(11) $\int_0^{2\pi} |\sin x|\mathrm{d}x$；

(12) $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leqslant 1, \\ \frac{1}{2}x^2, & x>1. \end{cases}$

解 (1) $\int_0^a (3x^2-x+1)\mathrm{d}x = \left[x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^a$

$$= a^3-\frac{1}{2}a^2+a = a\left(a^2-\frac{1}{2}a+1\right).$$

(2) $\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3x^3}\right]_1^2 = 2\frac{5}{8}$.

(3) $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x = \int_4^9(\sqrt{x}+x)\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}\right]_4^9 = 45\frac{1}{6}$.

(4) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan x]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

(5) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{3}$.

(6) $\int_0^{\sqrt{3}a} \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \left[\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right]_0^{\sqrt{3}a} = \frac{\pi}{3a}$.

(7) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}} = \left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$.

(8) $\int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_{-1}^0\left(3x^2+\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$

$$= [x^3+\arctan x]_{-1}^0 = 1+\frac{\pi}{4}.$$

(9) $\int_{-e-1}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = [\ln(-x-1)]_{-e-1}^{-2} = -1$.

(10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2\theta-1)\mathrm{d}\theta = [\tan\theta-\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1-\frac{\pi}{4}$.

(11) $\int_0^{2\pi} |\sin x| \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) \mathrm{d}x$

$$= [-\cos x]_0^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 4.$$

(12) $\int_0^2 f(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 (x+1) \mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{2} x^2 \mathrm{d}x$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{6}\right]_1^2 = \frac{8}{3}.$$

7. 设 k 为正整数,试证下列各题:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \mathrm{d}x = 0$;　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \mathrm{d}x = 0$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \mathrm{d}x = \pi$;　　(4) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \mathrm{d}x = \pi$.

解 (1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{k} \sin kx\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$.

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{k} \cos kx\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$.

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2kx) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = \pi$,其中由(1)得到 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2kx \mathrm{d}x = 0$.

(4) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2kx) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = \pi$,其中由(1)得到 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2kx \mathrm{d}x = 0$.

8. 设 k 及 l 为正整数,且 $k \neq l$. 证明:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx \mathrm{d}x = 0$;　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx \mathrm{d}x = 0$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx \mathrm{d}x = 0$.

解 (1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(k+l)x - \sin(k-l)x] \mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k+l) x \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k-l) x \mathrm{d}x$$

$$= 0,$$

其中由上一题 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin (k+l) x \mathrm{d}x = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin (k-l) x \mathrm{d}x = 0$.

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+l)x + \cos(k-l)x] \mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos (k+l)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos (k-l)x\,\mathrm{d}x$$

$$= 0,$$

其中由上一题$\int_{-\pi}^{\pi}\cos (k+l)x\,\mathrm{d}x = 0$，$\int_{-\pi}^{\pi}\cos (k-l)x\,\mathrm{d}x = 0$.

(3) $$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+l)x - \cos(k-l)x]\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos (k+l)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos (k-l)x\,\mathrm{d}x$$

$$= 0,$$

其中由上一题$\int_{-\pi}^{\pi}\cos (k+l)x\,\mathrm{d}x = 0$，$\int_{-\pi}^{\pi}\cos (k-l)x\,\mathrm{d}x = 0$.

9．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}$；　　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x t\mathrm{e}^{2t^2}\,\mathrm{d}t}$.

解　(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1} = 1.$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x t\mathrm{e}^{2t^2}\,\mathrm{d}t} = \lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{x\mathrm{e}^{2x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}}{1} = 2.$$

10．设

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x\in[0,1), \\ x, & x\in[1,2]. \end{cases}$$

求 $\Phi(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在$[0,2]$上的表达式，并讨论 $\Phi(x)$ 在$(0,2)$内的连续性.

解　当 $x\in[0,1)$ 时，$\Phi(x) = \int_0^x t^2\,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3}$；当 $x\in[1,2]$ 时，$\Phi(x) = \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t + \int_1^x t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}$，即

$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3}, & x\in[0,1), \\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{6}, & x\in[1,2]. \end{cases}$$

由于$\lim\limits_{x\to 1^-}\Phi(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}$，$\lim\limits_{x\to 1^+}\Phi(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$，且 $\Phi(1) =$

$\frac{1}{3}$,故函数 $\Phi(x)$ 在 $x=1$ 连续,而在其他点处显然连续,因此函数 $\Phi(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内连续.

注 事实上,由于 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内连续,故 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(0,2)$ 内可导,因此 $\Phi(x)$ 必在 $(0,2)$ 内连续.我们甚至有以下更强的结论:

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界并可积,则 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上连续.按照连续函数定义不难证明这一结论.作为练习,请读者自己证明之.

11. 设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & x<0 \text{ 或 } x>\pi.\end{cases}$$

求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式.

解 当 $x<0$ 时,$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$;

当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时,$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{1}{2}\sin x\mathrm{d}t=\frac{1-\cos x}{2}$;

当 $x>\pi$ 时,$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t+\int_\pi^x f(t)\mathrm{d}t$

$$=\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin x\mathrm{d}t=1.$$

即

$$\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1-\cos x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

12. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导且 $f'(x)\leqslant 0$,

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

证明在 (a,b) 内有 $F'(x)\leqslant 0$.

证 $F'(x)=\frac{1}{(x-a)^2}\left[(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]$

$=\frac{1}{(x-a)^2}[(x-a)f(x)-(x-a)f(\xi)](\xi\in[a,x]\subset[a,b])$

$=\frac{x-\xi}{x-a}f'(\eta)\ (\eta\in(\xi,x)\subset(a,b))$,

由条件可知结论成立.

习 题 5 - 3

1. 计算下列积分:

(1) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(11+5x)^3}$;

(3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi$;

(4) $\int_{0}^{\pi}(1-\sin^3 x)\mathrm{d}x$;

(5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\mathrm{d}u$;

(6) $\int_{0}^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x$;

(7) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2y^2}\mathrm{d}y$;

(8) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$;

(9) $\int_{0}^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$;

(10) $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$;

(11) $\int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}$;

(12) $\int_{1}^{4}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$;

(13) $\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}-1}$;

(14) $\int_{0}^{\sqrt{2}a}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{3a^2-x^2}}$;

(15) $\int_{0}^{1}te^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$;

(16) $\int_{1}^{e^2}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

(17) $\int_{-2}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$;

(18) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2x\mathrm{d}x$;

(19) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\mathrm{d}x$;

(20) $\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$$=\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=0.$$

(2) $\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(11+5x)^3}=\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}(11+5x)}{5(11+5x)^3}=\left[-\frac{1}{10(11+5x)^2}\right]_{-2}^{1}=\frac{51}{512}$.

(3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\mathrm{d}(\cos\varphi)=\left[-\frac{1}{4}\cos^4\varphi\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}$.

(4) $\int_{0}^{\pi}(1-\sin^3 x)\mathrm{d}x=\pi+\int_{0}^{\pi}(1-\cos^2 x)\mathrm{d}(\cos x)$

$$\xlongequal{u=\cos x}\pi+\int_{1}^{-1}(1-u^2)\mathrm{d}u=\pi-\frac{4}{3}.$$

(5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2u)\mathrm{d}u$

$$=\frac{1}{2}\left[u+\frac{1}{2}\sin 2u\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

(6) $\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sqrt{2}\sin u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2 u\,\mathrm{d}u=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$

(7) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2y^2}\,\mathrm{d}y\xlongequal{y=2\sin u}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}4\sqrt{2}\cos^2 u\,\mathrm{d}u$

$$=2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2u)\mathrm{d}u$$

$$=2\sqrt{2}\left[u+\frac{1}{2}\sin 2u\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}(\pi+2).$$

(8) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin u}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}\mathrm{d}u=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc^2 u-1)\mathrm{d}u$

$$=[-\cot u-u]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\pi}{4}.$$

(9) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=a\sin u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^4\sin^2 u\cos^2 u\,\mathrm{d}u=\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2u)^2\mathrm{d}(2u)$

$$\xlongequal{t=2u}\frac{a^4}{8}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^4}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{16}a^4.$$

(10) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}\xlongequal{x=\frac{1}{u}}\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{-u}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u=\left[-\sqrt{1+u^2}\right]_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$$=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(11) 令$u=\sqrt{5-4x}$ 即$x=\frac{5-u^2}{4}$ 得

$$\int_{-1}^{1}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}=\int_3^1\frac{u^2-5}{8}\mathrm{d}u=\left[\frac{u^3}{24}-\frac{5}{8}u\right]_3^1=\frac{1}{6}.$$

(12) 令 $u=\sqrt{x}$ 即$x=u^2$ 得

$$\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}=\int_1^2\frac{2u\,\mathrm{d}u}{1+u}=[2u-2\ln(1+u)]_1^2=2+2\ln\frac{2}{3}.$$

(13) 令 $u=\sqrt{1-x}$ 即 $x=1-u^2$ 得

$$\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}-1}=\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{-2u\,\mathrm{d}u}{u-1}=-2\left[u+\ln(1-u)\right]_{\frac{1}{2}}^{0}=1-2\ln 2.$$

(14) $$\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3a^2-x^2}}=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{\mathrm{d}(3a^2-x^2)}{\sqrt{3a^2-x^2}}$$

$$=-\left[\sqrt{3a^2-x^2}\right]_0^{\sqrt{2}a}=(\sqrt{3}-1)a.$$

(15) $$\int_0^1 t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=-\int_0^1\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

$$=\left[-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^1=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

(16) $$\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}\xlongequal{x=\mathrm{e}^u}\int_0^2\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u}}=\left[2\sqrt{1+u}\right]_0^2=2\sqrt{3}-2.$$

(17) $$\int_{-2}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=\int_{-2}^{0}\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}=\left[\arctan(x+1)\right]_{-2}^{0}=\frac{\pi}{2}.$$

(18) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2x\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x(1-2\sin^2 x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin^2 x)\mathrm{d}(\sin x)$$

$$=\left[\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}.$$

或者

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos 3x+\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sin 3x+\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}.$$

(19) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{u=\cos x}2\int_0^1\sqrt{u}\,\mathrm{d}u=\frac{4}{3}.$$

(20) $$\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\sin x\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=2\sqrt{2}.$$

2. 利用函数的奇偶性计算下列积分：

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}x^4\sin x\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta$；

(3) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；　　　　(4) $\int_{-5}^{5} \frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x$.

解　(1) 由于被积函数为奇函数,因此$\int_{-\pi}^{\pi} x^4\sin x\mathrm{d}x = 0$.

(2) 由于被积函数为偶函数,因此

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\theta\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\theta\mathrm{d}\theta = 8\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi.$$

(3) 由于被积函数为偶函数,因此有

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2\mathrm{d}(\arcsin x) \\ &= \frac{2}{3}[(\arcsin x)^3]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi^3}{324}.\end{aligned}$$

(4) 由于被积函数为奇函数,因此$\int_{-5}^{5} \frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x = 0$.

3. 证明:$\int_{-a}^{a}\varphi(x^2)\mathrm{d}x = 2\int_0^a\varphi(x^2)\mathrm{d}x$.

证　记$f(x)=\varphi(x^2)$,则$f(-x)=\varphi[(-x)^2]=\varphi(x^2)=f(x)$,即函数$f(x)$为偶函数,故

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_{-a}^{a}\varphi(x^2)\mathrm{d}x = 2\int_0^a\varphi(x^2)\mathrm{d}x.$$

4. 设$f(x)$在$[-b,b]$上连续,证明

$$\int_{-b}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-b}^{b} f(-x)\mathrm{d}x.$$

证　令$x=-t$,则

$$\int_{-b}^{b} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{b}^{-b} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{-b}^{b} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{-b}^{b} f(-x)\mathrm{d}x.$$

5. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x.$$

证　令$x=a+b-u$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(a+b-u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(a+b-u)\mathrm{d}u$$

$$= \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x.$$

6. 证明：$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \quad (x>0)$.

证 $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \xlongequal{t=\frac{1}{u}} -\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

7. 证明：$\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x$.

证 令 $x=1-u$，则

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x = \int_1^0 -(1-u)^m u^n\mathrm{d}u = \int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x.$$

8. 证明：$\int_0^\pi \sin^n x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x$.

证 $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^n x\mathrm{d}x \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}+u} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x$，故有

$$\int_0^\pi \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^n x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x.$$

9. 设 $f(x)$ 是以 l 为周期的连续函数，证明 $\int_a^{a+l} f(x)\mathrm{d}x$ 的值与 a 无关.

证 我们证明 $\int_a^{a+l} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^l f(x)\mathrm{d}x$.

$$\int_a^{a+l} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^l f(x)\mathrm{d}x + \int_l^{a+l} f(x)\mathrm{d}x,$$

由于 $\int_l^{a+l} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=l+u} \int_0^a f(u+l)\mathrm{d}u = \int_0^a f(u)\mathrm{d}u = -\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x$，故结论成立.

本题也可利用积分上限函数的求导公式证明. 记 $g(a) = \int_a^{a+l} f(x)\mathrm{d}x$，则有

$$g'(a) = f(a+l) - f(a) = 0,$$

根据拉格朗日中值定理的推论可知 $g(a)$ 是一个常数，从而得证.

10. 若 $f(x)$ 是连续函数且为奇函数，证明 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数；若 $f(x)$ 是连续函数且为偶函数，证明 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数.

证 记 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则有

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} -\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u,$$

当 $f(x)$ 为奇函数时，$F(-x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=F(x)$，故$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数.

当 $f(x)$ 为偶函数时，$F(-x)=-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=-F(x)$，故$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数.

11. 计算下列定积分

(1) $\int_0^1 xe^{-x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_1^e x\ln x\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t\sin\omega t\mathrm{d}t$（$\omega$ 为常数）；　　(4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　　(6) $\int_0^1 x\arctan x\mathrm{d}x$；

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\mathrm{d}x$；　　(8) $\int_1^2 x\log_2 x\mathrm{d}x$；

(9) $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2\mathrm{d}x$；　　(10) $\int_1^e \sin(\ln x)\mathrm{d}x$；

(11) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\mathrm{d}x$；　　(12) $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{d}x$（$m$ 为自然数）；

(13) $J_m=\int_0^{\pi} x\sin^m x\mathrm{d}x$（$m$ 为自然数）.

解 (1) $\int_0^1 xe^{-x}\mathrm{d}x=-\int_0^1 x\mathrm{d}(e^{-x})=-[xe^{-x}]_0^1+\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x$

$$=-e^{-1}+[-e^{-x}]_0^1=1-\frac{2}{e}.$$

(2) $\int_1^e x\ln x\mathrm{d}x=\int_1^e \frac{\ln x}{2}\mathrm{d}(x^2)=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{e^2+1}{4}.$

(3) $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t\sin\omega t\mathrm{d}t=-\frac{1}{\omega}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t\mathrm{d}(\cos\omega t)=-\frac{1}{\omega}[t\cos\omega t]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}+\frac{1}{\omega}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos\omega t\mathrm{d}t$

$$=-\frac{2\pi}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^2}[\sin\omega t]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}=-\frac{2\pi}{\omega^2}.$$

(4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x\mathrm{d}(\cot x)=[-x\cot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cot x\mathrm{d}x$

$$=-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{\pi}{4}+[\ln\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)\pi+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

(5) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_1^4 2\ln x\mathrm{d}\sqrt{x}=[2\sqrt{x}\ln x]_1^4-\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

$$= 8\ln 2 - \left[4\sqrt{x}\right]_1^4 = 4(2\ln 2 - 1).$$

(6) $$\int_0^1 x\arctan x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \arctan x\,\mathrm{d}(x^2)$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[x - \arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

(7) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}(e^{2x})$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{2x}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}(e^{2x})$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[e^{2x}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x,$$

因此有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}(e^{\pi} - 2).$$

(8) $$\int_1^2 x\log_2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 \log_2 x\,\mathrm{d}(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2\log_2 x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x}{\ln 2}\mathrm{d}x$$

$$= 2 - \frac{1}{4\ln 2}\left[x^2\right]_1^2 = 2 - \frac{3}{4\ln 2}.$$

(9) $$\int_0^{\pi}(x\sin x)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2(1 - \cos 2x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} x^2\mathrm{d}(\sin 2x)$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\left[x^2\sin 2x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin 2x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}(\cos 2x)$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\left[x\cos 2x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 2x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.$$

(10) $$\int_1^{e}\sin(\ln x)\mathrm{d}x \xlongequal{x = e^u} \int_0^1 e^u\sin u\,\mathrm{d}u = \left[e^u\sin u\right]_0^1 - \int_0^1 e^u\cos u\,\mathrm{d}u$$

$$= e\sin 1 - [e^u\cos u]_0^1 - \int_0^1 e^u \sin u\,du$$

$$= e(\sin 1 - \cos 1) + 1 - \int_0^1 e^u \sin u\,du,$$

所以 $\int_1^e \sin(\ln x)dx = \frac{e}{2}(\sin 1 - \cos 1) + \frac{1}{2}$.

(11) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\,dx + \int_1^e \ln x\,dx$

$$= -[x\ln x]_{\frac{1}{e}}^{1} + \int_{\frac{1}{e}}^{1}dx + [x\ln x]_1^e - \int_1^e dx$$

$$= 2 - \frac{2}{e}.$$

(12) $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}}dx \xlongequal{x=\sin u} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1}x\,dx = \begin{cases} \frac{m}{m+1}\cdot\frac{m-2}{m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, m\text{ 为奇数}, \\ \frac{m}{m+1}\cdot\frac{m-2}{m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}, m\text{ 为偶数}, \end{cases}$

$$= \begin{cases} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot m}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(m+1)}\cdot\frac{\pi}{2}, m\text{ 为奇数}, \\ \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot m}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(m+1)}, m\text{ 为偶数}. \end{cases}$$

(13) 由教材本节的例 6 以及本节习题第 8 题,可得

$$J_m = \int_0^{\pi} x\sin^m x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^m x\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx,$$

故有

$$J_m = \begin{cases} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(m-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot m}\cdot\pi, m\text{ 为大于 1 的奇数}, \\ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot m}\cdot\frac{\pi^2}{2}, m\text{ 为偶数}, \end{cases}$$

$$J_1 = \pi.$$

$$J_0 = \frac{\pi^2}{2}.$$

习 题 5－4

1. 判定下列各反常积分的收敛性,如果收敛,计算反常积分的值:

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$;　　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

(3) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx$； (4) $\int_0^{+\infty} e^{-pt}\text{ch } t\,dt\ (p>1)$；

(5) $\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin \omega t\,dt\ (p>0,\omega>0)$； (6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$；

(7) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$； (8) $\int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2}$；

(9) $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$； (10) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

解 (1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{3}$.

(2) $\int_1^t \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_1^t = 2\sqrt{t}-2$，当 $t\to+\infty$ 时，该极限不存在，故该反常积分发散.

(3) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = \left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}$.

(4)
$$\begin{aligned}\int e^{-pt}\text{ch } t\,dt &= \int e^{-pt}d(\text{sh } t) = e^{-pt}\text{sh } t + p\int e^{-pt}\text{sh } t\,dt\\ &= e^{-pt}\text{sh } t + p\int e^{-pt}d(\text{ch } t)\\ &= e^{-pt}\text{sh } t + p\left(e^{-pt}\text{ch } t + p\int e^{-pt}\text{ch } t\,dt\right),\end{aligned}$$

故得到 $\int e^{-pt}\text{ch } t\,dt = \frac{e^{-pt}(\text{sh } t + p\,\text{ch } t)}{1-p^2} + C$，由此求得

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}\text{ch } t\,dt = \left[\frac{e^{-pt}(\text{sh } t + p\,\text{ch } t)}{1-p^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{p}{p^2-1}.$$

(5)
$$\begin{aligned}\int e^{-pt}\sin \omega t\,dt &= -\frac{1}{p}\int \sin \omega t\,d(e^{-pt})\\ &= -\frac{1}{p}e^{-pt}\sin \omega t + \frac{\omega}{p}\int e^{-pt}\cos \omega t\,dt\\ &= -\frac{1}{p}e^{-pt}\sin \omega t - \frac{\omega}{p^2}\int \cos \omega t\,d(e^{-pt})\\ &= -\frac{1}{p}e^{-pt}\sin \omega t - \frac{\omega}{p^2}e^{-pt}\cos \omega t - \frac{\omega^2}{p^2}\int e^{-pt}\sin \omega t\,dt,\end{aligned}$$

因此 $\int e^{-pt}\sin \omega t\,dt = \frac{-pe^{-pt}\sin \omega t - \omega e^{-pt}\cos \omega t}{p^2+\omega^2} + C$，故

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin \omega t\,dt &= \left[\frac{-pe^{-pt}\sin \omega t - \omega e^{-pt}\cos \omega t}{p^2+\omega^2}\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.\end{aligned}$$

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}+\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}$

$=[\arctan(x+1)]_{-\infty}^{0}+[\arctan(x+1)]_{0}^{+\infty}=\pi.$

(7) $\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=[-\sqrt{1-x^2}]_0^1=1.$

(8) $\int_0^t\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2}=\left[\frac{1}{1-x}\right]_0^t=\frac{1}{1-t}-1$，当 $t\to1$ 时极限不存在，故原反常积分发散.

(9) $\int_1^2\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}\xlongequal{x=u^2+1}2\int_0^1(u^2+1)\mathrm{d}u=2\frac{2}{3}.$

(10) $\int_1^e\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}=\int_1^e\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}=[\arcsin\ln x]_1^e=\frac{\pi}{2}.$

2. 当 k 为何值时，反常积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$ 收敛？当 k 为何值时，这反常积分发散？又当 k 为何值时，这反常积分取得最小值？

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=\int\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{(\ln x)^k}=\begin{cases}\ln\ln x+C, & k=1,\\ -\frac{1}{(k-1)\ln^{k-1}x}+C, & k\neq1,\end{cases}$ 因此当 $k\leqslant1$ 时，反常积分发散；当 $k>1$ 时，该反常积分收敛，此时 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=\left[-\frac{1}{(k-1)\ln^{k-1}x}\right]_2^{+\infty}=\frac{1}{(k-1)(\ln2)^{k-1}}.$

记 $f(k)=\frac{1}{(k-1)(\ln2)^{k-1}}$，则

$$f'(k)=-\frac{1}{(k-1)^2(\ln2)^{2k-2}}[(\ln2)^{k-1}+(k-1)(\ln2)^{k-1}\ln\ln2]$$
$$=-\frac{1+(k-1)\ln\ln2}{(k-1)^2(\ln2)^{k-1}},$$

令 $f'(k)=0$，得 $k=1-\frac{1}{\ln\ln2}$. 当 $1<k<1-\frac{1}{\ln\ln2}$ 时，$f'(k)<0$，当 $k>1-\frac{1}{\ln\ln2}$ 时，$f'(k)>0$，故 $k=1-\frac{1}{\ln\ln2}$ 为函数 $f(k)$ 的最小值点，即当 $k=1-\frac{1}{\ln\ln2}$ 时所给反常积分取得最小值.

3. 利用递推公式计算反常积分 $I_n=\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

解 $I_0=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=[-\mathrm{e}^{-x}]_0^{+\infty}=1,$

当 $n\geqslant 1$ 时，$I_n=-\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-[x^n\mathrm{e}^{-x}]_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=nI_{n-1}$，故有

$$I_n=n!.$$

*习 题 5-5

1. 判定下列反常积分的收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$；

(3) $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x|\sin x|}$；

(5) $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$；　　(6) $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^3}$；

(7) $\int_0^1\frac{x^4\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$；　　(8) $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$.

解 (1) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=1$，因此 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}=1$，因此 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ 收敛.

(3) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\sin\frac{1}{x^2}=1$，因此 $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

(4) 由于当 $x\geqslant 0$ 时，$\frac{1}{1+x|\sin x|}\geqslant\frac{1}{1+x}$，且 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t}$ 发散，因此 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x|\sin x|}$ 发散.

(5) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{x\arctan x}{1+x^3}=\frac{\pi}{2}$，因此 $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$ 收敛.

(6) $x=1$ 是被积函数的瑕点. 由于 $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)\cdot\frac{1}{(\ln x)^3}=+\infty$，因此 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^3}$ 发散.

(7) $x=1$ 是被积函数的瑕点. 由于 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{2}$，因此 $\int_0^1\frac{x^4\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$ 收敛.

(8) 被积函数有两个瑕点：$x=1,x=2$. 由于 $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)^{\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}=-1$,因此 $\int_1^{1.5}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 收敛；又因为 $\lim\limits_{x\to2^-}(x-2)^{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}=1$,因此 $\int_{1.5}^2\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$收敛，故 $\int_1^2\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$收敛.

2. 设反常积分 $\int_1^{+\infty}f^2(x)dx$ 收敛.证明反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}dx$ 绝对收敛.

解 因为 $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leqslant\dfrac{f^2(x)+\dfrac{1}{x^2}}{2}$,由于 $\int_1^{+\infty}f^2(x)dx$ 收敛，$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}dx$ 也收敛，因此 $\int_1^{+\infty}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|dx$ 收敛.即 $\int_1^{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}dx$ 绝对收敛.

3. 用 Γ 函数表示下列积分，并指出这些积分的收敛范围：

(1) $\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx\,(n>0)$； (2) $\int_0^1\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^p dx$；

(3) $\int_0^{+\infty}x^m e^{-x^n}dx\,(n\neq0)$.

解 (1) 令 $u=x^n$，即 $x=u^{\frac{1}{n}}$，$\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=\dfrac{1}{n}\int_0^{+\infty}e^{-u}u^{\frac{1}{n}-1}du=\dfrac{1}{n}\Gamma\left(\dfrac{1}{n}\right)$,在 $n>0$ 时都收敛.

(2) 令 $u=\ln\dfrac{1}{x}$,即 $x=e^{-u}$，$\int_0^1\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^p dx=\int_{+\infty}^0-u^p e^{-u}du=\int_0^{+\infty}u^p e^{-u}du=\Gamma(p+1)$,当 $p>-1$ 时收敛.

(3) 令 $u=x^n$,即 $x=u^{\frac{1}{n}}$,

当 $n>0$ 时，$\int_0^{+\infty}x^m e^{-x^n}dx=\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{n}u^{\frac{m+1}{n}-1}e^{-u}du=\dfrac{1}{n}\Gamma\left(\dfrac{m+1}{n}\right)$,

当 $n<0$ 时，$\int_0^{+\infty}x^m e^{-x^n}dx=\int_{+\infty}^0\dfrac{1}{n}u^{\frac{m+1}{n}-1}e^{-u}du=-\dfrac{1}{n}\Gamma\left(\dfrac{m+1}{n}\right)$,

故 $\int_0^{+\infty}x^m e^{-x^n}dx=\dfrac{1}{|n|}\Gamma\left(\dfrac{m+1}{n}\right)$,当$\dfrac{m+1}{n}>0$ 时收敛.

4. 证明 $\Gamma\left(\dfrac{2k+1}{2}\right)=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k-1)\sqrt{\pi}}{2^k}$,其中 k 为正整数.

证 $\Gamma\left(\dfrac{2k+1}{2}\right)=\dfrac{2k-1}{2}\Gamma\left(\dfrac{2k-1}{2}\right)=\dfrac{2k-1}{2}\cdot\dfrac{2k-3}{2}\Gamma\left(\dfrac{2k-3}{2}\right)$

$$=\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2k-3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi}.$$

5. 证明以下各式(其中 n 为正整数)：

(1) $2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)=2^n\Gamma(n+1)$;　　(2) $1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)=\dfrac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$;

(3) $\sqrt{\pi}\Gamma(2n)=2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$.

证　(1) $2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)=2^n n!=2^n\Gamma(n+1)$.

(2) $1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)=\dfrac{(2n-1)!}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}=\dfrac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}(n-1)!}=\dfrac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$.

(3) 因为$\sqrt{\pi}\Gamma(2n)=(2n-1)!\sqrt{\pi}$,

$$\begin{aligned}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)&=(n-1)!\ \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}\\&=\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}{2^{n-1}}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}\\&=\frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}}\sqrt{\pi},\end{aligned}$$

因此结论成立.

总 习 题 五

1. 填空

(1) 函数 $f(x)$在$[a,b]$上有界是 $f(x)$在$[a,b]$上可积的__________条件,而 $f(x)$在$[a,b]$上连续是 $f(x)$在$[a,b]$上可积的__________条件;

(2) 对$[a,+\infty)$上非负、连续的函数 $f(x)$,它的变上限积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,+\infty)$上有界是反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的__________条件;

(3) 绝对收敛的反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 一定__________.

(4)函数$f(x)$在$[a,b]$上有定义且$|f(x)|$在$[a,b]$上可积,此时积分 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ __________存在.

解　(1) 必要,充分.　　(2) 充分,必要.　　(3) 收敛.

(4) 不一定.例如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\-1, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$则$|f(x)|=1$ 在$[a,b]$上可积,而 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 不存在.

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\ (p>0)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 连续；

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\displaystyle\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}=\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x=\left[\dfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^p=\displaystyle\int_0^1 x^p\mathrm{d}x=\dfrac{1}{p+1}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{n!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\dfrac{i}{n}=\displaystyle\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=-1$.

注 若函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$（或者 $[a,b)$）上连续且单调，且反常积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $x_k=a+k\cdot\dfrac{b-a}{n}$（或者 $x_k=a+(k-1)\cdot\dfrac{b-a}{n}$）（证明从略）.

(4) 记 $F(x)=x\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)=af(a)$.

(5) 先证明所求极限为未定式 $\dfrac{\infty}{\infty}$. 由于当 $x>\tan 1$ 时，$\arctan x>1$，记 $c=\displaystyle\int_0^{\tan 1}(\arctan t)^2\mathrm{d}t$，则当 $x>\tan 1$ 时有

$$\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t=c+\int_{\tan 1}^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t>c+\int_{\tan 1}^x\mathrm{d}t=c+x-\tan 1;$$

故有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t=+\infty$，从而利用洛必达法则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\arctan x)^2}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

3. 下列计算是否正确，试说明理由：

(1) $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\left[-\arctan\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1}=-\frac{\pi}{2}$;

(2) 因为 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}\xlongequal{x=\frac{1}{t}}-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$,

所以
$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=0.$$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0.$

解 (1) 不对. 因为 $u=\frac{1}{x}$ 在 $[-1,1]$ 上有间断点 $x=0$,不符合换元法的要求. 而由习题 5-1 的第 7 题可知该积分一定为正,因此该积分计算不对. 事实上,

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=[\arctan x]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}.$$

(2) 不对. 原因与(1)相同. 事实上,

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)=\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

(3) 不对. 因为 $\int_{0}^{A}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+A^2)$,当 $A\to+\infty$ 时极限不存在,故 $\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 发散,也就得到 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 发散.

4. 设 $p>0$,证明

$$\frac{p}{1+p}<\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}<1.$$

证 由于当 $p>0$ 时,$0<\frac{1}{1+x^p}<1$,因此有 $\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}<1$.

又
$$1-\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}=\int_{0}^{1}\frac{x^p\mathrm{d}x}{1+x^p}<\int_{0}^{1}x^p\mathrm{d}x=\frac{1}{1+p},$$

故有 $\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}>\frac{p}{1+p}$,原题得证.

5. 设 $f(x)$、$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上均连续,证明:

(1) $\left(\int_{a}^{b}f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_{a}^{b}f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_{a}^{b}g^2(x)\mathrm{d}x$(柯西—施瓦茨不等式);

(2) $\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$（闵可夫斯基不等式）.

证 (1) 对任意实数 λ，有 $\int_a^b [f(x)+\lambda g(x)]^2 \mathrm{d}x \geqslant 0$，即

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + 2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \lambda^2\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

左边是一个关于 λ 的二次多项式，它非负的条件是其判别式非正，即有

$$4\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 - 4\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

从而本题得证.

$$\begin{aligned}(2)\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x &= \int_a^b [f^2(x)+2f(x)g(x)+g^2(x)]\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + 2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\\ &\leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + 2\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\\ &= \left[\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2,\end{aligned}$$

从而本题得证.

6. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$. 证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2.$$

证 根据上一题，有

$$\left(\int_a^b \sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b \left(\sqrt{f(x)}\right)^2\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right)^2\mathrm{d}x,$$

即得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2.$$

7. 计算下列积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$；　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$.

解 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}(1+\cos x)$$

$$= \left[x\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x - [\ln(1+\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \left[2\ln\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \ln 2 = \frac{\pi}{2}.$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\mathrm{d}x,$$

而

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x=\frac{\pi}{4}-u} -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} (\ln\sqrt{2}+\ln\cos u)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{\pi\ln 2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\mathrm{d}x,$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\mathrm{d}x = \frac{\pi\ln 2}{8}.$$

(3) $\int_0^{a} \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}} \xlongequal{x=a\sin u} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u\mathrm{d}u}{\sin u+\cos u} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u\mathrm{d}u}{\cos u+\sin u}$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u\mathrm{d}u}{\sin u+\cos u} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u\mathrm{d}u}{\cos u+\sin u}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}.$$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x-\cos x|\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x-\sin x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x-\cos x)\mathrm{d}x$$

$$= [\sin x+\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x-\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2(\sqrt{2}-1).$$

(5) 注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan\dfrac{\tan x}{\sqrt{2}}=\dfrac{\pi}{2}$，因此有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x\,\mathrm{d}x}{\sec^2 x+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan^2 x+2}$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

8. 设 $f(x)$ 为连续函数，证明

$$\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t.$$

证 $$\int_0^x\left(\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t=\left[t\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right]_0^x-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

$$=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

$$=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t.$$

本题也可利用原函数性质来证明，记等式左端的函数为 $F(x)$、右端的函数为 $G(x)$，则

$$F'(x)=\left(x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right)'=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

$$G'(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

即 $F(x)$、$G(x)$ 都为函数 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的原函数，因此它们至多只差一个常数，但由于 $F(0)=G(0)=0$，因此必有 $F(x)=G(x)$.

9. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{\mathrm{d}t}{f(t)},x\in[a,b].$$

证明：(1) $F'(x)\geqslant 2$；(2) 方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根.

证 (1) $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\geqslant 2\sqrt{f(x)\cdot\dfrac{1}{f(x)}}=2.$

(2) $F(a)=\displaystyle\int_b^a\frac{\mathrm{d}t}{f(t)}=-\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{f(t)}<0$，$F(b)=\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0$，由闭区间上连续函数性质可知 $F(x)$ 在区间 (a,b) 内必有零点，根据(1)可知函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调增加，从而零点惟一，即方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根.

10. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{1+e^{x}}, & x<0.\end{cases}$$

求 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x \xlongequal{x=u+1} \int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u=\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}u}{1+e^{u}}+\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{1+u}$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{e^{-u}\mathrm{d}u}{1+e^{-u}}+[\ln(1+u)]_0^1$$

$$=[-\ln(1+e^{-u})]_{-1}^{0}+\ln 2=\ln(1+e).$$

11. 设 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,$g(x)$在区间$[a,b]$上连续不变号.证明至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使下式成立:

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\text{(积分第一中值定理)}.$$

证 不妨设 $g(x)\geqslant 0$,由定积分性质可知 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.记 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值为 M、最小值为 m,则有

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x),$$

故有

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b mg(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_a^b Mg(x)\mathrm{d}x=M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

当 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$ 时,由上述不等式可知 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$,故结论成立.

当 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x>0$ 时,有

$$m\leqslant\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\leqslant M,$$

由闭区间上连续函数性质,知存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x},$$

从而结论成立.

12. 证明：$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx = \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x^2} dx\ (n>1)$，并用它证明：

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma(n+1)\ (n \in \mathbf{N}).$$

证 当 $n>1$ 时，

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-1} d(e^{-x^2}) = -\frac{1}{2}[x^{n-1} e^{-x^2}]_0^{+\infty} + \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x^2} dx$$

$$= \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x^2} dx.$$

记 $I_n = \int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx$，则

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx = \frac{2n+1-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{2n-1} e^{-x^2} dx$$

$$= n\int_0^{+\infty} x^{2n-1} e^{-x^2} dx = nI_{n-1},$$

因此有 $I_n = n!\ I_0 = n!\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = n!\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{+\infty}$

$$= \frac{1}{2}n! = \frac{1}{2}\Gamma(n+1).$$

13. 判断下列反常积分的收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} dx$；　　(2) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x^2-3x+2}}$；

(3) $\int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{\ln x} dx$；　　(4) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$.

解 (1) $x=0$ 为被积函数 $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}$ 的瑕点，而 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}} \cdot f(x) = 1$，因此 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛；又由于 $|f(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^3}}$，而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$ 收敛，故 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，因此 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} dx$ 收敛.

(2) $x=2$ 为被积函数 $f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 的瑕点，而 $\lim\limits_{x\to 2^+} (x-2)^{\frac{1}{3}} \cdot f(x) = \frac{1}{2}$，因此 $\int_2^3 f(x)dx$ 收敛；又由于 $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{5}{3}} \cdot f(x) = 1$，因此 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 收敛，故 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 收敛.

(3) $\int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{\ln x} dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x} d(\sin x) = \left[\frac{\sin x}{\ln x}\right]_2^{+\infty} + \int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x\ln^2 x} dx$

$$=\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln^2 x}dx-\frac{\sin 2}{\ln 2},$$

又由于 $\left|\frac{\sin x}{x\ln^2 x}\right|\leqslant\frac{1}{x\ln^2 x}$，而 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$ 收敛，故 $\int_2^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x\ln^2 x}\right|dx$ 收敛，即 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln^2 x}dx$ 绝对收敛，因此 $\int_2^{+\infty}\frac{\cos x}{\ln x}dx$ 收敛.

(4) $x=0$、$x=1$、$x=2$ 为被积函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$ 的瑕点，$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{2}{3}}\cdot f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$，$\lim\limits_{x\to1}(x-1)^{\frac{1}{3}}\cdot f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to2}f(x)(x-2)^{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$，故 $\int_0^3 f(x)dx$ 收敛；又由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{4}{3}}\cdot f(x)=1$，因此 $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$ 收敛，故 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$ 收敛.

14. 计算下列反常积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$；　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}(\alpha\geqslant0)$.

解　(1) $x=0$ 为被积函数 $f(x)=\ln\sin x$ 的瑕点，而

$$\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\cdot f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\sin x}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cot x}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-2x^{\frac{3}{2}}}{\tan x}=0,$$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$ 收敛.

又 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$，而

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-u}\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}-\ln\cos u\,du=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos u\,du,$$

因此 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\ln\sin 2x-\ln 2)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\,dx$$

$$\xlongequal{u=2x}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin u\,\mathrm{d}u-\frac{\pi}{4}\ln 2,$$

故
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

(2) 记被积函数为 $f(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$，则当 $\alpha=0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot f(x)=\dfrac{1}{2}$，当 $\alpha>0$ 时 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot f(x)=0$，因此当 $\alpha\geqslant 0$ 时，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$收敛.

令 $x=\dfrac{1}{t}$，得到$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\int_{+\infty}^0\frac{-t^\alpha\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$，又
$$\int_{+\infty}^0\frac{-t^\alpha\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)},$$

故
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}&=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\\&=\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}+\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\right]\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{1}{2}[\arctan x]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

第六章　定积分的应用

习　题　6－2

1. 求图 6－1 中各画斜线部分的面积:

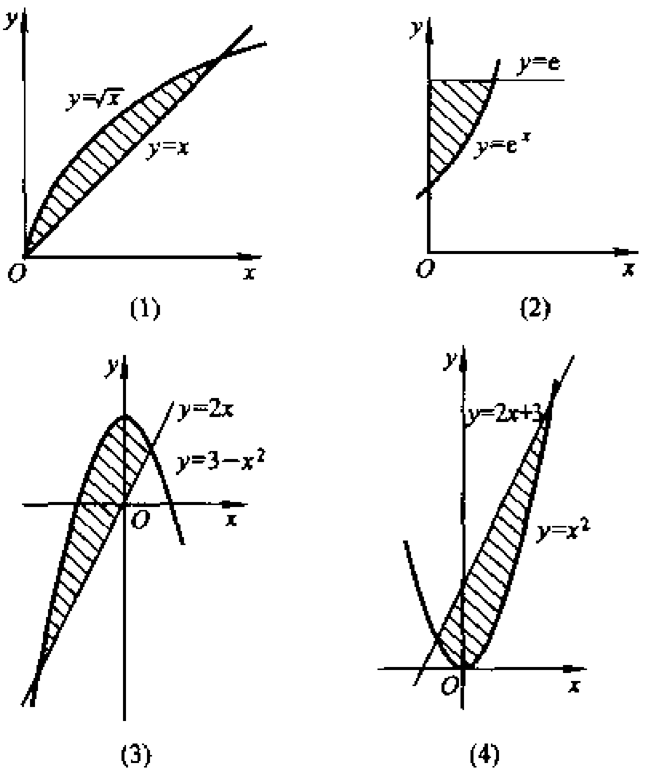


图 6－1

解　(1) 解方程组$\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=x, \end{cases}$得到交点坐标为(0,0)和(1,1).

如果取 x 为积分变量,则 x 的变化范围为$[0,1]$,相应于$[0,1]$上的任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的窄条面积近似于高为$\sqrt{x}-x$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积,因此有

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x)\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}.$$

如果取 y 为积分变量,则 y 的变化范围为$[0,1]$,相应于$[0,1]$上的任一小区间$[y,y+\mathrm{d}y]$的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、宽为 $y-y^2$ 的窄矩形的面积,因此有

$$A=\int_0^1(y-y^2)\mathrm{d}y=\left[\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^1=\frac{1}{6}.$$

(2) 取 x 为积分变量，则易知 x 的变化范围为[0,1]，相应于[0,1]上的任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的窄条面积近似于高为 $\mathrm{e}-\mathrm{e}^x$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_0^1(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=[\mathrm{e}x-\mathrm{e}^x]_0^1=1.$$

如果取 y 为积分变量，则易知 y 的变化范围为[1,e]，相应于[1,e]上的任一小区间$[y,y+\mathrm{d}y]$的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、宽为 $\ln y$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_1^{\mathrm{e}}\ln y\mathrm{d}y=[y\ln y]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}y=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1.$$

(3) 解方程组$\begin{cases}y=2x,\\y=3-x^2,\end{cases}$得到交点坐标为$(-3,-6)$和$(1,2)$.

如果取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为$[-3,1]$，相应于$[-3,1]$上的任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的窄条面积近似于高为$(3-x^2)-2x=-x^2-2x+3$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_{-3}^1(-x^2-2x+3)\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-3}^1=\frac{32}{3}.$$

如果用 y 为积分变量，则 y 的变化范围为$[-6,3]$，但是在$[-6,2]$上的任一小区间$[y,y+\mathrm{d}y]$的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、宽为$\frac{y}{2}-(-\sqrt{3-y})=\frac{y}{2}+\sqrt{3-y}$的窄矩形的面积，在$[2,3]$上的任一小区间$[y,y+\mathrm{d}y]$的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、宽为$\sqrt{3-y}-(-\sqrt{3-y})=2\sqrt{3-y}$的窄矩形的面积，因此有

$$\begin{aligned}A&=\int_{-6}^2\left(\frac{y}{2}+\sqrt{3-y}\right)\mathrm{d}y+\int_2^3 2\sqrt{3-y}\mathrm{d}y\\&=\left[\frac{y^2}{4}-\frac{2}{3}(3-y)^{\frac{3}{2}}\right]_{-6}^2+\left[-\frac{4}{3}(3-y)^{\frac{3}{2}}\right]_2^3=\frac{32}{3},\end{aligned}$$

从这里可看到本小题以 x 为积分变量较容易做. 原因是本小题中的图形边界曲线，若分为上下两段的话，则为 $y=2x$ 和 $y=3-x^2$；而分为左右两段的话，则为 $x=-\sqrt{3-y}$ 和 $x=\begin{cases}\frac{y}{2}, & -6\leqslant y<2,\\\sqrt{3-y}, & 2\leqslant y\leqslant 3,\end{cases}$ 其中右段曲线的表示相对比较复杂，也就导致计算形式复杂.

(4) 解方程组$\begin{cases}y=2x+3,\\y=x^2,\end{cases}$得到交点坐标为$(-1,1)$和$(3,9)$，与(3)相同的原因，本小题以 x 为积分变量计算较容易. 取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为

$[-1,3]$,相应于$[-1,3]$上的任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的窄条面积近似于高为$2x+3-x^2$、底为$\mathrm{d}x$的窄矩形的面积,因此有

$$A=\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)\mathrm{d}x=\left[x^2+3x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{3}=\frac{32}{3}.$$

2. 求由下列各曲线所围成的图形的面积:

(1) $y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $x^2+y^2=8$(两部分都要计算);

(2) $y=\frac{1}{x}$与直线$y=x$及$x=2$;

(3) $y=\mathrm{e}^x$,$y=\mathrm{e}^{-x}$与直线$x=1$;

(4) $y=\ln x$,y轴与直线$y=\ln a$,$y=\ln b(b>a>0)$.

解 (1) 如图6-2,先计算图形D_1的面积,容易求得$y=\frac{1}{2}x^2$与$x^2+y^2=8$的交点为$(-2,2)$和$(2,2)$.取x为积分变量,则x的变化范围为$[-2,2]$,相应于$[-2,2]$上的任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的窄条面积近似于高为$\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2$、底为$\mathrm{d}x$的窄矩形的面积,因此有

$$A_1=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=2\left[\frac{x}{2}\sqrt{8-x^2}+4\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{6}x^3\right]_0^2=2\pi+\frac{4}{3},$$

图形D_2的面积为

$$A_2=\pi(2\sqrt{2})^2-\left(2\pi+\frac{4}{3}\right)=6\pi-\frac{4}{3}.$$

(2) 如图6-3,取x为积分变量,则x的变化范围为$[1,2]$,相应于$[1,2]$上的任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的窄条面积近似于高为$x-\frac{1}{x}$、底为$\mathrm{d}x$的窄矩形的

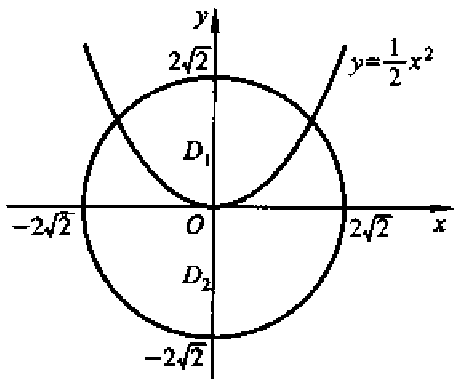


图6-2

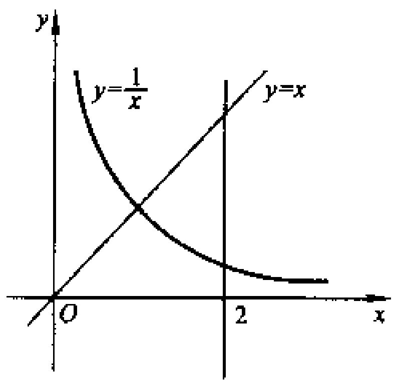


图6-3

面积,因此有

$$A=\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x^2-\ln x\right]_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

(3) 如图 6-4,取 x 为积分变量,则 x 的变化范围为[0,1],相应于[0,1]上的任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的窄条面积近似于高为 $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积,因此有

$$A=\int_0^1(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}-2.$$

(4) 如图 6-5,取 y 为积分变量,则 y 的变化范围为$[\ln a,\ln b]$,相应于$[\ln a,\ln b]$上的任一小区间$[y,y+\mathrm{d}y]$的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、宽为 e^y 的窄矩形的面积,因此有

$$A=\int_{\ln a}^{\ln b}\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=[\mathrm{e}^y]_{\ln a}^{\ln b}=b-a.$$

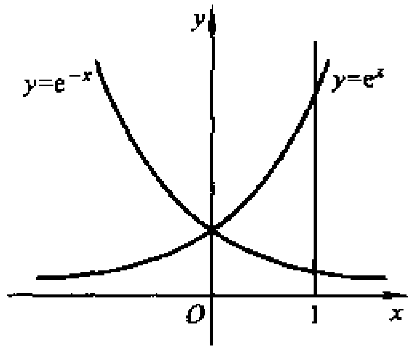


图 6-4

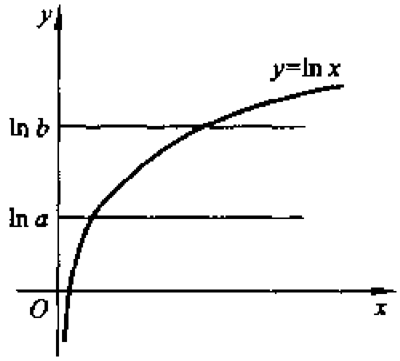


图 6-5

3. 求抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其在点$(0,-3)$和$(3,0)$处的切线所围成的图形的面积.

解 首先求得导数 $y'|_{x=0}=4$、$y'|_{x=3}=-2$,故抛物线在点$(0,-3)$、$(3,0)$处的切线分别为 $y=4x-3$、$y=-2x+6$,容易求得这两条切线交点为$\left(\frac{3}{2},3\right)$(如图 6-6),因此所求面积为

$$A=\int_0^{\frac{3}{2}}[4x-3-(-x^2+4x-3)]\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^3[-2x+6-(-x^2+4x-3)]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{9}{4}.$$

4. 求抛物线 $y^2=2px$ 及其在点$\left(\frac{p}{2},p\right)$处的法线所围成的图形的面积.

解 利用隐函数求导方法,抛物线方程 $y^2=2px$ 两端分别对 x 求导,得

$$2yy'=2p,$$

即得 $y'\Big|_{(\frac{p}{2},p)}=1$，故法线斜率为 $k=-1$，从而得到法线方程为 $y=-x+\frac{3}{2}p$（如图 6-7），因此所求面积为

$$A=\int_{-3p}^{p}\left(-y+\frac{3}{2}p-\frac{1}{2p}y^2\right)\mathrm{d}y=\left[-\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2}py-\frac{1}{6p}y^3\right]_{-3p}^{p}=\frac{16}{3}p^2.$$

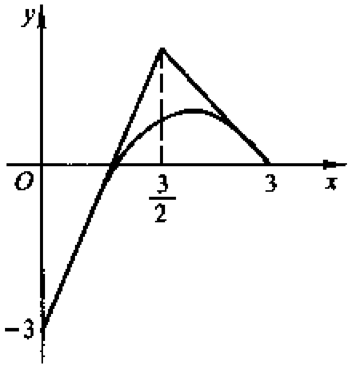


图 6-6

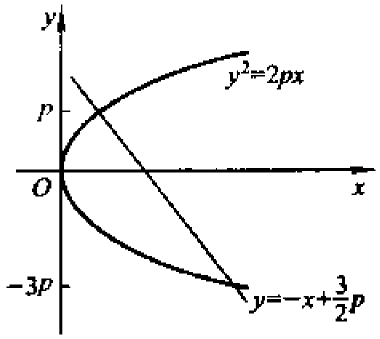


图 6-7

5．求由下列各曲线所围成的图形的面积：

(1) $\rho=2a\cos\theta$；　　(2) $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$；

(3) $\rho=2a(2+\cos\theta)$.

解　(1) $A=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(2a\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\pi a^2$.

(2) 由对称性可知，所求面积为第一象限部分面积的 4 倍，记曲线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 上的点为 (x,y)，因此

$$A=4\int_0^a y\mathrm{d}x\xlongequal{x=a\cos^3 t}4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}[a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)]\mathrm{d}t$$

$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t-\sin^6 t)\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

注　对于参数方程的处理方式一般可采用本题的方法，首先根据问题化为积分（其中记曲线上的点为 (x,y)），对于积分根据参数方程进行换元，即可化为关于参数的积分，再进行计算.

(3) $A=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[2a(2+\cos\theta)]^2\mathrm{d}\theta=2a^2\int_0^{2\pi}(4+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$

$$=2a^2\int_0^{2\pi}(4+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta=18\pi a^2.$$

6．求由摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 的一拱 $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与横轴所

围成的图形的面积.

解 本题做法与5(2)类似. 以 x 为积分变量,则 x 的变化范围为 $[0,2\pi a]$,设摆线上的点为 (x,y),则所求面积为

$$A=\int_0^{2\pi a} y\mathrm{d}x,$$

再根据参数方程换元,令 $x=a(t-\sin t)$,则 $y=a(1-\cos t)$,因此有

$$A=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos^2 t)\mathrm{d}t=3\pi a^2.$$

7. 求对数螺线 $\rho=a\mathrm{e}^{\theta}(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 及射线 $\theta=\pi$ 所围成的图形的面积.

解 $A=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(a\mathrm{e}^{\theta})^2\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{4}[\mathrm{e}^{2\theta}]_{-\pi}^{\pi}=\frac{a^2}{4}(\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}).$

8. 求下列各曲线所围成图形的公共部分的面积:

(1) $\rho=3\cos\theta$ 及 $\rho=1+\cos\theta$;

(2) $\rho=\sqrt{2}\sin\theta$ 及 $\rho^2=\cos 2\theta$.

解 (1) 首先求出两曲线交点为 $\left(\frac{3}{2},\frac{\pi}{3}\right)$、$\left(\frac{3}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$,由于图形关于极轴的对称性(如图6-8),因此所求面积为极轴上面部分面积的2倍,即得

$$A=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(3\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta\right]=\frac{5\pi}{4}.$$

(2) 首先求出两曲线交点为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{6}\right)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$,由于图形的对称性(如图6-9),因此有

$$A=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}(\sqrt{2}\sin\theta)^2\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta\right]=\frac{\pi}{6}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

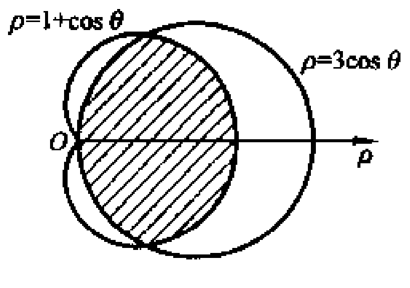


图 6-8

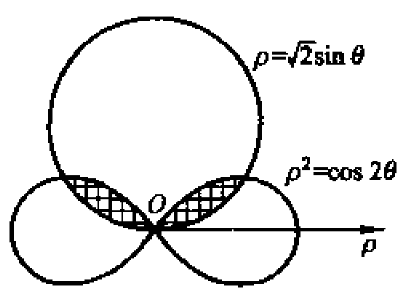


图 6-9

9. 求位于曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 下方,该曲线过原点的切线的左方以及 x 轴上方之间

的图形的面积.

解 先求曲线过原点的切线方程，设切点为 (x_0, y_0)，其中 $y_0 = e^{x_0}$，则切线的斜率为 e^{x_0}，故切线方程为

$$y - y_0 = e^{x_0}(x - x_0),$$

由于该切线过原点，因此有 $y_0 = e^{x_0} x_0$，解得 $x_0 = 1$，$y_0 = e$，即切线方程为

$$y = ex.$$

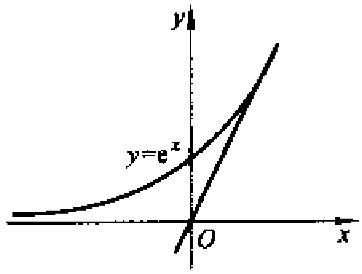


图 6 - 10

如图 6－10 可知所求面积为

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^x \mathrm{d}y + \int_0^1 (e^x - ex)\mathrm{d}y = [e^x]_{-\infty}^0 + \left[e^x - \frac{e}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{e}{2}.$$

10. 求由抛物线 $y^2 = 4ax$ 与过焦点的弦所围成的图形面积的最小值.

解 抛物线的焦点为$(a,0)$，设过焦点的直线为 $y = k(x-a)$，则该直线与抛物线的交点的纵坐标为 $y_1 = \dfrac{2a - 2a\sqrt{1+k^2}}{k}$，$y_2 = \dfrac{2a + 2a\sqrt{1+k^2}}{k}$，面积为

$$\begin{aligned} A &= \int_{y_1}^{y_2} \left(a + \frac{y}{k} - \frac{y^2}{4a}\right)\mathrm{d}y = a(y_2 - y_1) + \frac{y_2^2 - y_1^2}{2k} - \frac{y_2^3 - y_1^3}{12a} \\ &= \frac{8a^2(1+k^2)^{3/2}}{3k^3} \\ &= \frac{8a^2}{3}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^{3/2}, \end{aligned}$$

故面积是 k 的单调减少函数，因此其最小值在 $k \to \infty$ 即弦为 $x = a$ 时取到，最小值为 $\dfrac{8}{3}a^2$.

11. 把抛物线 $y^2 = 4ax$ 及直线 $x = x_0 (x_0 > 0)$ 所围成的图形绕 x 轴旋转，计算所得旋转体的体积.

解 该体积即为由曲线 $y = \sqrt{4ax}$、$x = x_0$ 及 x 轴所围的图形绕 x 轴旋转所得，因此体积为

$$V = \int_0^{x_0} \pi(\sqrt{4ax})^2 \mathrm{d}x = 2\pi a x_0^2.$$

12. 由 $y = x^3, x = 2, y = 0$ 所围成的图形，分别绕 x 轴及 y 轴旋转，计算所得两个旋转体的体积.

解 (1) 图形绕 x 轴旋转，该体积为

$$V = \int_0^2 \pi(x^3)^2 \mathrm{d}x = \frac{128}{7}\pi.$$

(2) 图形绕 y 轴旋转，则该立体可看作圆柱体（即由 $x = 2, y = 8, x = 0,$

$y=0$所围成的图形绕 y 轴所得的立体)减去由曲线 $x=\sqrt[3]{y}$, $y=8$, $x=0$ 所围成的图形绕 y 轴所得的立体，因此体积为

$$V=\pi\cdot 2^2\cdot 8-\int_0^8 \pi(\sqrt[3]{y})^2\mathrm{d}y=\frac{64}{5}\pi.$$

13. 把星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 所围成的图形绕 x 轴旋转，计算所得旋转体的体积.

解 记 x 轴上方部分星形线的函数为 $y=y(x)$，则所求体积为曲线 $y=y(x)$与 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转而成，故有

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2\mathrm{d}x.$$

由于星形线的参数方程为 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$，所以对上述积分作换元 $x=a\cos^3 t$，便得

$$V=\int_{\pi}^{0}\pi(a\sin^3 t)^2(a\cos^3 t)'\mathrm{d}t=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

14. 用积分方法证明图 6－11 中球缺的体积为

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right).$$

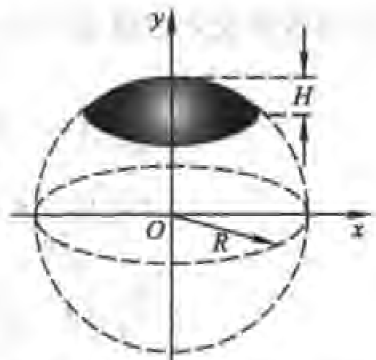


图 6－11

解 该立体可看作由曲线 $x=\sqrt{R^2-y^2}$, $y=R-H$和 $x=0$ 所围成的图形绕 y 轴旋转所得，因此体积为

$$V=\int_{R-H}^{R}\pi(\sqrt{R^2-y^2})^2\mathrm{d}y=\pi\left[R^2y-\frac{1}{3}y^3\right]_{R-H}^{R}$$
$$=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right).$$

15. 求下列已知曲线所围成的图形，按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积：

(1) $y=x^2$, $x=y^2$，绕 y 轴；

(2) $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$, $x=0$, $x=a$, $y=0$，绕 x 轴；

(3) $x^2+(y-5)^2=16$，绕 x 轴；

(4) 摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$的一拱，$y=0$，绕直线 $y=2a$.

解 (1) $V=\int_0^1[\pi(\sqrt{y})^2-\pi(y^2)^2]\mathrm{d}y=\dfrac{3}{10}\pi$.

(2) $$V=\int_0^a\pi\left(a\operatorname{ch}\frac{x}{a}\right)^2\mathrm{d}x=\pi a^2\int_0^a\left(\frac{1}{2}\operatorname{ch}\frac{2x}{a}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\pi a^2\left[\frac{a}{4}\operatorname{sh}\frac{2x}{a}+\frac{x}{2}\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{4}\pi a^3(\operatorname{sh}2+2)=\frac{1}{8}\pi a^3(4+e^2-e^{-2}).$$

(3) 该立体为由曲线 $y=5+\sqrt{16-x^2}$, $x=-4$, $x=4$, $y=0$ 所围成图形绕 x 轴旋转所得立体减去由曲线 $y=5-\sqrt{16-x^2}$, $x=-4$, $x=4$, $y=0$ 所围成图形绕 x 轴旋转所得立体，因此体积为

$$V=\int_{-4}^{4}\pi(5+\sqrt{16-x^2})^2\mathrm{d}x-\int_{-4}^{4}\pi(5-\sqrt{16-x^2})^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-4}^{4}20\pi\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x=4\sin t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}320\pi\cos^2 t\,\mathrm{d}t=640\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=160\pi^2.$$

(4) 该立体可看作由曲线 $y=2a$, $y=0$, $x=0$, $x=2\pi a$ 所围成的图形绕 $y=2a$ 旋转所得的圆柱体减去由摆线，$y=2a$, $x=0$, $x=2a$ 所围成的立体，记摆线上的点为 (x,y)，则体积为

$$V=\pi(2a)^2(2\pi a)-\int_0^{2\pi a}\pi(2a-y)^2\mathrm{d}x=8\pi^2a^3-\int_0^{2\pi a}\pi(2a-y)^2\mathrm{d}x,$$

再根据摆线的参数方程进行换元，即作换元 $x=a(t-\sin t)$，此时 $y=a(1-\cos t)$，因此有

$$V=8\pi^2a^3-\int_0^{2\pi}\pi[2a-a(1-\cos t)]^2a(1-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=8\pi^2a^3-\pi a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos t-\cos^2 t-\cos^3 t)\mathrm{d}t$$

$$=8\pi^2a^3-4\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=7\pi^2a^3.$$

16. 求圆盘 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 绕 $x=-b(b>a>0)$ 旋转所成旋转体的体积.

解 记由曲线 $x=\sqrt{a^2-y^2}$、$x=-b$、$y=-a$、$y=a$ 围成的图形绕 $x=-b$ 旋转所得旋转体的体积为 V_1，由曲线 $x=-\sqrt{a^2-y^2}$、$x=-b$、$y=-a$、$y=a$ 围成的图形绕 $x=-b$ 旋转所得旋转体的体积为 V_2，则所求体积为

$$V=V_1-V_2=\int_{-a}^{a}\pi(\sqrt{a^2-y^2}+b)^2\mathrm{d}y-\int_{-a}^{a}\pi(-\sqrt{a^2-y^2}+b)^2\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-a}^{a}4\pi b\sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}y\xlongequal{y=a\sin t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\pi a^2b\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=8\pi a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=2\pi^2a^2b.$$

17. 设有一截锥体，其高为 h，上、下底均为椭圆，椭圆的轴长分别为 $2a$、$2b$

和 $2A$、$2B$，求这截锥体的体积.

解 用与下底相距 x 且平行于底面的平面去截该立体得到一个椭圆，记其半轴长分别为 u、v，则

$$u=\frac{a-A}{h}x+A,\ v=\frac{b-B}{h}x+B,$$

该椭圆面积为 $\pi\left(\frac{a-A}{h}x+A\right)\left(\frac{b-B}{h}x+B\right)$，因此体积为

$$\begin{aligned}V&=\int_0^h\pi\left(\frac{a-A}{h}x+A\right)\left(\frac{b-B}{h}x+B\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{6}\pi h\left[2(ab+AB)+aB+bA\right].\end{aligned}$$

18. 计算底面是半径为 R 的圆，面垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体体积(图 6-12).

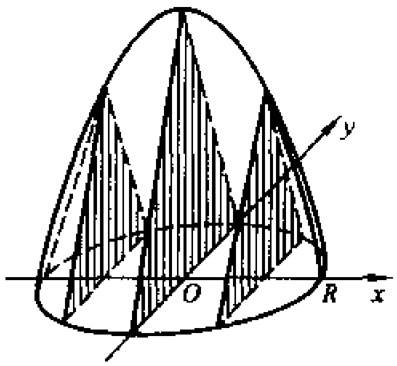


图 6-12

解 以 x 为积分变量，则 x 的变化范围为$[-R,R]$，相应的截面等边三角形边长为 $2\sqrt{R^2-x^2}$，面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{R^2-x^2})^2=\sqrt{3}(R^2-x^2)$，因此体积为

$$V=\int_{-R}^{R}\sqrt{3}(R^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3.$$

19. 证明：由平面图形 $0\leqslant a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y\leqslant f(x)$绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

解 取横坐标 x 为积分变量，与区间$[a,b]$上任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$相应的窄条图形绕 y 轴旋转所成的旋转体近似于一圆柱壳，柱壳的高为 $f(x)$，厚为 $\mathrm{d}x$，底面圆周长为 $2\pi x$，故其体积近似等于 $2\pi xf(x)\mathrm{d}x$，从而由元素法即得结论.

20．利用题 19 的结论，计算曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 和 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积．

解 $V=2\pi\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x=\pi^2\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x=2\pi^2$．

注 在计算积分时，这里利用了教材第五章第三节中的例6的结论 $\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x$．

21．计算曲线 $y=\ln x$ 相应于 $\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{8}$ 的一段弧的长度．

解
$$s=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sqrt{u^2-1}}\int_2^3\frac{u^2}{u^2-1}\mathrm{d}u$$
$$=\left[u+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_2^3=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

22．计算曲线 $y=\frac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$ 上相应于 $1\leqslant x\leqslant 3$ 的一段弧（图 6－13）的长度．

解
$$s=\int_1^3\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x=\int_1^3\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$
$$=\left[\sqrt{x}+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^3=2\sqrt{3}-\frac{4}{3}.$$

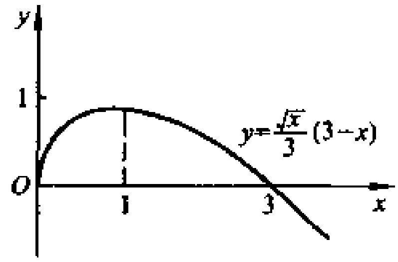


图 6－13

23．计算半立方抛物线 $y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3$ 被抛物线 $y^2=\frac{x}{3}$ 截得的一段弧的长度．

解 联立两个方程 $\begin{cases}y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3,\\ y^2=\frac{x}{3}.\end{cases}$ 得到两条曲线的交点为 $\left(2,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 和 $\left(2,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$，由于曲线关于 x 轴对称，因此所求弧段长为第一象限部分的 2 倍，第一象限部分弧段为 $y=\sqrt{\frac{2}{3}(x-1)^3}\,(1\leqslant x\leqslant 2)$，$y'=\sqrt{\frac{3}{2}(x-1)}$，故所求弧的长度为
$$s=2\int_1^2\sqrt{1+\frac{3}{2}(x-1)}\mathrm{d}x=\sqrt{6}\left[\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=\frac{8}{9}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right].$$

24．计算抛物线 $y^2=2px$ 从顶点到这曲线上的一点 $M(x,y)$ 的弧长．

解 不妨设 $p>0$，由于顶点到 (x,y) 的弧长与顶点到 $(x,-y)$ 的弧长相等，因此不妨设 $y>0$，故有

$$s = \int_0^y \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy = \int_0^y \sqrt{1+\left(\frac{y}{p}\right)^2}dy$$

$$= \frac{1}{p}\left[\frac{1}{2}y\sqrt{p^2+y^2}+\frac{1}{2}p^2\ln(y+\sqrt{p^2+y^2})\right]_0^y$$

$$= \frac{1}{2p}y\sqrt{p^2+y^2}+\frac{1}{2}p\ln\frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{|p|}.$$

25. 计算星形线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ 的全长.

解 $s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}dt$

$$= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t dt = 6a.$$

26. 将绕在圆(半径为 a)上的细线放开拉直,使细线与圆周始终相切(图 6-14),细线端点画出的轨迹叫做圆的渐伸线,它的方程为

$$x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t).$$

算出这曲线上相应于 t 从 0 变到 π 的一段弧的长度.

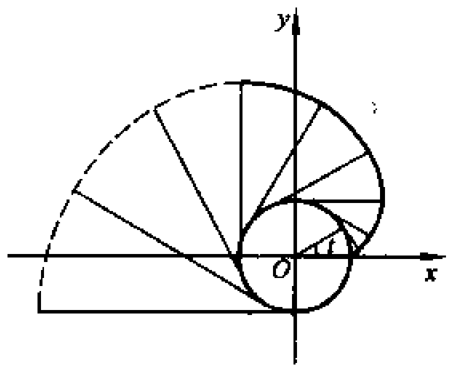


图 6-14

解 $\frac{dx}{dt} = at\cos t, \frac{dy}{dt} = at\sin t$,因此有

$$s = \int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt = \int_0^{\pi} at dt = \frac{a}{2}\pi^2.$$

27. 在摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$上求分摆线第一拱成 1:3 的点的坐标.

解 对应于摆线第一拱的参数 t 的范围为 $[0,2\pi]$,参数 t 在范围$[0,t_0]$时摆线的长度为

$$s_0 = \int_0^{t_0}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt = a\int_0^{t_0} 2\sin\frac{t}{2}dt$$

$$= 4a\left(1-\cos\frac{t_0}{2}\right),$$

当 $t_0 = 2\pi$ 时,长度为 $8a$,故所求点对应的参数 t_0 满足 $4a\left(1-\cos\frac{t_0}{2}\right) = \frac{8a}{4}$,解得 $t_0 = \frac{2\pi}{3}$,从而得到点的坐标为$\left(\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a, \frac{3a}{2}\right)$.

28. 求对数螺线 $\rho = e^{a\theta}$ 相应于自 $\theta = 0$ 到 $\theta = \varphi$ 的一段弧长.

解 $s = \int_0^{\varphi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta = \int_0^{\varphi}\sqrt{1+a^2}e^{a\theta}d\theta = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\varphi}-1).$

29. 求曲线 $\rho\theta = 1$ 相应于自 $\theta = \frac{3}{4}$ 到 $\theta = \frac{4}{3}$ 的一段弧长.

解 $s=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta^2}d\theta=-\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{1+\theta^2}\,d\left(\frac{1}{\theta}\right)$

$$=-\left[\frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta}\right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}+\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}d\theta=\frac{5}{12}+\left[\ln(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}$$

$$=\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{12}.$$

30．求心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)$的全长.

解 $s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^{2\pi}2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=8a.$

习 题 6－3

1．由实验知道，弹簧在拉伸过程中，需要的力 F(单位:N)与伸长量 s(单位:cm)成正比，即

$$F=ks\ (k\text{ 是比例常数}).$$

如果把弹簧由原长拉伸 6 cm，计算所作的功.

解 $W=\int_0^6 ks\,ds=18k(\mathrm{N\cdot cm})=0.18k(\mathrm{J}).$

2．直径为 20 cm、高为 80 cm 的圆筒内充满压强为 10 N/cm^2 的蒸汽.设温度保持不变，要使蒸汽体积缩小一半，问需要作多少功？

解 由条件 $pV=k$ 为常数，故 $k=10\cdot100^2\cdot\pi\cdot0.1^2\cdot0.8=800\pi$.设圆筒内高度减少 h m 时蒸汽的压强为 $p(h)$ N/m^2，则 $p(h)=\frac{k}{V}=\frac{800\pi}{(0.8-h)S}$，压力为 $P=p(h)S=\frac{800\pi}{0.8-h}$，因此作功为

$$W=\int_0^{0.4}\frac{800\pi}{0.8-h}dh=800\pi[-\ln(0.8-h)]_0^{0.4}=800\pi\ln2\approx1\ 742(\mathrm{J}).$$

3．(1) 证明：把质量为 m 的物体从地球表面升高到 h 处所作的功是

$$W=\frac{mgRh}{R+h},$$

其中 g 是地面上的重力加速度，R 是地球的半径；

(2) 一个人造地球卫星的质量为 173 kg，在高于地面 630 km 处进入轨道.问把这个卫星从地面送到 630 km 的高空处，克服地球引力要作多少功？已知 $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$，地球半径 $R=6\ 370$ km.

解 (1) 质量为 m 的物体与地球中心相距 x 时，引力为 $F=k\frac{mM}{x^2}$，根据条

件 $mg=k\dfrac{mM}{R^2}$,因此有 $k=\dfrac{R^2g}{M}$,从而作功为

$$W=\int_R^{R+h}\frac{mgR^2}{x^2}\mathrm{d}x=mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)=\frac{mgRh}{R+h}.$$

(2) 作功为 $W=\dfrac{mgRh}{R+h}=971\ 973\approx 9.72\times 10^5(\mathrm{kJ})$.

4. 一物体按规律 $x=ct^3$ 作直线运动,介质的阻力与速度的平方成正比.计算物体由 $x=0$ 移到 $x=a$ 时,克服介质阻力所做的功.

解 速度为 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3ct^2$,阻力为 $R=kv^2=9kc^2t^4$,由此得到

$$\mathrm{d}W=R\mathrm{d}x=27kc^3t^6\mathrm{d}t.$$

设当 $t=T$ 时,$x=a$,得 $T=\left(\dfrac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}}$,故

$$W=\int_0^T 27kc^3t^6\mathrm{d}t=\frac{27kc^3}{7}T^7=\frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}a^{\frac{7}{3}}.$$

5. 用铁锤将一铁钉击入木板,设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比,在击第一次时,将铁钉击入木板 1 cm.如果铁锤每次打击铁钉所做的功相等,问锤击第二次时,铁钉又击入多少?

解 设木板对铁钉的阻力为 R,则铁钉击入木板的深度为 h 时的阻力为

$$R=kh,\text{其中 } k \text{ 为常数}.$$

铁锤击第一次时所做的功为

$$W_1=\int_0^1 R\mathrm{d}h=\int_0^1 kh\mathrm{d}h=\frac{k}{2}.$$

设锤击第二次时,铁钉又击入 h_0 cm,则锤击第二次所作的功为

$$W_2=\int_1^{1+h_0}R\mathrm{d}h=\int_1^{1+h_0}kh\mathrm{d}h=\frac{k}{2}[(1+h_0)^2-1],$$

由条件 $W_1=W_2$ 得 $h_0=\sqrt{2}-1$.

6. 设一锥形贮水池,深 15 m,口径 20 m,盛满水,今以唧筒将水吸尽,问要作多少功?

解 以高度 h 为积分变量,变化范围为 $[0,15]$,对该区间内任一小区间 $[h,h+\mathrm{d}h]$,体积为 $\pi\left(\dfrac{10}{15}h\right)^2\mathrm{d}h$,记 γ 为水的密度,则作功为

$$\begin{aligned}W&=\int_0^{15}\frac{4}{9}\pi\gamma gh^2(15-h)\mathrm{d}h=1\ 875\pi\gamma g\\&\approx 5.769\ 75\times 10^7(\mathrm{J}).\end{aligned}$$

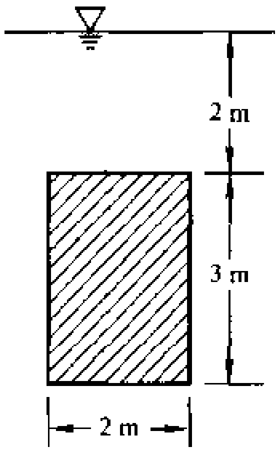


图 6 – 15

7. 有一闸门,它的形状和尺寸如图 6 – 15 所示,水面超

过门顶 2 m. 求闸门上所受的水压力.

解 设水深 x m 的地方压强为 $p(x)$，则

$$p(x)=1\ 000gx,$$

取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[2,5]$，对该区间内任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，压力为

$$\mathrm{d}F=p(x)\mathrm{d}S=2p(x)\mathrm{d}x=2\ 000gx\mathrm{d}x,$$

因此闸门上所受的水压力为

$$F=\int_2^5 2\ 000gx\mathrm{d}x=1\ 000g[x^2]_2^5=21\ 000g(\mathrm{N})\approx205.8(\mathrm{kN}).$$

8. 洒水车上的水箱是一个横放的椭圆柱体，尺寸如图 6－16 所示. 当水箱装满水时，计算水箱的一个端面所受的压力.

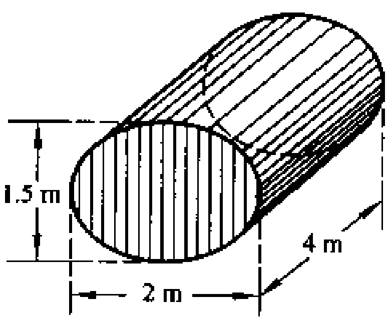


图 6－16

解 以侧面的椭圆长轴为 x 轴，短轴为 y 轴设立坐标系，则该椭圆的方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{0.75^2}=1$，

取 y 为积分变量，则 y 的变化范围为 $[-0.75,0.75]$，对该区间内任一小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$，该小区间相应的水深为 $0.75-y$，相应面积为

$$\mathrm{d}S=2\sqrt{1-\frac{y^2}{0.75^2}}\ \mathrm{d}y,$$

得到该小区间相应的压力

$$\mathrm{d}F=1\ 000g(0.75-y)\mathrm{d}S=2\ 000g(0.75-y)\sqrt{1-\frac{y^2}{0.75^2}}\ \mathrm{d}y,$$

因此压力为

$$F=\int_{-0.75}^{0.75}2\ 000g(0.75-y)\sqrt{1-\frac{y^2}{0.75^2}}\ \mathrm{d}y\approx17\ 318(\mathrm{N})\approx17.3(\mathrm{kN}).$$

9. 有一等腰梯形闸门，它的两条底边各长 10 m 和 6 m，高为 20 m. 较长的底边与水面相齐. 计算闸门的一侧所受的水压力.

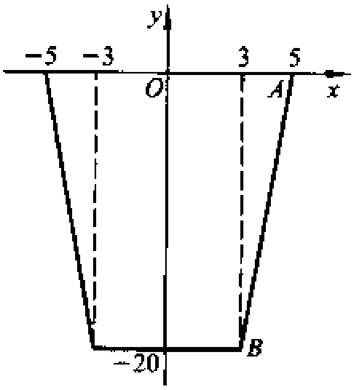


图 6－17

解 如图 6－17 建立坐标系，则过 A、B 两点的直线方程为 $y=10x-50$. 取 y 为积分变量，y 的变化范围为 $[-20,0]$，对应小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 的面积近似值为 $2x\mathrm{d}y=\left(\dfrac{y}{5}+10\right)\mathrm{d}y$，$\gamma$ 表示水的密度，因此水压力为

$$P=\int_{-20}^{0}\left(\frac{y}{5}+10\right)(-y)\gamma g\,\mathrm{d}y=1.437\,3\times10^{7}(\mathrm{N})=14\,373(\mathrm{kN}).$$

10. 一底为 8 cm、高为 6 cm 的等腰三角形片，铅直地沉没在水中，顶在上，底在下且与水面平行，而顶离水面 3 cm，试求它每面所受的压力.

解 如图 6－18 设立坐标系，取三角形顶点为原点，取积分变量为 x，则 x 的变化范围为 $[0,0.06]$，易知 B 的坐标为 $(0.06,0.04)$，因此 OB 的方程为 $y=\frac{2}{3}x$，故对应小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的面积近似值为

$$\mathrm{d}S=2\cdot\frac{2}{3}x\cdot\mathrm{d}x=\frac{4}{3}x\,\mathrm{d}x.$$

记 γ 为水的密度，则在 x 处的水压强为

$$p=\gamma g(x+0.03)=1\,000g(x+0.03),$$

故压力为

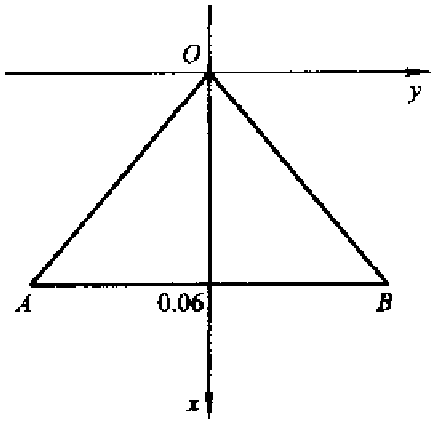


图 6－18

$$F=\int_{0}^{0.06}1\,000g(x+0.03)\cdot\frac{4}{3}x\,\mathrm{d}x=0.168g\approx1.65(\mathrm{N}).$$

11. 设有一长度为 l、线密度为 μ 的均匀细直棒，在与棒的一端垂直距离为 a 单位处有一质量为 m 的质点 M，试求这细棒对质点 M 的引力.

解 如图 6－19 设立坐标系，取 y 为积分变量，则 y 的变化范围为 $[0,l]$，对应小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 与质点 M 的引力的大小的近似值为

$$\mathrm{d}F=G\frac{m\mu\,\mathrm{d}x}{r^{2}},$$

其中 $r=\sqrt{a^{2}+x^{2}}$，把该力分解，得到 x 轴、y 轴方向的分量分别为

$$\mathrm{d}F_{x}=-\frac{a}{r}\mathrm{d}F=-G\frac{am\mu}{(a^{2}+x^{2})^{3/2}}\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}F_{y}=\frac{x}{r}\mathrm{d}F=G\frac{m\mu x}{(a^{2}+x^{2})^{3/2}}\mathrm{d}x,$$

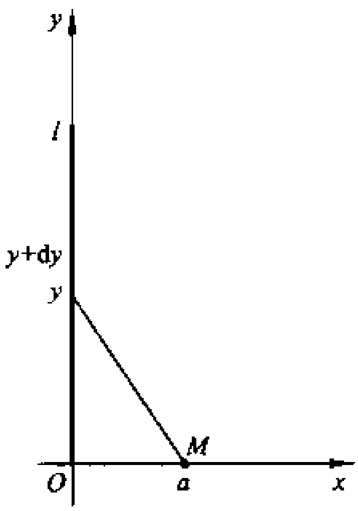


图 6－19

因此

$$F_{x}=\int_{0}^{l}-G\frac{am\mu}{(a^{2}+x^{2})^{3/2}}\mathrm{d}x\xlongequal{x=a\tan t}-G\frac{m\mu}{a}\int_{0}^{\arctan\frac{l}{a}}\cos t\,\mathrm{d}t=-\frac{Gm\mu l}{a\sqrt{a^{2}+l^{2}}},$$

$$F_{y}=\int_{0}^{l}G\frac{m\mu x}{(a^{2}+x^{2})^{3/2}}\mathrm{d}x=\left[-G\frac{m\mu}{(a^{2}+x^{2})^{1/2}}\right]_{0}^{l}=m\mu G\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^{2}+l^{2}}}\right).$$

12. 设有一半径为 R、中心角为 φ 的圆弧形细棒，其线密度为常数 μ. 在圆心处有一质量为 m 的质点 M，试求这细棒对质点 M 的引力.

解 如图 6－20 建立坐标系，则相应小区间 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$ 的弧长为 $R\mathrm{d}\theta$，根据对称性可知所求的铅直方向引力分量为零，水平方向的引力分量为

$$F_x=\int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}}\cos\theta\,\frac{Gm\mu R\,\mathrm{d}\theta}{R^2}=\frac{2Gm\mu}{R}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

故所求引力的大小为 $\frac{2Gm\mu}{R}\sin\frac{\varphi}{2}$，方向为 M 指向圆弧的中心.

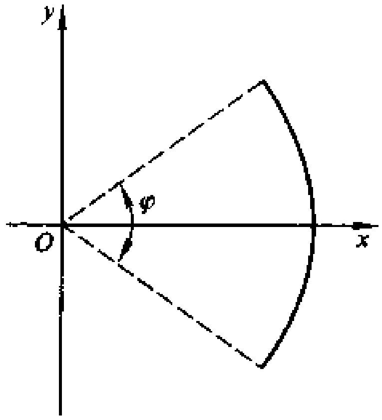


图 6－20

总 习 题 六

1. 一金属棒长 3 m，离棒左端 x m 处的线密度 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$(kg/m). 问 x 为何值时，$[0,x]$ 一段的质量为全棒质量的一半.

解 $[0,x]$ 一段的质量为

$$m(x)=\int_0^x\rho(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=2(\sqrt{1+x}-1),$$

总质量为 $m(3)=2$，要满足 $m(x)=\frac{1}{2}m(3)$，求得 $x=\frac{5}{4}$(m).

2. 求由曲线 $\rho=a\sin\theta$ 及 $\rho=a(\cos\theta+\sin\theta)(a>0)$ 所围图形公共部分的面积.

解 首先求出两曲线的交点，联立方程 $\begin{cases}\rho=a\sin\theta,\\ \rho=a(\cos\theta+\sin\theta)\end{cases}$ 解得交点坐标为 $\left(a,\frac{\pi}{2}\right)$，注意到当 $\theta=0$ 时 $\rho=a\sin\theta=0$，当 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 时 $\rho=a(\cos\theta+j\sin\theta)=0$，

故两曲线分别过$(0,0)$和$\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$，即都过极点（见图 6－21），因此所求面积为

$$A=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{2}[a(\cos\theta+\sin\theta)]^2\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(1+\sin 2\theta)\mathrm{d}\theta+\frac{\pi a^2}{8}$$

$$=\frac{a^2}{4}(\pi-1).$$

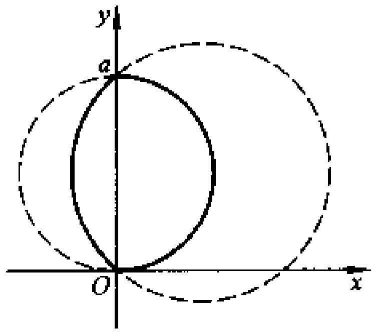


图 6－21

3．设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点$(0,0)$，且当 $x\in[0,1]$时，$y\geqslant 0$．试确定 a,b,c 的值，使得抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $x=1$，$y=0$ 所围图形的面积为$\frac{4}{9}$，且使该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小．

解 由已知条件：抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点$(0,0)$，可得 $c=0$．抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $x=1$，$y=0$ 所围图形的面积为

$$S=\int_0^1(ax^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2},$$

从而得到$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{4}{9}$，即 $a=\frac{4}{3}-\frac{3}{2}b$．该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V=\int_0^1\pi(ax^2+bx)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{a^2}{5}+\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{3}\right)=\frac{\pi}{30}(b-2)^2+\frac{2}{9}\pi,$$

因此当 $b=2$ 时体积为最小，此时 $a=-\frac{5}{3}$，抛物线为 $y=-\frac{5}{3}x^2+2x=\frac{x}{3}(6-5x)$．在区间$[0,1]$上，此抛物线满足 $y\geqslant 0$，故所求解：$a=-\frac{5}{3}$，$b=2$，$c=0$ 符合题目要求．

4．求由曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 与直线 $x=4$，x 轴所围图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积．

解 如图 6－22，取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为$[0,4]$，因此体积为

$$V=\int_0^4 2\pi xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^4 2\pi x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x=\frac{512}{7}\pi$$

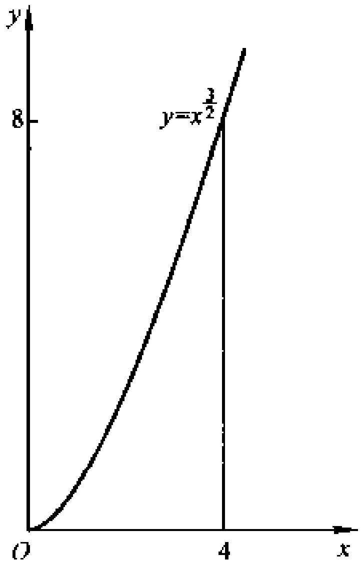


图 6－22

5．求圆盘$(x-2)^2+y^2\leqslant 1$ 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积．

解 这是一个圆环面，可以看作由图形$\{(x,y)|0$

$\leqslant x\leqslant 2+\sqrt{1-y^2}, -1\leqslant y\leqslant 1\}$绕 y 轴旋转所得的立体减去由图形$\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2-\sqrt{1-y^2}, -1\leqslant y\leqslant 1\}$绕 y 轴旋转所得的立体,因此

$$V=\int_{-1}^{1}\pi(2+\sqrt{1-y^2})^2\mathrm{d}y-\int_{-1}^{1}\pi(2-\sqrt{1-y^2})^2\mathrm{d}y=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=8\pi\left[\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{2}\arcsin y\right]_{-1}^{1}=4\pi^2.$$

6. 求抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 被圆 $x^2+y^2=3$ 所截下的有限部分的弧长.

解 联立两曲线方程$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x^2,\\x^2+y^2=3,\end{cases}$得到两曲线的交点为$(-\sqrt{2},1)$、$(\sqrt{2},1)$,因此所求弧长为

$$s=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}).$$

7. 半径为 r 的球沉入水中,球的上部与水面相切,球的密度与水相同,现将球从水中取出,需作多少功?

解 取 x 轴的正向铅直向上,沉入水中的球心为原点,并取 x 为积分变量,则 x 的变化范围为$[-r,r]$,对应区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的球的薄片的体积为

$$\mathrm{d}V=\pi(\sqrt{r^2-x^2})^2\mathrm{d}x=\pi(r^2-x^2)\mathrm{d}x,$$

该部分在水面以下由于重力与浮力的合力为零(因为球的密度与水的密度相同),在水面以上移动距离为 $r+x$,故作功为

$$W=\int_{-r}^{r}g\pi(r^2-x^2)(r+x)\mathrm{d}x=\int_{-r}^{r}g\pi r(r^2-x^2)\mathrm{d}x+\int_{-r}^{r}g\pi x(r^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=2\pi gr\int_{0}^{r}(r^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi gr^4.$$

8. 边长为 a 和 b 的矩形薄板,与液面成 α 角斜沉于液体内,长边平行于液面而位于深 h 处,设 $a>b$,液体的密度为 ρ,试求薄板每面所受的压力.

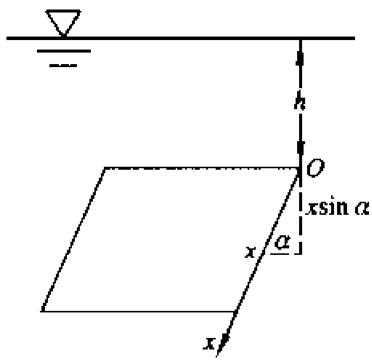


图 6-23

解 如图 6-23,记 x 为薄板上点到近水面的长边的距离,取 x 为积分变量,则 x 的变化范围为$[0,b]$,对应小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$,压强为 $\rho g(h+$

$x\sin\alpha$),面积为 $a\,dx$,因此压力为

$$F=\int_0^b \rho ga(h+x\sin\alpha)dx=\frac{1}{2}\rho gab(2h+b\sin\alpha).$$

9. 设星形线 $x=a\cos^3 t,y=a\sin^3 t$ 上每一点处的线密度的大小等于该点到原点距离的立方,在原点 O 处有一单位质点,求星形线的第一象限的弧段对这质点的引力.

解 取参数 t 为积分变量,变化范围为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,对应区间 $[t,t+dt]$ 的弧长为

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=3a\cos t\sin t\,dt,$$

该弧段质量为 $(a^2\cos^6 t+a^2\sin^6 t)^{\frac{3}{2}}ds=3a^4\cos t\sin t(\cos^6 t+\sin^6 t)^{\frac{3}{2}}dt$,该弧段与质点的引力大小为

$$G\frac{3a^4\cos t\sin t(\cos^6 t+\sin^6 t)^{\frac{3}{2}}dt}{a^2\cos^6 t+a^2\sin^6 t}=3Ga^2\cos t\sin t(\cos^6 t+\sin^6 t)^{\frac{1}{2}}dt,$$

因此曲线与质点引力的水平方向分量、铅直方向分量分别为

$$\begin{aligned}F_x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\cos^3 t}{\sqrt{a^2\cos^6 t+a^2\sin^6 t}}3Ga^2\cos t\sin t(\cos^6 t+\sin^6 t)^{\frac{1}{2}}dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3Ga^2\cos^4 t\sin t\,dt=3Ga^2\left[-\frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{5}Ga^2,\\F_y&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\sin^3 t}{\sqrt{a^2\cos^6 t+a^2\sin^6 t}}3Ga^2\cos t\sin t(\cos^6 t+\sin^6 t)^{\frac{1}{2}}dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3Ga^2\cos t\sin^4 t\,dt=3Ga^2\left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{5}Ga^2,\end{aligned}$$

因此所求引力 $\boldsymbol{F}=\left(\frac{3}{5}Ga^2,\frac{3}{5}Ga^2\right)$,即大小为 $\frac{3\sqrt{2}}{5}Ga^2$,方向角为 $\frac{\pi}{4}$.

第七章 空间解析几何与向量代数

习题 7-1

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$

解 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$

$=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

证 如图 7-1，设四边形 $ABCD$ 中 AC 与 BD 交于点 M，已知 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MB}$.

故 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DC}$.

即 $\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{DC}$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

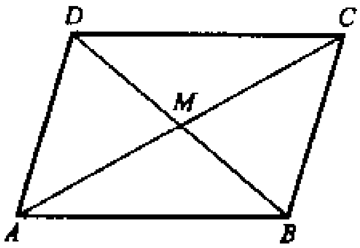


图 7-1

3. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分，设分点依次为 D_1、D_2、D_3、D_4，再把各分点与点 A 连接. 试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$、$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$、$\overrightarrow{D_2A}$、$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

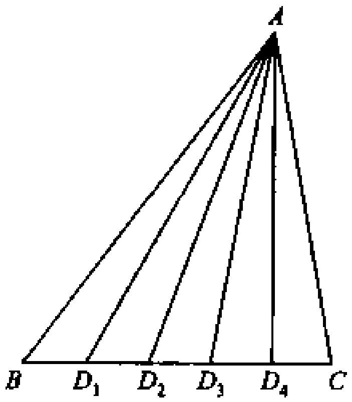


图 7-2

证 如图 7-2，根据题意知 $\overrightarrow{BD_1}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{D_1D_2}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{D_2D_3}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{D_3D_4}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a}$，故

$$\overrightarrow{D_1A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_1})=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

$$\overrightarrow{D_2A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_2})=-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

$$\overrightarrow{D_3A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_3})=-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

$$\overrightarrow{D_4A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_4})=-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

4. 已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$. 试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-0,-1-1,0-2)=(1,-2,-2)$.

$$-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2(1,-2,-2)=(-2,4,4).$$

5. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

解 向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$,故平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为

$$\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\frac{1}{11}(6,7,-6)=\pm\left(\frac{6}{11},\frac{7}{11},-\frac{6}{11}\right)$$

其中 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$.

6. 在空间直角坐标系中,指出下列各点的哪个卦限?

$A(1,-2,3)$;$B(2,3,-4)$;$C(2,-3,-4)$;$D(-2,-3,1)$.

解 A 点在第四卦限, B 点在第五卦限,

C 点在第八卦限, D 点在第三卦限.

7. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征?指出下列各点的位置:

$$A(3,4,0);B(0,4,3);C(3,0,0);D(0,-1,0).$$

解 在坐标面上的点的坐标,其特征是表示坐标的三个有序数中至少有一个为零.比如 xOy 面上的点的坐标为$(x_0,y_0,0)$,xOz 面上的点的坐标为$(x_0,0,z_0)$,yOz 面上的点的坐标为$(0,y_0,z_0)$.

在坐标轴上的点的坐标,其特征是表示坐标的三个有序数中至少有两个为零,比如 Ox 轴上的点的坐标为$(x_0,0,0)$,Oy 轴上的点的坐标为$(0,y_0,0)$,Oz 轴上点的坐标为$(0,0,z_0)$.

A 点在 xOy 面上,B 点在 yOz 面上,C 点在 x 轴上,D 点在 y 轴上.

8. 求点(a,b,c)关于(1)各坐标面;(2) 各坐标轴;(3) 坐标原点的对称点的坐标.

解 (1) 点(a,b,c)关于 xOy 面的对称点为$(a,b,-c)$;关于 yOz 面的对称点是$(-a,b,c)$;关于 zOx 面的对称点为$(a,-b,c)$.

(2) 点(a,b,c)关于 x 轴的对称点是$(a,-b,-c)$;关于 y 轴的对称点是$(-a,b,-c)$;关于 z 轴的对称点是$(-a,-b,c)$

(3) 点(a,b,c)关于坐标原点的对称点是$(-a,-b,-c)$.

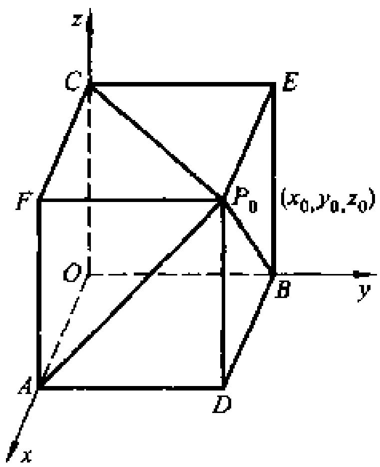


图 7-3

9. 自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$分别作各坐标面和各坐标轴的垂线,写出各垂足的坐标.

解 如图 7-3 建立空间直角坐标系.根据题

意，P_0F 为点 P_0 关于 xOz 面的垂线，垂足点 F 坐标为$(x_0,0,z_0)$；P_0D 为点 P_0 关于 xOy 面的垂线，垂足点 D 坐标为$(x_0,y_0,0)$；P_0E 为点 P_0 关于 yOz 面的垂线，垂足点 E 坐标为$(0,y_0,z_0)$.

P_0A 为点 P_0 关于 x 轴的垂线，垂足点 A 的坐标为$(x_0,0,0)$；P_0B 为点 P_0 关于 y 轴的垂线，垂足点 B 的坐标为$(0,y_0,0)$；P_0C 为点 P_0 关于 z 轴的垂线，垂足点 C 的坐标为$(0,0,z_0)$.

10. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面，问在它们上面的点的坐标各有什么特点？

解 如图 7－4，过 P_0 且平行于 z 轴的直线 l 上的点的坐标，其特点是：它们的横坐标与纵坐标均相同.

而过点 P_0 且平行于 xOy 面的平面 π 上的点的坐标，其特点是，它们的竖坐标 z_0 均相同.

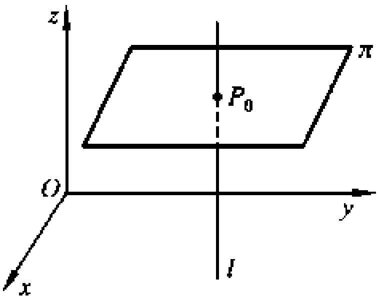


图 7－4

11. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，求它各顶点的坐标.

解 如图 7－5，已知 $AB=a$，故 $OA=OB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$ 于是各顶点的坐标分别为

$A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，$B\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$C\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，

$D\left(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$E\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$，$F\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$

$G\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$，$H\left(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$.

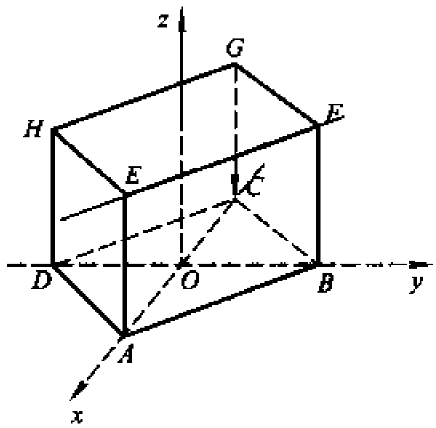


图 7－5

12. 求点 $M(4,-3,5)$到各坐标轴的距离.

解 点 M 到 x 轴的距离 $d_1=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$，点 M 到 y 轴的距离 $d_2=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$，点 M 到 z 轴的距离 $d_3=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$.

13. 在 yOz 面上，求与三点 $A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$和 $C(0,5,1)$等距离的点.

解 所求点在 yOz 面上，不妨设为 $P(0,y,z)$，点 P 与三点 A，B，C 等距离，$|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{3^2+(y-1)^2+(z-2)^2}$，$|\overrightarrow{PB}|=\sqrt{4^2+(y+2)^2+(z+2)^2}$，$|\overrightarrow{PC}|$

$= \sqrt{(y-5)^2+(z-1)^2}$.

由 $|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}|$ 知

$$\sqrt{3^2+(y-1)^2+(z-2)^2} = \sqrt{4^2+(y+2)^2+(z+2)^2} = \sqrt{(y-5)^2+(z-1)^2}$$

即

$$\begin{cases} 9+(y-1)^2+(z-2)^2 = 16+(y+2)^2+(z+2)^2, \\ 9+(y-1)^2+(z-2)^2 = (y-5)^2+(z-1)^2. \end{cases}$$

解上述方程组,得 $y=1, z=-2$.故所求点坐标为$(0,1,-2)$.

14. 试证明以三点 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证 由 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2} = 7$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2} = 7$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$

知 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ 及 $|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2$.故$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

15. 设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$和 $M_2(3,0,2)$.计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

解 向量$\overrightarrow{M_1M_2} = (3-4, 0-\sqrt{2}, 2-1) = (-1, -\sqrt{2}, 1)$

其模$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$.其方向余弦分别为

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{2}$$

方向角分别为 $\alpha = \frac{2}{3}\pi, \beta = \frac{3}{4}\pi, \gamma = \frac{\pi}{3}$.

16. 设向量的方向余弦分别满足(1) $\cos\alpha = 0$;(2) $\cos\beta = 1$;(3) $\cos\alpha = \cos\beta = 0$,问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

解 (1) 由 $\cos\alpha = 0$ 知 $\alpha = \frac{\pi}{2}$,故向量与 x 轴垂直、平行于 yOz 面.

(2) 由 $\cos\beta = 1$ 知 $\beta = 0$,故向量与 y 轴同向,垂直于 xOz 面.

(3) 由 $\cos\alpha = \cos\beta = 0$ 知 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$,故向量垂直于 x 轴和 y 轴,即与 z 轴平行.垂直于 xOy 面.

17. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4,它与轴 u 的夹角是 $60°$,求 $\boldsymbol{r}$ 在轴 u 上的投影.

解 已知$|\boldsymbol{r}| = 4$, $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{r}|\cos\theta = 4\cdot\cos 60° = 4\times\frac{1}{2} = 2$.

18. 一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$,它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4, -4 和 7.求这向量的起点 A 的坐标.

解 设 A 点坐标为 (x,y,z)，则 $\overrightarrow{AB}=(2-x,-1-y,7-z)$，

由题意知 $2-x=4,-1-y=-4,7-z=7$，

故 $x=-2,y=3,z=0$，因此 A 点坐标为 $(-2,3,0)$.

19. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$. 求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})$
$=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}$，

$\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影为 13. 在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

习 题 7－2

1. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$； (2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}$； (3) $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦.

解 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3,-1,-2)\cdot(1,2,-1)=3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)=3$，

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=(5,1,7).$$

(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}=-6(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=-6\times3=-18$，

$\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=2(5,1,7)=(10,2,14)$.

(3) $$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

2. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解 已知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，故 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$.

即 $$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0.$$

因此 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\dfrac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)=-\dfrac{3}{2}$.

3. 已知 $M_1(1,-1,2)$、$M_2(3,3,1)$ 和 $M_3(3,1,3)$. 求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(3-1,3-(-1),1-2)=(2,4,-1)$，

$\overrightarrow{M_2M_3}=(3-3,1-3,3-1)=(0,-2,2)$，

由于 $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}$ 与 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直，故所求向量可取为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\pm(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3})}{|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}|},$$

由
$$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}=(6,-4,-4),$$

$|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}|=\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$. 知

$$a=\frac{\pm 1}{2\sqrt{17}}(6,-4,-4)=\pm\left(\frac{3}{\sqrt{17}},-\frac{2}{\sqrt{17}},-\frac{2}{\sqrt{17}}\right).$$

4. 设质量为 100 kg 的物体从点 $M_1(3,1,8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1,4,2)$，计算重力所作的功(长度单位为 m,重力方向为 z 轴负方向).

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-3,4-1,2-8)=(-2,3,-6)$,

$F=(0,0,-100\times 9.8)=(0,0,-980)$,

$W=F\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=(0,0,-980)\cdot(-2,3,-6)=5\ 880$(焦耳).

5. 在杠杆上支点 O 的一侧与点 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处,有一与 $\overrightarrow{OP_1}$ 成角 θ_1 的力 F_1 作用着;在 O 的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处,有一与 $\overrightarrow{OP_2}$ 成角 θ_2 的力 F_2 作用着(图 7-6). 问 θ_1、θ_2、x_1、x_2、$|F_1|$、$|F_2|$ 符合怎样的条件才能使杠杆保持平衡?

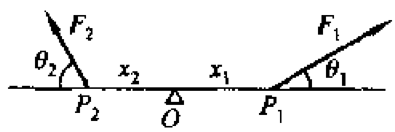


图 7-6

解 如图 7-6,已知有固定转轴的物体的平衡条件是力矩的代数和为零,又由对力矩正负符号的规定可得杠杆保持平衡的条件为

$$|F_1|\cdot x_1\cdot\sin\theta_1-|F_2|x_2\cdot\sin\theta_2=0$$

即
$$|F_1|x_1\sin\theta_1=|F_2|x_2\sin\theta_2.$$

6. 求向量 $a=(4,-3,4)$ 在向量 $b=(2,2,1)$ 上的投影.

解 $\mathrm{Prj}_b a=\dfrac{a\cdot b}{|b|}=\dfrac{(4,-3,4)\cdot(2,2,1)}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{6}{3}=2.$

7. 设 $a=(3,5,-2)$, $b=(2,1,4)$,问 λ 与 μ 有怎样的关系,能使得 $\lambda a+\mu b$ 与 z 轴垂直?

解 $\lambda a+\mu b=\lambda(3,5,-2)+\mu(2,1,4)=(3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu)$. 要 $\lambda a+\mu b$ 与 z 轴垂直,即要 $(\lambda a+\mu b)\perp(0,0,1)$,即

$$(\lambda a+\mu b)\cdot(0,0,1)=0,$$

亦即
$$(3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu)\cdot(0,0,1)=0,$$

故 $-2\lambda+4\mu=0$,因此当 $\lambda=2\mu$ 时能使 $\lambda a+\mu b$ 与 z 轴垂直.

8. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

证明 如图 7-7,设 AB 是圆 O 的直径,C 点在圆周上,要证 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$.

只要证$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 即可.

由 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})$

$$=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BO}+|\overrightarrow{OC}|^2$$

$$=-|\overrightarrow{AO}|^2+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OC}|^2=0,$$

故 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，$\angle ACB$ 为直角.

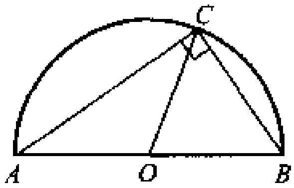


图 7－7

9．已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，计算：

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$；(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

解 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2,-3,1)\cdot(1,-1,3)=8$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=(2,-3,1)\cdot(1,-2,0)=8$，

故 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}=8(1,-2,0)-8(1,-1,3)=(0,-8,-24)$，

$=-8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}$.

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,-3,1)+(1,-1,3)=(3,-4,4)$，

$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(1,-1,3)+(1,-2,0)=(2,-3,3)$，

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-4&4\\2&-3&3\end{vmatrix}=(0,-1,-1)=-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

$$(3)\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&-1&3\\1&-2&0\end{vmatrix}=2.$$

10．已知$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求$\triangle OAB$ 的面积.

解 由向量积的几何意义知

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|,$$

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&3\\0&1&3\end{vmatrix}=(-3,-3,1),$$

$$|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+1}=\sqrt{19}.$$

故 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$.

11．已知 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$，

(1) 试利用行列式的性质证明

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

(2) 试利用混合积的几何意义证明三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是：

$$\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=0.$$

证明 (1) 由行列式的性质知,行列式中两行交换,行列式变号,故

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b_x & b_y & b_z\\ a_x & a_y & a_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}.$$

又

$$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}c_x & c_y & c_z\\ b_x & b_y & b_z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}c_x & c_y & c_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

即 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$.

(2) 充分性.若 $\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0$, 即$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0$,

因此 $V=|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]|=0$,即以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体体积为零.从而 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

必要性.若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面,则以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积 $V=0$,

而 $V=\pm[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\pm\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$.故 $\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0$.

12. 试用向量证明不等式:

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|,$$

其中 a_1、a_2、a_3、b_1、b_2、b_3 为任意实数.并指出等号成立的条件.

证明 设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$.

由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$知,$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$,从而

$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$,

当 a_1,a_2,a_3 与 b_1,b_2,b_3 成比例,即$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$时,上述等式成立.

习 题 7-3

1. 一动点与两定点(2,3,1)和(4,5,6)等距离,求这动点的轨迹方程.

解 设动点为 $M(x,y,z)$,由题意知

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2+(z-6)^2},$$

经整理得 $4x+4y+10z-63=0$.

2. 建立以点(1,3,-2)为球心,且通过坐标原点的球面方程.

解 设以点(1,3,-2)为球心,R 为半径的球面方程为

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=R^2.$$

球面过原点,故 $R^2=(0-1)^2+(0-3)^2+(0+2)^2=14$,

从而所求球面方程为$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=14$.

3. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$ 表示什么曲面?

解 将已知方程整理成$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=(\sqrt{6})^2$,

所以此方程表示以$(1,-2,-1)$为球心,以$\sqrt{6}$为半径的球面.

4. 求与坐标原点 O 及点(2,3,4)的距离之比为 1:2 的点的全体所组成的曲面的方程,它表示怎样的曲面?

解 设动点坐标为(x,y,z),根据题意有

$$\frac{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}}=\frac{1}{2},$$

化简整理得 $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\sqrt{29}\right)^2$.

它表示以$\left(-\frac{2}{3},-1,-\frac{4}{3}\right)$为球心,以$\frac{2}{3}\sqrt{29}$为半径的球面.

5. 将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

解 以 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$代替抛物线方程 $z^2=5x$ 中的 z,得

$$(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2=5x,$$

即

$$y^2+z^2=5x.$$

注 xOz 面上的曲线 $F(x,z)=0$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为 $F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$.

6. 将 xOz 坐标面上的圆 $x^2+z^2=9$ 绕 z 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

解 以 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$代替圆方程 $x^2+y^2=9$ 中的 x,得

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2=9,$$

即
$$x^2+y^2+z^2=9.$$

7. 将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

解 以 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 代替双曲线方程 $4x^2-9y^2=36$ 中的 y，得该双曲线绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面方程为

$$4x^2-9(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2=36,$$

即
$$4x^2-9(y^2+z^2)=36.$$

以 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 代替双曲线方程 $4x^2-9y^2=36$ 中的 x，得该双曲线绕 y 轴旋转一周而生成的旋转曲面方程为

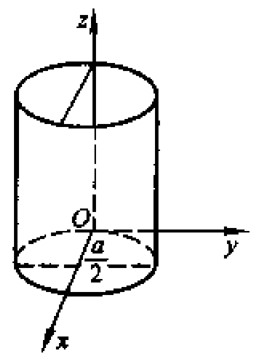
$$4(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2-9y^2=36,$$

即
$$4(x^2+z^2)-9y^2=36.$$

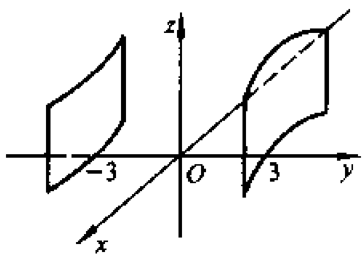
8. 画出下列各方程所表示的曲面：

(1) $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$；　(2) $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$；

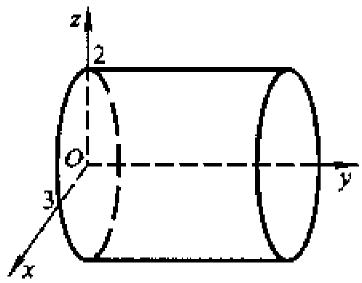
(3) $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$；　(4) $y^2-z=0$；　(5) $z=2-x^2$.



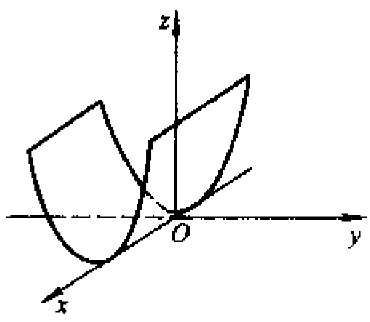
(1)



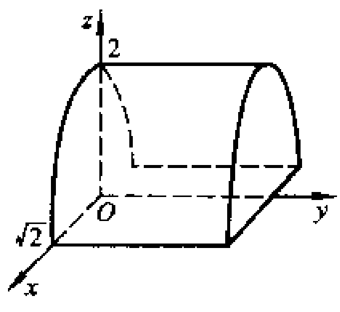
(2)



(3)



(4)



(5)

图7 8

9. 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形：

(1) $x=2$；　　(2) $y=x+1$；

(3) $x^2+y^2=4$；　　(4) $x^2-y^2=1$.

解 (1) $x=2$ 在平面解析几何中表示平行于 y 轴的一条直线，在空间解析几何中表示与 yOz 面平行的平面.

(2) $y=x+1$ 在平面解析几何中表示斜率为 1，截距也为 1 的一条直线，在空间解析几何中表示平行于 z 轴的平面.

(3) $x^2+y^2=4$ 在平面解析几何中表示圆心在原点，半径为 2 的圆，在空间解析几何中表示母线平行于 z 轴，准线为 $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=0 \end{cases}$ 的圆柱面.

(4) $x^2-y^2=1$ 在平面解析几何中表示以 x 轴为实轴，y 轴为虚轴的双曲线，在空间解析几何中表示母线平行于 z 轴，准线为 $\begin{cases} x^2-y^2=1, \\ z=0 \end{cases}$ 的双曲柱面.

10. 说明下列旋转曲面是怎样形成的：

(1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{9}=1$；　　(2) $x^2-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$；

(3) $x^2-y^2-z^2=1$；　　(4) $(z-a)^2=x^2+y^2$.

解 (1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{9}=1$ 表示 xOy 面上的椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面，或表示 xOz 面上的椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

(2) $x^2-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$ 表示 xOy 面上双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 绕 y 轴旋转一周而生成的旋转曲面，或表示 yOz 面上双曲线 $-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$ 绕 y 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

(3) $x^2-y^2-z^2=1$ 表示 xOy 面上双曲线 $x^2-y^2=1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面，或表示 xOz 面上双曲线 $x^2-z^2=1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

(4) $(z-a)^2=x^2+y^2$ 表示 xOz 面上直线 $z=x+a$ 或 $z=-x+a$ 绕 z 轴旋转一周而生成的旋转曲面，或表示 yOz 面上的直线 $z=y+a$ 或 $z=-y+a$ 绕 z 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

11. 画出下列方程所表示的曲面：

(1) $4x^2+y^2-z^2=4$；　　(2) $x^2-y^2-4z^2=4$；

(3) $\frac{z}{3}=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$.

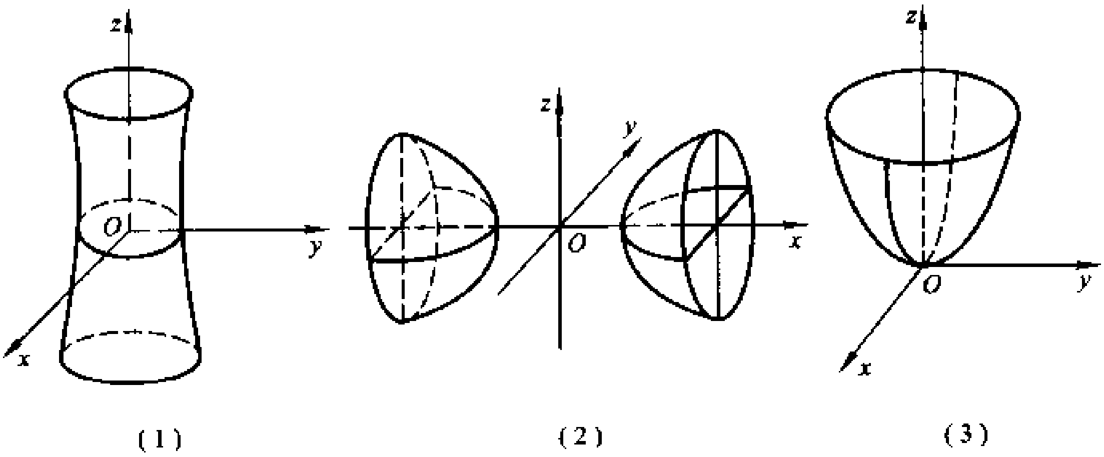


图 7－9

习 题 7－4

1. 画出下列曲线在第一卦限内的图形：

(1) $\begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ x-y=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ x^2+z^2=a^2. \end{cases}$

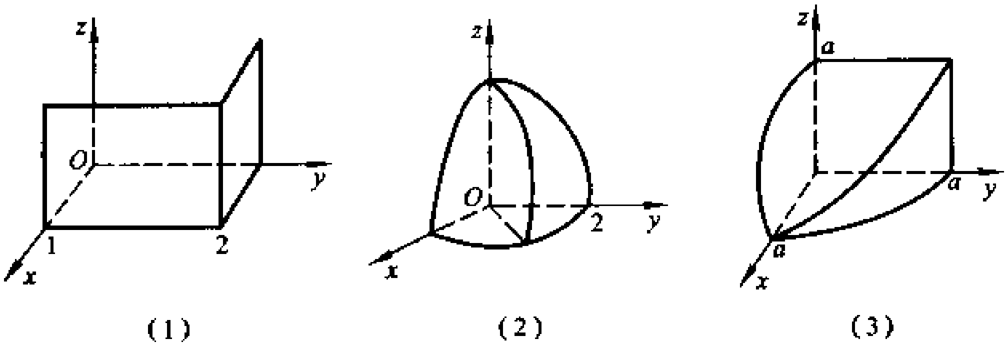


图 7－10

2. 指出下列方程组在平面解析几何中与在空间解析几何中分别表示什么图形：

(1) $\begin{cases} y=5x+1, \\ y=2x-3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1, \\ y=3. \end{cases}$

解　(1) $\begin{cases} y=5x+1, \\ y=2x-3 \end{cases}$ 在平面解析几何中表示两直线的交点，在空间解析几何中表示两平面的交线即空间直线.

(2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1, \\ y=3 \end{cases}$ 在平面解析几何中表示椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 与其切线 $y=3$ 的交点即切点. 在空间解析几何中表示椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 与其切平面 $y=3$ 的交线即空间直线.

3. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$ 的柱面方程.

解　在 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$ 中消去 x，得 $3y^2-z^2=16$，

即为母线平行于 x 轴且通过已知曲线的柱面方程.

在 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$ 中消去 y，得 $3x^2+2z^2=16$，

即为母线平行于 y 轴且通过已知曲线的柱面方程.

4. 求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影的方程.

解　在 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ x+z=1 \end{cases}$ 中消去 z，

得
$$x^2+y^2+(1-x)^2=9, \text{即 } 2x^2-2x+y^2=8,$$

它表示母线平行于 z 轴的柱面，故 $\begin{cases} 2x^2-2x+y^2=8, \\ z=0 \end{cases}$ 表示已知交线在 xOy 面上的投影的方程.

5. 将下列曲线的一般方程化为参数方程：

(1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ y=x; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4, \\ z=0. \end{cases}$

解　(1) 将 $y=x$ 代入 $x^2+y^2+z^2=9$，得 $2x^2+z^2=9$，

取　$x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos t$，　则 $z=3\sin t$，

从而可得该曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos t, \\ y = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos t, \\ z = 3\sin t, \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

(2) 将 $z=0$ 代入 $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$，得 $(x-1)^2+y^2=3$，
取 $x-1=\sqrt{3}\cos t$，则 $y=\sqrt{3}\sin t$，
从而可得该曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = 1+\sqrt{3}\cos t, \\ y=\sqrt{3}\sin t, \\ z=0, \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

6．求螺旋线 $\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程．

解 由 $x=a\cos\theta$，$y=a\sin\theta$ 得 $x^2+y^2=a^2$，故该螺旋线在 xOy 面上的投影曲线的直角坐标方程即为 $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=0. \end{cases}$

由 $y=a\sin\theta$，$z=b\theta$ 得 $y=a\sin\dfrac{z}{b}$，故该螺旋线在 yOz 面上的投影曲线的直角坐标方程即为 $\begin{cases} y=a\sin\dfrac{z}{b}, \\ x=0. \end{cases}$

由 $x=a\cos\theta$，$z=b\theta$ 得 $x=a\cos\dfrac{z}{b}$，故该螺旋线在 xOz 面上的投影曲线的直角坐标方程即为 $\begin{cases} x=a\cos\dfrac{z}{b}, \\ y=0. \end{cases}$

7．求上半球 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与圆柱体 $x^2+y^2\leqslant ax\ (a>0)$ 的公共部分在 xOy 面和 xOz 面上的投影．

解 如图 7－11．所求立体在 xOy 面上的投影即为 $x^2+y^2\leqslant ax$ 而由 $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$ 得 $z=\sqrt{a^2-ax}$．

故所求立体在 xOz 平面上的投影为由 x 轴，z 轴及曲线 $z=\sqrt{a^2-ax}$ 所围成的区域．

8. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 4)$ 在三坐标面上的投影.

解 联立 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=4 \end{cases}$ 得 $x^2+y^2=4$.

故旋转抛物面在 xOy 面上的投影为 $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4, \\ z=0. \end{cases}$ 如图 7－12，联立 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x=0 \end{cases}$ 得 $z=y^2$，故旋转抛物面在 yOz 面上的投影为由 $z=y^2$ 及 $z=4$ 所围成的区域. 同理，联立 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ y=0 \end{cases}$ 得 $z=x^2$.

故旋转抛物面在 xOz 面上的投影为由 $z=x^2$ 及 $z=4$ 所围成的区域.

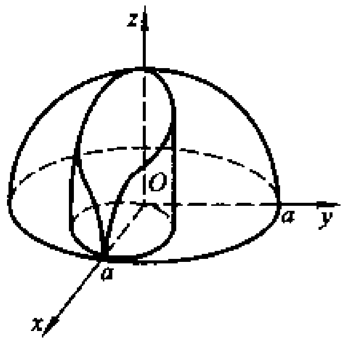


图 7－11

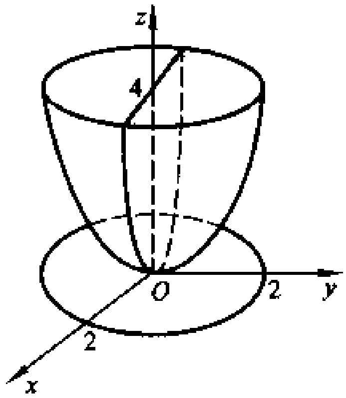


图 7－12

习 题 7－5

1. 求过点 $(3,0,-1)$ 且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程.

解 所求平面与已知平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行. 因此所求平面的法向量可取为 $\boldsymbol{n}=(3,-7,5)$，设所求平面为

$$3x-7y+5z+D=0.$$

将点 $(3,0,-1)$ 代入上式得 $D=-4$. 故所求平面方程为

$$3x-7y+5z-4=0.$$

2. 求过点 $M_0(2,9,-6)$ 且与连接坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.

解 $\overrightarrow{OM_0}=(2,9,-6)$. 所求平面与 $\overrightarrow{OM_0}$ 垂直，可取 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{OM_0}$，设所求平面方程为 $2x+9y-6z+D=0$.

将点 $M_0(2,9,-6)$ 代入上式，得 $D=-121$. 故所求平面方程为

$$2x+9y-6z-121=0.$$

3. 求过$(1,1,-1)$、$(-2,-2,2)$和$(1,-1,2)$三点的平面方程.

解 由$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -2-1 & -2-1 & 2+1 \\ 1-1 & -1-1 & 2+1 \end{vmatrix}=0$，得 $x-3y-2z=0$，

即为所求平面方程.

注 设$M(x,y,z)$为平面上任一点，$M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3)$为平面上已知点. 由$\overrightarrow{M_1M}\cdot(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3})=0$，即

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,$$

它就表示过已知三点$M_i(i=1,2,3)$的平面方程.

4. 指出下列各平面的特殊位置，并画出各平面：

(1) $x=0$；　　(2) $3y-1=0$；

(3) $2x-3y-6=0$；　　(4) $x-\sqrt{3}y=0$；

(5) $y+z=1$；　　(6) $x-2z=0$；

(7) $6x+5y-z=0$.

解

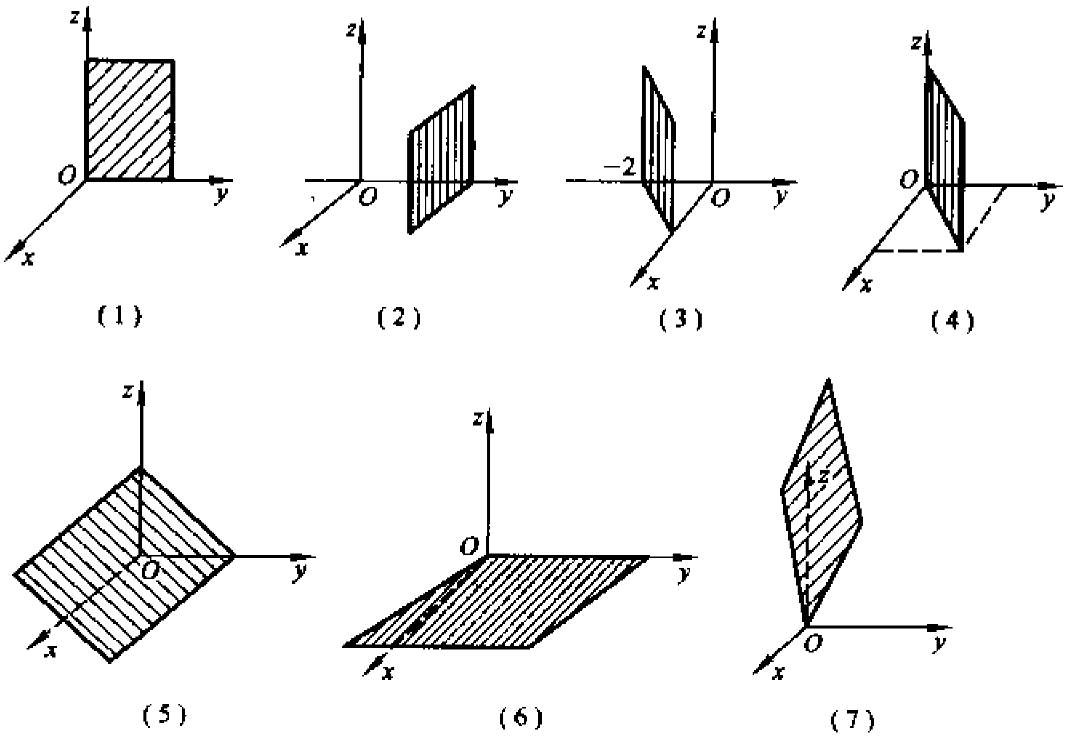


图 7 13

(1) $x=0$ 表示 yOz 坐标面.

(2) $3y-1=0$ 表示过点$\left(0,\dfrac{1}{3},0\right)$与 y 轴垂直的平面.

(3) $2x-3y-6=0$ 表示与 z 轴平行的平面.

(4) $x-\sqrt{3}y=0$ 表示过 z 轴的平面.

(5) $y+z=1$ 表示平行于 x 轴的平面.

(6) $x-2z=0$ 表示过 y 轴的平面.

(7) $6x+5y-z=0$ 表示过原点的平面.

5. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

解 平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$. 设平面与三个坐标面 xOy, yOz, zOx 的夹角分别为 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$. 则根据平面的方向余弦知

$$\cos\theta_1=\cos\gamma=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{k}|}=\frac{(2,-2,1)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot 1}=\frac{1}{3},$$

$$\cos\theta_2=\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{i}|}=\frac{(2,-2,1)\cdot(1,0,0)}{3\cdot 1}=\frac{2}{3},$$

$$\cos\theta_3=\cos\beta=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{j}|}=\frac{(2,\quad 2,1)\cdot(0,1,0)}{3\cdot 1}=-\frac{2}{3}.$$

6. 一平面过点$(1,0,-1)$且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,1)$和 $\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$, 试求该平面方程.

解 所求平面平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 可取平面的法向量

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=(1,1,-3),$$

故所求平面为 $1\cdot(x-1)+1\cdot(y-0)-3\cdot(z+1)=0$

即 $x+y-3z-4=0$.

7. 求三平面 $x+3y+z=1$, $2x-y-z=0$, $-x+2y+2z=3$ 的交点.

解 联立三平面方程

$$\begin{cases}x+3y+z=1,\\ 2x-y-z=0,\\ -x+2y+2z=3.\end{cases}$$

解此方程组得 $x=1, y=-1, z=3$. 故所求交点为$(1,-1,3)$

8. 分别按下列条件求平面方程:

(1) 平行于 xOz 面且经过点$(2,-5,3)$;

(2) 通过 z 轴和点$(-3,1,-2)$;

(3) 平行于 x 轴且经过两点$(4,0,-2)$和$(5,1,7)$.

解 (1) 所求平面平行于 xOz 面,故设所求平面方程为 $By+D=0$. 将点 $(2,-5,3)$ 代入,得

$$-5B+D=0 \quad 即 \quad D=5B.$$

因此,所求平面方程为

$$By+5B=0 \quad 即 \quad y+5=0.$$

(2) 所求平面过 z 轴.故设所求平面方程为 $Ax+By=0$. 将点 $(-3,1,-2)$ 代入,得

$$-3A+B=0, \quad 即 \quad B=3A.$$

因此,所求平面方程为

$$Ax+3Ay=0, \quad 即 \quad x+3y=0.$$

(3) 所求平面平行于 x 轴,故设所求平面方程为 $By+Cz+D=0$. 将点 $(4,0,-2)$ 及 $(5,1,7)$ 分别代入方程得

$$-2C+D=0 \quad 及 \quad B+7C+D=0.$$

从而解得

$$C=\frac{D}{2}, B=-\frac{9}{2}D.$$

因此,所求平面方程为

$$-\frac{9}{2}Dy+\frac{D}{2}z+D=0,$$

即

$$9y-z-2=0.$$

9. 求点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

解 利用点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式

$$\begin{aligned} d &= \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ &= \frac{|1+2\cdot2+2\cdot1-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|-3|}{3}=1. \end{aligned}$$

习 题 7-6

1. 求过点 $(4,-1,3)$ 且平行于直线 $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{5}$ 的直线方程.

解 所求直线与已知直线平行,故所求直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=(2,1,5)$,直线方程即为

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{5}.$$

2. 求过两点 $M_1(3,-2,1)$ 和 $M_2(-1,0,2)$ 的直线方程.

解 取所求直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(-1-3,0-(-2),2-1)=$

$(-4,2,1)$,因此所求直线方程为

$$\frac{x-3}{-4}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}.$$

3. 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases}x-y+z=1,\\2x+y+z=4.\end{cases}$$

解 根据题意可知已知直线的方向向量

$$s=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & -1 & 1\\2 & 1 & 1\end{vmatrix}=(-2,1,3).$$

取 $x=0$,代入直线方程得 $\begin{cases}-y+z=1,\\y+z=4.\end{cases}$ 解得 $y=\frac{3}{2},z=\frac{5}{2}$. 这样就得到直线经过的一点 $\left(0,\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$. 因此直线的对称式方程为

$$\frac{x-0}{-2}=\frac{y-\frac{3}{2}}{1}=\frac{z-\frac{5}{2}}{3}.$$

参数方程为

$$\begin{cases}x=-2t,\\y=\frac{3}{2}+t,\\z=\frac{5}{2}+3t.\end{cases}$$

注 由于所取的直线上的点可以不同,因此所得到的直线对称式或参数方程的表达式也可以是不同的.

4. 求过点 $(2,0,-3)$ 且与直线

$$\begin{cases}x-2y+4z-7=0,\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$$

垂直的平面方程.

解 根据题意,所求平面的法向量可取已知直线的方向向量即

$$n=s=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & -2 & 4\\3 & 5 & -2\end{vmatrix}=(-16,14,11),$$

故所求平面方程为 $-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0$.

即
$$16x-14y-11z-65=0.$$

5. 求直线 $\begin{cases}5x-3y+3z-9=0,\\3x-2y+z-1=0\end{cases}$ 与直线 $\begin{cases}2x+2y-z+23=0,\\3x+8y+z-18=0\end{cases}$

的夹角的余弦.

解 两已知直线的方向向量分别为

$$s_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(3,4,-1),\ s_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix}=(10,-5,10),$$

因此,两直线的夹角的余弦

$$\cos\theta=\cos(\widehat{s_1,s_2})=\frac{s_1\cdot s_2}{|s_1||s_2|}$$

$$=\frac{3\times10-4\times5-1\times10}{\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}\sqrt{10^2+(-5)^2+10^2}}=0.$$

6. 证明直线$\begin{cases} x+2y-z=7, \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$与直线$\begin{cases} 3x+6y-3z=8, \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$平行.

证明 已知直线的方向向量分别是

$$s_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(3,1,5),\ s_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=(-9,-3,-15),$$

由 $s_2=-3s_1$ 知两直线互相平行.

7. 求过点(0,2,4)且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

解 所求直线与已知的两个平面平行.因此所求直线的方向向量可取

$$s=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=(-2,3,1),$$

故所求直线方程为

$$\frac{x-0}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}.$$

注 本题也可以这样解:由于所求直线与已知的两个平面平行,则可视所求直线是分别与已知平面平行的两平面的交线.不妨设所求直线为

$$\begin{cases} x+2z=a, \\ y-3z=b. \end{cases}$$

将点(0,2,4)代入上式,得 $a=8,b=-10$.故所求直线为

$$\begin{cases} x+2z=8, \\ y-3z=-10. \end{cases}$$

8. 求过点(3,1,-2)且通过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面方程.

解 利用平面束方程,过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面束方程为

$$\frac{x-4}{5}-\frac{y+3}{2}+\lambda\left(\frac{y+3}{2}-z\right)=0,$$

将点(3,1,-2)代入上式得 $\lambda=\frac{11}{20}$.

因此所求平面方程为 $\frac{x-4}{5}-\frac{y+3}{2}+\frac{11}{20}\left(\frac{y+3}{2}-z\right)=0$,

即
$$8x-9y-22z-59=0.$$

9. 求直线 $\begin{cases}x+y+3z=0,\\ x-y-z=0\end{cases}$ 与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角.

解 已知直线的方向向量 $s=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=(2,4,-2)$,

平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$.

设直线与平面的夹角为 φ,则

$$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}})|=\frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|2\cdot1+4\cdot(-1)+(-2)\cdot(-1)|}{\sqrt{2^2+4^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=0,$$

即 $\varphi=0$.

10. 试确定下列各组中的直线和平面间的关系:

(1) $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$ 和 $4x-2y-2z=3$;

(2) $\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$ 和 $3x-2y+7z=8$;

(3) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$ 和 $x+y+z=3$.

解 设直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$,平面的法向量为 $\boldsymbol{n}$,直线与平面的夹角为 φ,且 $\sin\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}})|=\frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{n}|}$.

(1) $\boldsymbol{s}=(-2,-7,3)$, $\boldsymbol{n}=(4,-2,-2)$,

$$\sin\varphi=\frac{|(-2)\cdot4+(-7)\cdot(-2)+3(-2)|}{\sqrt{(-2)^2+(-7)^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+(-2)^2+(-2)^2}}=0,$$

即 $\varphi=0$.故直线平行于平面或在平面上,现将直线上的点 $A(-3,-4,0)$代入平面方程,方程不成立.故点 A 不在平面上,因此直线不在平面上,直线与平面平行.

(2) $\boldsymbol{s}=(3,-2,7)$, $\boldsymbol{n}=(3,-2,7)$,由于 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}$ 或

$$\sin\varphi=\frac{|3\cdot3+(-2)\cdot(-2)+7\cdot7|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+7^2}\cdot\sqrt{3^2+(-2)^2+7^2}}=1,$$

知 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，故直线与平面垂直.

(3) $s=(3,1,-4)$，$n=(1,1,1)$，由于 $s\cdot n=0$ 或

$$\sin\varphi=\frac{|3\cdot 1+1\cdot 1+(-4)\cdot 1|}{\sqrt{3^2+1^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=0,$$

知 $\varphi=0$，将直线上的点 $A(2,-2,3)$ 代入平面方程. 方程成立. 即点 A 在平面上. 故直线在平面上.

11. 求过点(1,2,1)而与两直线

$$\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\ x-y+z-1=0\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}2x-y+z=0,\\ x-y+z=0\end{cases}$$

平行的平面的方程.

解 两直线的方向向量为

$$s_1=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=(1,-2,-3),\quad s_2=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=(0,-1,-1),$$

取

$$n=s_1\times s_2=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}=(-1,1,-1),$$

则过点(1,2,1)，以 n 为法向量的平面方程为

$$-1\cdot(x-1)+1\cdot(y-2)-1\cdot(z-1)=0,$$

即

$$x-y+z=0.$$

12. 求点$(-1,2,0)$在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影.

解 作过已知点且与已知平面垂直的直线. 该直线与平面的交点即为所求. 根据题意，过点$(-1,2,0)$与平面 $x+2y-z+1=0$ 的直线为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-0}{-1},$$

将它化为参数方程 $x=-1+t$，$y=2+2t$，$z=-t$，代入平面方程得

$$-1+t+2(2+2t)-(-t)+1=0,$$

整理得 $t=-\frac{2}{3}$. 从而所求点$(-1,2,0)$在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影为 $\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

13. 求点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases}x+y-z+1=0,\\ 2x-y+z-4=0\end{cases}$ 的距离.

解 直线的方向向量 $s=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=(0,3,-3)$.

在直线上取点$(1,-2,0)$,这样,直线的方程可表示成参数方程形式

$$x=1,\quad y=-2-3t,\quad z=-3t. \tag{1}$$

又,过点$P(3,-1,2)$,以$s=(0,-3,-3)$为法向量的平面方程为

$$-3(y+1)-3(z-2)=0,$$

即

$$y+z-1=0. \tag{2}$$

将式(1)代入式(2)得$t=-\frac{1}{2}$,于是直线与平面的交点为$\left(1,-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$,故

$$d=\sqrt{(3-1)^2+\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

14. 设M_0是直线L外一点,M是直线L上任意一点,且直线的方向向量为s,试证:点M_0到直线L的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times s|}{|s|}.$$

证 如图7-14,点M_0到直线l的距离为d.由向量积的几何意义知$|\overrightarrow{M_0M}\times s|$表示以$\overrightarrow{M_0M}$,$s$为棱的平行四边形的面积.而$\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times s|}{|s|}$表示以$|s|$为边长的该平行四边形的高.即为点$M_0$到直线$l$的距离.于是

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times s|}{|s|}.$$

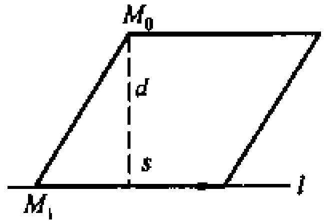


图7-14

15. 求直线$\begin{cases}2x-4y+z=0,\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$在平面$4x-y+z=1$上的投影直线的方程.

解 作过已知直线的平面束,在该平面束中找出与已知平面垂直的平面,该平面与已知平面的交线即为所求.

设过直线$\begin{cases}2x-4y+z=0,\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$的平面束方程为

$$2x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0,$$

经整理得

$$(2+3\lambda)x+(-4-\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0.$$

由

$$(2+3\lambda)\cdot 4+(-4-\lambda)\cdot(-1)+(1-2\lambda)\cdot 1=0,$$

得$\lambda=-\frac{13}{11}$.代入平面束方程,得

$$17x+31y-37z-117=0.$$

因此所求投影直线的方程为

$$\begin{cases}17x+31y-37z-117=0,\\4x-y+z=1.\end{cases}$$

16. 画出下列各曲面所围成的立体的图形：

(1) $x=0,y=0,z=0,x=2,y=1,3x+4y+2z-12=0$；

(2) $x=0,z=0,x=1,y=2,z=\frac{y}{4}$；

(3) $z=0,z=3,x-y=0,x-\sqrt{3}y=0,x^2+y^2=1$（在第一卦限内）；

(4) $x=0,y=0,z=0,x^2+y^2=R^2,y^2+z^2=R^2$（在第一卦限内）.

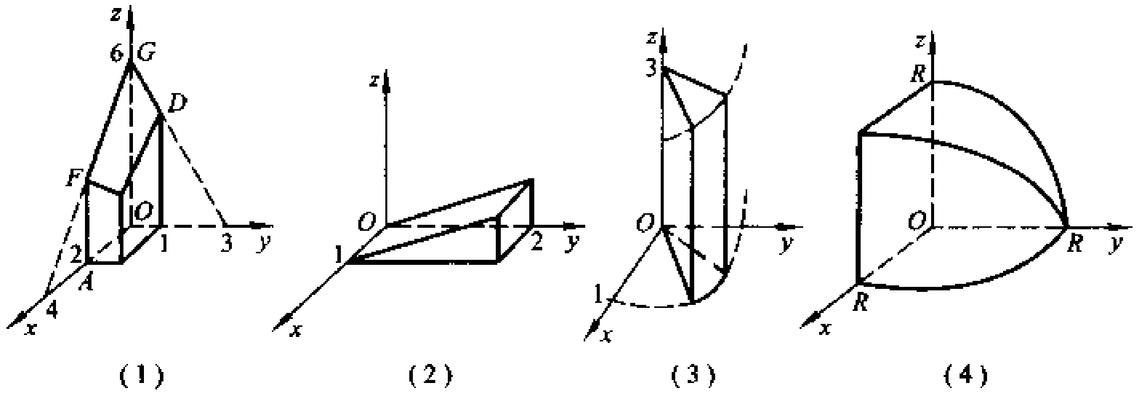


图 7-15

总习题七

1. 填空

(1) 设在坐标系$[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$中点 A 和点 M 的坐标依次为(x_0,y_0,z_0)和(x,y,z)，则在$[A;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$坐标系中，点 M 的坐标为________，向量$\overrightarrow{OM}$的坐标为________.

(2) 设数 λ_1、λ_2、λ_3 不全为 0，使 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 三个向量是________的.

(3) 设 $\boldsymbol{a}=(2,1,2)$，$\boldsymbol{b}=(4,-1,10)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，则 $\lambda=$________.

(4) 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 都是单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$________.

(5) 设$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$|\boldsymbol{c}|=5$，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=$________.

解 (1) 点 M 的坐标为 $\underline{(x-x_0,y-y_0,z-z_0)}$，向量$\overrightarrow{OM}$的坐标为$(x-x_0+x_0,y-y_0+y_0,z-z_0+z_0)=\underline{(x,y,z)}$.

(2) 由$[(\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{c}=0$得$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$. 即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 共面.

(3) $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}=(4,-1,10)-\lambda(2,1,2)=(4-2\lambda,-1-\lambda,10-2\lambda)$

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$ 故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=(2,1,2)\cdot(4-2\lambda,-1-\lambda,10-2\lambda)=27-9\lambda=0$

从而 $\lambda=\underline{3}$.

(4) 已知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$,由 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=0$ 知 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=0$ 即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)=\underline{-\frac{3}{2}}.$$

(5) 由 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

由 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$

又,由 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{c}|^2$ 知以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为边的三角形为直角三角形,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.故

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}})=3\times3\times4\times1=\underline{36}.$$

2. 在 y 轴上求与点 $A(1,-3,7)$ 和点 $B(5,7,-5)$ 等距离的点.

解 根据题意,设所求点为 $M(0,y,0)$,由

$$1^2+(y+3)^2+7^2=5^2+(y-7)^2+(-5)^2$$

得 $y=2$.故所求点为 $M(0,2,0)$.

3. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(3,2,-1)$、$B(5,-4,7)$ 和 $C(-1,1,2)$,求从顶点 C 所引中线的长度.

解 设 AB 中点的坐标为 (x_0,y_0,z_0),由

$$x_0=\frac{3+5}{2}=4,\quad y_0=\frac{2-4}{2}=-1,\quad z_0=\frac{7-1}{2}=3,$$

从而顶点 C 所引中线的长度

$$d=\sqrt{(4+1)^2+(-1-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{30}.$$

4. 设 $\triangle ABC$ 的三边 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$、$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,三边中点依次为 D、E、F,试用向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CF}$,并证明

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{0}.$$

证明 如图 7-16,D、E、F 分别为 BC、CA、AB 的中点,因此 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{\boldsymbol{a}}{2}$,$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{\boldsymbol{b}}{2}$,$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{\boldsymbol{c}}{2}$,

从而

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{c}+\frac{\boldsymbol{a}}{2},$$

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{b}}{2},$$

$$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2},$$

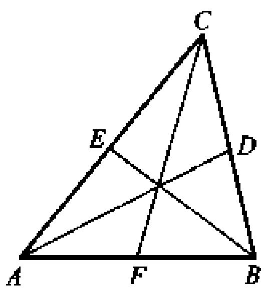


图 7-16

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=c+\frac{a}{2}+a+\frac{b}{2}+b+\frac{c}{2}=\frac{3}{2}(a+b+c)=\mathbf{0}.$$

5．试用向量证明三角形两边中点的连线平行于第三边，且其长度等于第三边长度的一半．

证明 如图 7－17，D、E 分别是 CA 与 BC 的中点．

由 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=2(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE})=2\overrightarrow{DE}$．

知 $$\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{DE} \text{ 且 } |\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|.$$

即三角形两边中点的连线平行于第三边，且长度等于第三边长度的一半．

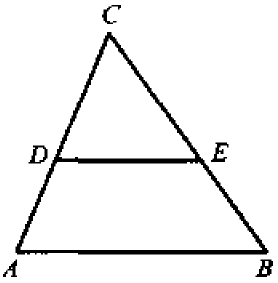


图 7－17

6．设 $|a+b|=|a-b|$，$a=(3,-5,8)$，$b=(-1,1,z)$，求 z．

解 $a+b=(3-1,-5+1,8+z)=(2,-4,8+z)$，

$a-b=(3-(-1),-5-1,8-z)=(4,-6,8-z)$，

由 $|a+b|=|a-b|$ 知 $\sqrt{2^2+(-4)^2+(8+z)^2}=\sqrt{4^2+(-6)^2+(8-z)^2}$

经整理得 $z=1$．

7．设 $|a|=\sqrt{3}$，$|b|=1$，$(\widehat{a,b})=\frac{\pi}{6}$，求向量 $a+b$ 与 $a-b$ 的夹角．

解 $$|a+b|^2=(a+b)^2=|a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos(\widehat{a,b})$$
$$=(\sqrt{3})^2+1^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot1\cos\frac{\pi}{6}$$
$$=4+2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=7,$$

$$|a-b|^2=(a-b)^2=|a|^2+|b|^2-2|a||b|\cos(\widehat{a,b})=(\sqrt{3})^2+1^2-2\sqrt{3}\cdot1\cos\frac{\pi}{6}$$
$$=4-2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1,$$

$(a+b)\cdot(a-b)=|a|^2-|b|^2=3-1=2$，

故 $$\cos(\widehat{a+b,a-b})=\frac{(a+b)\cdot(a-b)}{|a+b||a-b|}=\frac{2}{\sqrt{7}\cdot1}=\frac{2}{\sqrt{7}},$$

所以 $(\widehat{a+b,a-b})=\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$．

8．设 $a+3b\perp7a-5b$，$a-4b\perp7a-2b$，求 $(\widehat{a,b})$．

解 由 $a+3b\perp7a-5b$ 知 $(a+3b)\cdot(7a-5b)=0$，

由 $a-4b\perp7a-2b$ 知 $(a-4b)\cdot(7a-2b)=0$，

故
$$7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0, \tag{1}$$
$$7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0. \tag{2}$$

两式相减得 $46\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=23|\boldsymbol{b}|^2$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2$，

代入(1)式得 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，

从而
$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}=\frac{1}{2},$$

所以
$$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{3}.$$

9. 设 $\boldsymbol{a}=(2,-1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,z)$，问 z 为何值时 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 最小？并求出此最小值.

解
$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{(2,-1,-2)\cdot(1,1,z)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{1^2+1^2+z^2}}=\frac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}.$$

设 $f(z)=\frac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}$ 则
$$f'(z)=\frac{1}{3}\cdot\frac{-2\sqrt{2+z^2}-(1-2z)\frac{z}{\sqrt{2+z^2}}}{2+z^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{-4-z}{(2+z^2)^{3/2}},$$
令 $f'(z)=0$ 得 $z=-4$.

由于 $0\leqslant(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 为单调减少函数. $f(z)$ 取得最大值时，$\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 达到最小值.

经验证 $z=-4$ 时，$f(z)$ 达到最大值，此时 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 达到最小值且由 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})|_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，知 $\theta_{\min}=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

10. 设 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{6}$，求以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积.

解 根据向量积的几何意义知 以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积
$$\begin{aligned}S&=|(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})|\\&=5|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=5|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\\&=5\times4\times3\times\sin\frac{\pi}{6}=5\times4\times3\times\frac{1}{2}=30.\end{aligned}$$

11．设 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$，$\boldsymbol{c}=(2,1,2)$，向量 $\boldsymbol{r}$ 满足 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$，$\mathrm{Prj}_{c}\boldsymbol{r}=14$，求 $\boldsymbol{r}$．

解 设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，

由 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$ 知 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=0$，即 $\quad 2x-3y+z=0$，

由 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$ 知 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $\quad x-2y+3z=0$，

由 $\mathrm{Prj}_{c}\boldsymbol{r}=\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=14$ 知 $\quad 2x+y+2z=14|\boldsymbol{c}|=14\times3=42$，

联立上述三个方程得 $x=14,y=10,z=2$．故 $\boldsymbol{r}=(14,10,2)$．

12．设 $\boldsymbol{a}=(-1,3,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-3,-4)$，$\boldsymbol{c}=(-3,12,6)$，证明三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面，并用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{c}$．

证明 由 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & 12 & 6\end{vmatrix}=0$ 知 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=0$，故三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面．

设 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，则

$(-3,12,6)=\lambda(-1,3,2)+\mu(2,-3,-4)=(-\lambda+2\mu,3\lambda-3\mu,2\lambda-4\mu)$，

即
$$\begin{cases}-\lambda+2\mu=-3,\\ 3\lambda-3\mu=12,\\ 2\lambda-4\mu=6,\end{cases}\qquad 解得\ \lambda=5,\mu=1.$$

故
$$\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

13．已知动点 $M(x,y,z)$ 到 xOy 平面的距离与点 M 到点 $(1,-1,2)$ 的距离相等，求点 M 的轨迹的方程．

解 根据题意知
$$|z|=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2},$$
即 $\quad (x-1)^2+(y+1)^2-4(z-1)=0$ 为点 M 的轨迹的方程．

14．指出下列旋转曲面的一条母线和旋转轴：

(1) $z=2(x^2+y^2)$； $\qquad$ (2) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{36}=1$；

(3) $z^2=3(x^2+y^2)$； $\qquad$ (4) $x^2-\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{4}=1$．

解 (1) 母线为 $\begin{cases}x=0,\\ z=2y^2,\end{cases}$ 旋转轴为 z 轴．

(2) 母线为 $\begin{cases}x=0,\\ \dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{36}=1,\end{cases}$ 旋转轴为 y 轴．

(3) 母线为$\begin{cases} x=0, \\ z=\sqrt{3}y, \end{cases}$旋转轴为 z 轴.

(4) 母线为$\begin{cases} z=0, \\ x-\dfrac{y^2}{4}=1, \end{cases}$旋转轴为 x 轴.

15. 求通过点 $A(3,0,0)$和 $B(0,0,1)$且与 xOy 面成$\dfrac{\pi}{3}$角的平面的方程.

解 设所求平面方程为$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$,

平面过点 $A(3,0,0)$,$B(0,0,1)$,故 $a=3$,$c=1$.这样平面方程为

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{b}+z=1.$$

它与 xOy 面成$\dfrac{\pi}{3}$角.故 $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{b},1\right)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b}\right)^2+1^2}\cdot 1}$,

即 $$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+1=4,\ \frac{1}{b}=\pm\frac{\sqrt{26}}{3},$$

故所求平面为 $x+\sqrt{26}y+z=3$ 或 $x-\sqrt{26}y+3z=3$.

16. 设一平面垂直于平面 $z=0$,并通过从点$(1,-1,1)$到直线$\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$的垂线,求此平面的方程.

解 直线$\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0 \end{cases}$的方向向量 $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(0,-1,-1)$.

作过点$(1,-1,1)$且以 $\boldsymbol{s}=(0,-1,-1)$为法向量的平面:

$$-1\cdot(y+1)-(z-1)=0,\text{即 } y+z=0,$$

联立 $\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0, \\ y+z=0 \end{cases}$ 得垂足$\left(0,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

所求平面垂直于平面 $z=0$.设平面方程 $Ax+By+D=0$.平面过点$(1,-1,1)$及垂足$\left(0,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,故有

$$\begin{cases} A-B+D=0, \\ -\dfrac{1}{2}B+D=0, \end{cases}\quad \text{由此解得 } B=2D,A=D.$$

因此所求平面方程为 $Dx+2Dy+D=0$,即

$$x+2y+1=0.$$

17. 求过点$(-1,0,4)$,且平行于平面$3x-4y+z-10=0$,又与直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交的直线的方程.

解 设所求直线方程$\frac{x+1}{m}=\frac{y-0}{n}=\frac{z-4}{p}$.

所求直线平行于平面$3x-4y+z-10=0$,故有

$$3m-4n+p-10=0, \tag{1}$$

又所求直线与直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-z}{1}=\frac{z}{2}$相交,故有

$$\begin{vmatrix} -1-(-1) & 3-0 & 0-4 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0,$$

即
$$10m-4n-3p=0. \tag{2}$$

联立(1)(2)式可得
$$\frac{16}{m}=\frac{19}{n}=\frac{28}{p}.$$

因此所求直线方程为 $\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}$

注 若两直线$l_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$,$l_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$相交,则$l_1$与$l_2$必共面,故$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)=0$,

即有
$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

18. 已知点$A(1,0,0)$及点$B(0,2,1)$,试在z轴上求一点C,使$\triangle ABC$的面积最小.

解 所求点位于z轴,设其坐标为$C(0,0,z)$,由向量的几何意义知$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$,而$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0-1 & 2-0 & 1-0 \\ 0-1 & 0-0 & z-0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & z \end{vmatrix}$

$$=2z\boldsymbol{i}+(z-1)\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

故
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{(2z)^2+(z-1)^2+2^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5z^2-2z+5}.$$

设$f(z)=5z^2-2z+5$,则由$f'(z)=10z-2=0$得$z=\frac{1}{5}$.

因 $f''\left(\frac{1}{5}\right)=10>0$,故当 $z=\frac{1}{5}$时,$\triangle ABC$ 的面积取得极小值,由于驻点惟一,故当 $z=\frac{1}{5}$,即 C 的坐标为$\left(0,0,\frac{1}{5}\right)$时,$S_{\triangle ABC}$为最小.

19. 求曲线$\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$在三个坐标面上的投影曲线的方程.

解 在$\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$中消去 z,得 $2-x^2-y^2=(x-1)^2+(y-1)^2$,即 $x^2+y^2-x-y=0$. 故$\begin{cases} x^2+y^2-x-y=0, \\ z=0 \end{cases}$为曲线在 xOy 面上的投影曲线方程.

在$\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$中消去 y,得 $z=(x-1)^2+(\pm\sqrt{2-x^2-y^2}-1)^2$,

即 $2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0$,故$\begin{cases} 2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0, \\ y=0 \end{cases}$为曲线在 xOz 面上的投影曲线方程.

同理,可得$\begin{cases} 2y^2+2yz+z^2-4y-3z+2=0, \\ x=0. \end{cases}$它就是曲线在 yOz 面上的投影曲线方程.

20. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$与柱面 $z^2=2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

解 在$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z^2=2x \end{cases}$中消去 z,得 $2x=x^2+y^2$,即$(x-1)^2+y^2=1$,故立体在 xOy 面上的投影为$\begin{cases} (x-1)^2+y^2\leqslant 1, \\ z=0. \end{cases}$

而该立体在 xOz 平面上的投影为$\begin{cases} x\leqslant z\leqslant\sqrt{2x}, \\ y=0, \end{cases}$(如图 7-18),在 yOz 面上的投影为$\begin{cases} \left(\frac{z^2}{2}-1\right)^2+y^2\leqslant 1, \quad z\geqslant 0 \\ x=0. \end{cases}$

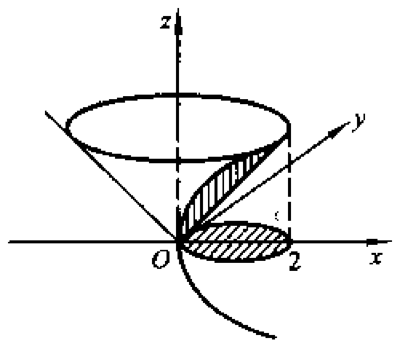


图 7-18

21. 画出下列各曲面所围立体的图形:

(1) 抛物柱面 $2y^2=x$,平面 $z=0$ 及 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$;

(2) 抛物柱面 $x^2=1-z$ 平面 $y=0$, $z=0$ 及 x

$+y=1$；

(3) 圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2$；

(4) 旋转抛物面 $x^2+y^2=z$，柱面 $y^2=x$，平面 $z=0$ 及 $x=1$.

解 (1) 如图 7－19(1)；　　(2) 如图 7－19(2)；

(3) 如图 7－19(3)；　　(4) 如图 7－19(4).

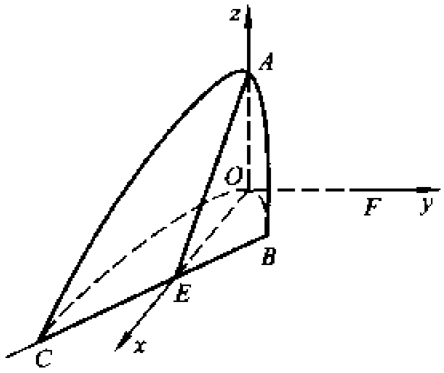


图 7－19(1)

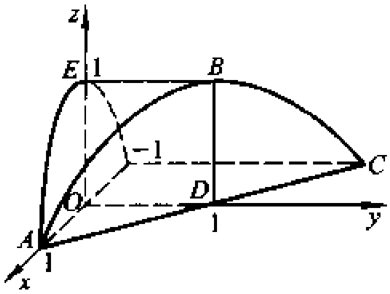


图 7－19(2)

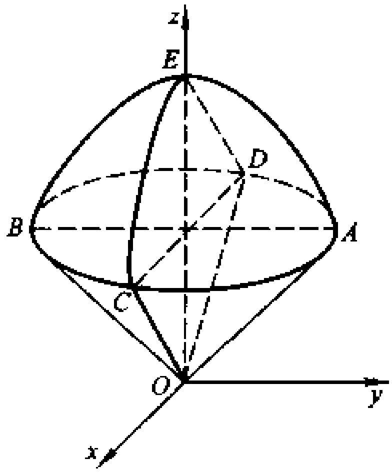


图 7－19(3)

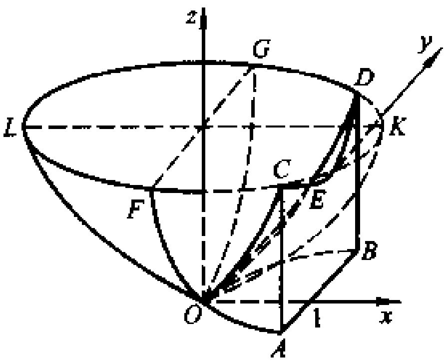


图 7－19(4)

注 在建立了空间直角坐标后，可按下列方法作图：

1° 先作出立体的各表面(曲面)，及它们与各坐标面的交线；

2° 再作各界面的交线.

二、硕士研究生入学考试数学试题选解

（一）函数　极限　连续

1．(2001．Ⅱ)设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于（　　）．

(A) 0．　(B) 1．　(C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$　(D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$

解　由 $f(x)$ 的定义知 $\left|f(x)\right|\leqslant 1$，故 $f[f(x)]=1$，从而 $f\{f[f(x)]\}=1$，应选(B)．

2．(1990．Ⅳ，Ⅴ)设函数 $f(x)=x\tan x\cdot e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是（　　）．

(A) 偶函数．　(B) 无界函数．　(C) 周期函数．　(D) 单调函数．

解　因为 $e^{-1}\leqslant e^{\sin x}\leqslant e$，当 $x\to(2n+1)\frac{\pi}{2}(n\in\mathbf{Z})$ 时，$\tan x\to\infty$，从而 $f(x)\to\infty$，所以 $f(x)$ 是无界函数．应选(B)．

3．(1992．Ⅴ)已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$________的定义域为________．

解　由 $f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)=1-x^2$，得 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$，又由 $|1-x^2|\leqslant 1$，得 $|x|\leqslant\sqrt{2}$．故 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$ 的定义域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$．

4．(1991．Ⅴ)设数列的通项为 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & \text{若 } n \text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{n}, & \text{若 } n \text{ 为偶数},\end{cases}$ 则当 $n\to\infty$ 时，x_n 是（　　）．

(A) 无穷大量．　(B) 无穷小量．　(C) 有界变量．　(D) 无界变量．

解　因为
$$x_{2k+1}=(2k+1)+\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\to\infty\quad(k\to\infty),$$
$$x_{2k}=\frac{1}{2k}\to 0\quad(k\to\infty).$$
所以 x_n 是无界变量，应选(D)．

5. (1991. Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ)曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$

(A) 没有渐近线. (B) 仅有水平渐近线.

(C) 仅有铅直渐近线. (D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}-1}=+\infty$,所以应选(D).

6. (1998.Ⅱ)设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列断言正确的是( ).

(A) 若 x_n 发散,则 y_n 必发散. (B) 若 x_n 无界,则 y_n 必有界.

(C) 若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小. (D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 y_n 必为无穷小.

解 取 $x_n=n, y_n=\dfrac{1}{n^2}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,且 x_n 发散,但 y_n 收敛,故(A)不正确.

取 $x_n=[1+(-1)^n]n, y_n=[1-(-1)^n]n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,且 x_n, y_n 都无界,故(B)不正确.

取 $x_n=\dfrac{1}{n^2}, y_n=n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,且 x_n 有界,但 y_n 不是无穷小,故(C)也不正确.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$ 知,x_ny_n 为无穷小($n\to\infty$),故当 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小时,$y_n=(x_ny_n)\cdot\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小,故应选(D).

7. (1997. Ⅴ)设 $f(x),\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续,且当 $x\to0$ 时,$f(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的高阶无穷小,则当 $x\to0$ 时,$\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t$ 是 $\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t$ 的( ).

(A) 低阶无穷小. (B) 高阶无穷小. (C) 同阶但不等价的无穷小. (D) 等价无穷小.

解 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t}{\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)\sin x}{x\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=0$,所以应选(B).

8. (2001. Ⅱ)设当 $x\to0$ 时,$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小,而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小,则正整数 n 等于( ).

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

解 当 $x\to0$ 时,$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\dfrac{1}{2}x^4$, $x\sin x^n\sim x^{n+1}$, $e^{x^2}-1\sim$

x^2，故应选(B).

9.（1994.Ⅰ，Ⅱ）$\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$______.

解 由等价无穷小代换定理

$$\lim_{x\to 0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

10.（1999.Ⅱ）求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x]}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\right\}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{1}{1+x}-1}=-\frac{1}{2}.$$

11.（2000.Ⅰ）求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$,

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$.

12.（1997.Ⅰ）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$______.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\ln(1+x)}=3$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\cos x}\left[\dfrac{3\sin x}{\ln(1+x)}+\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}\right]$

$$=\frac{1}{2}(3+0)=\frac{3}{2}.$$

13.（1995.Ⅲ）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$______.

解 因为$\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}\leqslant\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}$

$$\leqslant\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}=\frac{1}{2},$$

所以由夹逼准则知原式$=\dfrac{1}{2}$.

14. (1998. Ⅰ, Ⅱ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$______.

解法一 利用洛必达法则,

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}}-(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\left[-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$=-\frac{1}{4}.$$

解法二 利用泰勒公式,

因为 $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+o(x^2)$,

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+o(x^2),$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\dfrac{1}{4}$.

15. (1991. Ⅲ) 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$.

解 因为当 $x\to0$ 时, $e^x-1\sim x$, $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$.

16. (1994. Ⅲ) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$.

解 因为 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)=\dfrac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\tan\frac{2}{n}}=1,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{4\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{1-\tan\frac{2}{n}}}=e^4.$$

17.（1996.Ⅰ,Ⅱ）设 $x_1=10,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$,试证数列$\{x_n\}$极限存在,并求此极限.

证 由 $x_1=10,x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{16}=4$ 知 $x_1>x_2$.设对某正整数 k 有 $x_k>x_{k+1}$,则有

$$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2},$$

故由数学归纳法知,对一切正整数 n,都有 $x_n>x_{n+1}$,即$\{x_n\}$为单调减少数列.又显见 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$,即$\{x_n\}$有下界,根据单调有界极限存在准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{6+x_n}=\sqrt{6+\lim\limits_{n\to\infty}x_n}$,即 $a=\sqrt{6+a}$,从而 $a^2-a-6=0$.解得 $a=3,a=-2$,因 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$,所以 $a\geqslant0$,舍去 $a=-2$,得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

18.（2002.Ⅴ）设 $0<x_1<3,x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{x_n\}$的极限存在,并求此极限.

证 由题设 $0<x_1<3$ 知,x_1 及 $3-x_1$ 均为正数,故

$$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\frac{1}{2}(x_1+3-x_1)=\frac{3}{2}.$$

设当 $k>1$ 时,$0<x_k\leqslant\frac{3}{2}$,则

$$0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\leqslant\frac{1}{2}(x_k+3-x_k)=\frac{3}{2},$$

故由数学归纳法知,对任意正整数 $n>1$,均有

$$0<x_n\leqslant\frac{3}{2}.$$

即数列$\{x_n\}$是有界的.

又当 $n>1$ 时,

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})$$

$$=\frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\geqslant 0 \quad \left(因\ 0<x_n\leqslant\frac{3}{2}\right),$$

故当 $n>1$ 时,$x_{n+1}\geqslant x_n$,即数列$\{x_n\}$单调增加.

根据单调有界极限存在准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,由

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n(3-x_n)},$$

得
$$a=\sqrt{a(3-a)},$$
从而
$$2a^2-3a=0.$$

解得 $a=\frac{3}{2}$,$a=0$.因 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant x_2>0$,故 $a=0$ 舍去,得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}$.

19.(1998.Ⅰ)求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

解 $\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}<\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2}{n}\pi+\cdots+\sin\pi\right)=$
$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$,

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}.$$

另一方面,有

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}>\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2}{n}\pi+\cdots+\sin\pi\right)$$

$$=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n},$$

且
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\right)=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}.$$

由夹逼准则知,原式$=\frac{2}{\pi}$.

20．(1999.Ⅰ) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=$______.

解法一 利用洛必达法则,

原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{2\sin x+x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{3\cos x-x\sin x}$

$=\frac{1}{3}$.

解法二 利用麦克劳林公式,

原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-x+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}$

$=\frac{1}{3}$.

解法三 利用等价无穷小代换及洛必达法则,

$$\text{原极限}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

21．(2002.Ⅱ) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leqslant0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$______.

解 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\tan x}{\frac{x}{2}}=-2$,

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}ae^{2x}=a=f(0).$$

因 $f(x)$在 $x=0$ 处连续,故 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$,从而得 $a=-2$.

22．(1998.Ⅱ) 求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$ 在区间$(0,2\pi)$内的间断点,并判断其类型.

解 $f(x)$在$(0,2\pi)$内的间断点为 $x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$.

在 $x=\frac{\pi}{4}$处,$f\left(\frac{\pi}{4}^+\right)=+\infty$,在 $x=\frac{5}{4}\pi$ 处,$f\left(\frac{5\pi}{4}^+\right)=+\infty$,故 $x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$为第二类间断点(无穷间断点);

在 $x=\frac{3\pi}{4}$处,$\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}f(x)=1$,在 $x=\frac{7}{4}\pi$ 处,$\lim\limits_{x\to\frac{7\pi}{4}}f(x)=1$,故 $x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$为第

一类间断点(可去间断点).

23. (2001. Ⅱ) 求极限$\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$,记此极限为 $f(x)$,求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

解 因为 $f(x)=e^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x}}$,

而
$$\lim_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x}=\lim_{t\to x}x\frac{\cos t/\sin t}{\cos t}=\frac{x}{\sin x},$$

故
$$f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}}.$$

$f(x)$的间断点为 $x=k\pi(k\in \mathbf{Z})$.

在 $x=0$ 处,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e$,故 $x=0$ 是函数 $f(x)$的第一类间断点(可去间断点);

在 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$处,$\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)=\infty$,故 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 是函数 $f(x)$的第二类间断点(无穷间断点).

24. (1992. Ⅳ) 设函数
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}, & 若\ x\neq 1,\\ 1, & 若\ x=1,\end{cases}$$
问函数 $f(x)$在 $x=1$ 处是否连续? 若不连续,修改函数在 $x=1$ 处的定义,使之连续.

解 因为$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan(x-1)}{\cos\frac{\pi}{2}x}$
$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\sec^2(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\frac{4}{\pi^2}\neq f(1),$$
所以函数 $f(x)$在 $x=1$ 处不连续.若修改定义,令 $f(1)=-\dfrac{4}{\pi^2}$,则函数在 $x=1$ 处连续.

25. (1995. Ⅲ) 设 $f(x)$和 $\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,$f(x)$为连续函数,且 $f(x)\neq 0$,$\varphi(x)$有间断点,则(　　).

(A) $\varphi[f(x)]$必有间断点.　　(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点.

(C) $f[\varphi(x)]$必有间断点.　　(D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$必有间断点.

解 若 $F(x)=\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$为连续函数,则 $\varphi(x)=f(x)F(x)$必连续,与假设 $\varphi(x)$有间断点矛盾.故选(D).

（二）一元函数微分学

1.（1989.Ⅰ，Ⅱ）已知 $f'(3)=2$，则$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$______.

解 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{-h}=-\dfrac{1}{2}f'(3)=-1.$

2.（1989.Ⅲ）设 $f(x)$在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是（　　）.

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$存在.(B) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在.

(C) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在.　(D) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在.

解 因$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim\limits_{-h\to0}\dfrac{f[a+(-h)]-f(a)}{(-h)}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

故应选(D).关于其他三个选项，(A)和(B)不是充分条件比较明显，至于(C)的排除可用反例来说明，例如设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq a,\\ 0, & x=a.\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处间断，因而 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不可导，但 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=0.$

3.（1994.Ⅲ）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\leqslant1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$则 $f(x)$在 $x=1$ 处的（　　）.

(A) 左、右导数都存在.　　(B) 左导数存在，但右导数不存在.

(C) 左导数不存在，但右导数存在.　　(D) 左、右导数都不存在.

解 按左、右导数的定义

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{2}{3}(x^3-1)}{x-1}=2,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=+\infty,$$

故选(B).

4. (2001. Ⅰ)设 $f(0)=0$,则 $f(x)$在点 $x=0$ 可导的充要条件为(　　).

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$存在.　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)$存在.　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$存在.

解　令 $1-e^h=t$,则 $h=\ln(1-t)$,当 $h\to 0$ 时,$t\to 0$,故

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{\ln(1-t)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}\cdot\frac{t}{\ln(1-t)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}\cdot(-1),$$

由导数的定义知,应选(B).关于其他三个选项的排除,可用反例说明.取 $f(x)=|x|$,则 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导,但

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)=\lim_{h\to 0}\frac{|1-\cos h|}{h^2}=\frac{1}{2},$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)=\lim_{h\to 0}\frac{|h-\sin h|}{h^2}=0,$$

故排除(A)和(C).

又取 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$则 $f(x)$在 $x=0$ 处不连续,从而 $f'(0)$不存在.但

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}[1-1]=0,$$
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h}[0-0]=0.$$

即$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$存在,故排除(D).

5. (1990. Ⅲ)设 $y=e^{\tan\frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x}$,则 $y'=$______.

解　$y'=e^{\tan\frac{1}{x}}\left[\sec^2\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]$

$$=-\frac{1}{x^2}e^{\tan\frac{1}{x}}\left(\tan\frac{1}{x}\sec\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right).$$

6. (1999. Ⅱ)曲线$\begin{cases}x=e^t\sin 2t,\\ y=e^t\cos t\end{cases}$在点(0,1)处的法线方程为____________.

解　$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{e^t\cos t-e^t\sin t}{e^t\sin 2t+2e^t\cos 2t}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin 2t+2\cos 2t}.$

点(0,1)对应参数 $t=0$,$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{1}{2}$,于是所求法线方程为

$$y-1=-2x,\quad 即\quad 2x+y-1=0.$$

7.(1994.Ⅲ)设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t),\\ y=t^3+t^2\end{cases}$ 所确定,则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ ________.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{3t^2+2t}{1-\dfrac{1}{1+t}}=3t^2+5t+2,$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(3t^2+5t+2)'_t}{x'_t}=\frac{6t+5}{1-\dfrac{1}{1+t}}=\frac{(6t+5)(t+1)}{t}.$$

8.(2000.Ⅱ)求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$ $(n\geqslant 3)$.

解法一 由莱布尼兹公式

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v^{(0)}+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots+u^{(0)}v^{(n)}$$

及 $[\ln(1+x)]^{(k)}=\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}(k\in\mathbf{N}^+)$,得

$$f^{(n)}(x)=x^2\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+2nx\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+$$
$$n(n-1)\cdot\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}},$$

故 $$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)!=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}.$$

解法二 由麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),$$

及 $$x^2\ln(1+x)=x^2\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n-2}+o(x^{n-2})\right]$$
$$=x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n-2}+o(x^n),$$

比较 x^n 的系数,得 $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n-2}$,所以 $f^{(n)}(0)=\dfrac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}$.

9.(1993.Ⅲ)函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 所确定,则 $\dfrac{dy}{dx}=$ ________.

解 方程两端对 x 求导数,得

$$(2x+2yy')\cos(x^2+y^2)+e^x-y^2-2xyy'=0,$$

从而

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-e^x-2x\cos(x^2+y^2)}{2y\cos(x^2+y^2)-2xy}.$$

10．(2002．Ⅰ) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值.

解法一 由题设条件知

$$\lim_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0)=0,$$

由于 $f(0)\neq 0$，故有 $a+b-1=0$.

又由洛必达法则，有

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}=(a+2b)f'(0),$$

因 $f'(0)\neq 0$，故有 $a+2b=0$.

于是，解得 $a=2, b=-1$.

解法二 由 $f(h)$ 在 $h=0$ 处可导，即

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0),$$

于是

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)+\alpha,\quad \lim_{h\to 0}\alpha=0.$$

从而有

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+o_1(h),\lim_{h\to 0}\frac{o_1(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\alpha=0.$$

同理有

$$f(2h)=f(0)+f'(0)2h+o_2(h),\lim_{h\to 0}\frac{o_2(h)}{h}=0.$$

所以

$$af(h)+bf(2h)-f(0)=(a+b-1)f(0)+(a+2b)f'(0)h+o(h),$$

按题设，当 $h\to 0$ 时上式右端应是 h 的高阶无穷小，从而

$$(a+b-1)f(0)=0 \quad 及 \quad (a+2b)f'(0)=0.$$

于是 $a+b-1=0, a+2b=0$. 得 $a=2, b=-1$.

11．(2002．Ⅰ)已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt$ 在点(0,0)处的切线相同，写出此切线方程，并求极限 $\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)$.

解 由已知条件得 $f(0)=0$,

$$f'(0)=\frac{e^{-(\arctan x)^2}}{1+x^2}\bigg|_{x=0}=1,$$

故所求切线方程为 $y=x$.

$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2\,\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2.$$

12.(1987.Ⅰ,Ⅱ)设函数 $f(x)$在闭区间$[0,1]$上可微,对于$[0,1]$上的每一个 x,函数 $f(x)$的值都在开区间$(0,1)$内,且 $f'(x)\neq 1$,证明在$(0,1)$内有且仅有一个 x,使 $f(x)=x$.

证 令 $F(x)=f(x)-x$,则 $F(x)$在$[0,1]$上连续.由于$0<f(x)<1$,所以 $F(0)=f(0)-0>0$, $F(1)=f(1)-1<0$,故由零点定理知,在$(0,1)$内至少存在一点 x,使

$$F(x)=f(x)-x=0, \quad 即 \quad f(x)=x.$$

若有 $x_1,x_2\in(0,1)$, $x_1\neq x_2$,使

$$f(x_1)=x_1, \quad f(x_2)=x_2,$$

则由拉格朗日中值定理知,在$(0,1)$内至少存在一点 x 使

$$f'(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{x_2-x_1}{x_2-x_1}=1,$$

这与题设 $f'(x)\neq 1$ 矛盾.

综上所得,在$(0,1)$内有且仅有一个 x,使 $f(x)=x$.

13.(1996.Ⅲ)设 $f(x)$在区间$[a,b]$上具有二阶导数,且 $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)f'(b)>0$,证明存在 $\xi\in(a,b)$和 $\eta\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$ 及 $f''(\eta)=0$.

证 先证明存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$.用反证法.

若不存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$,则在(a,b)内恒有 $f(x)>0$ 或$f(x)<0$,不妨设 $f(x)>0$(对 $f(x)<0$,类似可证),则

$$f'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}\geqslant 0,$$

$$f'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}\leqslant 0.$$

从而 $f'(a)f'(b)\leqslant 0$,与已知条件矛盾.所以在(a,b)内至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)=0$.

再证存在 $\eta\in(a,b)$,使 $f''(\eta)=0$.

由 $f(a)=f(b)=f(\xi)$及罗尔定理知,存在 $\eta_1\in(a,\xi)$和 $\eta_2\in(\xi,b)$,使 $f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=0$,再在$[\eta_1,\eta_2]$上对函数 $f'(x)$运用罗尔定理,知存在 $\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$,使 $f''(\eta)=0$.

14.(2001.Ⅰ)设 $y=f(x)$在$(-1,1)$内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq 0$,试证:

(1) 对于$(-1,1)$内的任一 $x\neq 0$,存在惟一的 $\theta(x)\in(0,1)$,使 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$成立;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

证法一 (1) 任给非零 $x\in(-1,1)$,由拉格朗日中值定理得

$$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)\quad(0<\theta(x)<1).$$

因为 $f''(x)$在$(-1,1)$内连续且 $f''(x)\neq 0$,所以 $f''(x)$在$(-1,1)$内不变号,不妨设 $f''(x)>0$,则 $f'(x)$在$(-1,1)$内严格单增,故 $\theta(x)$惟一.

(2) 由泰勒公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,\xi\text{ 在 }0\text{ 与 }x\text{ 之间}.$$

所以 $\quad xf'(\theta(x)x)=f(x)-f(0)=f'(0)x+\dfrac{1}{2}f''(\xi)x^2$,从而

$$\theta(x)\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=\frac{1}{2}f''(\xi).$$

由于 $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=f''(0),\quad \lim\limits_{x\to 0}f''(\xi)=\lim\limits_{\xi\to 0}f''(\xi)=f''(0)$,

故 $\quad \lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

证法二 (1) 同证法一(1).

(2) 对于非零 $x\in(-1,1)$,由拉格朗日中值定理得

$$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)\quad(0<\theta(x)<1),$$

所以

$$\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{x}=\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}.$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=f''(0),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0),$$

故

$$\lim_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}.$$

15. (2002.Ⅱ)设 $0<a<b$,证明不等式

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

证 先证右边的不等式.构造辅助函数如下:

设 $$\varphi(x)=\ln x-\ln a-\frac{x-a}{\sqrt{ax}}\quad(x>a>0).$$

因为 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{a}{2x\sqrt{x}}\right)=\dfrac{2\sqrt{ax}-x-a}{2x\sqrt{ax}}=-\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}}<0$,

故 $\varphi(x)$在$(a,+\infty)$内单调减少,又 $\varphi(a)=0$,因此,当 $x>a$ 时,

$$\varphi(x)<\varphi(a)=0,\quad 即\quad \ln x-\ln a<\frac{x-a}{\sqrt{ax}},$$

特别,当 $x=b>a$ 时,便有

$$\ln b-\ln a<\frac{b-a}{\sqrt{ab}},$$

即
$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

其次证左边的不等式.

证法一 设 $f(x)=\ln x(x>a>0)$.

由拉格朗日中值定理知,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=(\ln x)'\Big|_{x=\xi}=\frac{1}{\xi}.$$

由于 $0<a<\xi<b$,故

$$\frac{1}{\xi}>\frac{1}{b}.$$

又由于 $a^2+b^2>2ab$,所以$\frac{1}{b}>\frac{2a}{a^2+b^2}$,从而有

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{2a}{a^2+b^2}.$$

证法二 类似于证右边不等式的方法,构造辅助函数如下

设 $g(x)=(x^2+a^2)(\ln x-\ln a)-2a(x-a)\quad(x>a>0)$,

因为
$$g'(x)=2x(\ln x-\ln a)+\frac{x^2+a^2}{x}-2a$$
$$=2x(\ln x-\ln a)+\frac{(x-a)^2}{x}>0,$$

故 $g(x)$在$(a,+\infty)$内单调增加,又 $g(a)=0$,因此当 $x>a>0$ 时,

$$g(x)>g(a)>0,\quad 即\quad (x^2+a^2)(\ln x-\ln a)-2a(x-a)>0.$$

特别,当 $x=b>a>0$ 时,有

$$(b^2+a^2)(\ln b-\ln a)-2a(b-a)>0,$$

即
$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{2a}{a^2+b^2}.$$

16.(2001.Ⅱ)设 $f(x)$在区间$[-a,a](a>0)$上具有二阶连续导数,$f(0)=0$.

(1) 写出 $f(x)$的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;

(2) 证明在$[-a,a]$上至少存在一点 η,使

$$a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

解 (1) 对任意 $x\in[-a,a]$,

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2=f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2$,其中 ξ 在 0 与 x 之间.

$$(2)\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a} f'(0)x\mathrm{d}x+\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{2!}f''(\xi)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}x^2 f''(\xi)\mathrm{d}x.$$

因为 $f''(x)$在$[-a,a]$上连续,故对任意的 $x\in[-a,a]$,有 $m\leqslant f''(x)\leqslant M$,其中 M、m 分别为$f''(x)$在$[-a,a]$上的最大、最小值,所以有

$$m\int_0^a x^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}x^2 f''(\xi)\mathrm{d}x\leqslant M\int_0^a x^2\mathrm{d}x,$$

即
$$m\leqslant\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$$

因而由 $f''(x)$的连续性知,至少存在一点 $\eta\in[-a,a]$,使

$$f''(\eta)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x,$$

即
$$a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

下面我们给出(2)的另一种证法.

令 $F(x)=\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t$. 因为 $f(x)$在$[-a,a]$上有二阶连续导数,所以 $F(x)$在$[-a,a]$上有三阶连续导数,且

$$F(0)=0,\quad F'(0)=0,\quad F''(0)=0.$$

由 Taylor 公式知存在 $\xi\in(-a,a)$,使得

$$F(x)=\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3!}F'''(\xi)x^3,\quad \xi\in(-a,a).$$

由 $F'''(x)=f''(x)+f''(-x)$,故有

$$\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3!}[f''(\xi)+f''(-\xi)]x^3,\quad \xi\in(-a,a).$$

又因为 $f''(x)$连续,所以在 ξ 与 $-\xi$ 之间存在 η,使得$\dfrac{f''(\xi)+f''(-\xi)}{2}=f''(\eta)$. 从而

$$\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}f''(\eta)x^3,\quad \eta\in(-a,a).$$

在上式中令 $x=a$ 即得所证.(按此证法,η 可在开区间$(-a,a)$内取得,比原题结论更精确.)

17.(1990.Ⅲ)证明当 $x>0$ 时,有不等式

$$\arctan x+\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}.$$

证 设 $f(x)=\arctan x+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}\quad(x>0)$，则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}<0,$$

故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少．又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$．于是

$$f(x)=\arctan x+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}>0\quad(x>0),$$

即
$$\arctan x+\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}\quad(x>0).$$

18．(1993．Ⅲ)设 $x>0$，常数 $a>\mathrm{e}$．证明

$$(a+x)^a<a^{a+x}$$

证 由函数 $y=\ln x$ 的单调性，只需证

$$a\ln(a+x)<(a+x)\ln a.$$

设 $f(x)=(a+x)\ln a-a\ln(a+x)$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续、可导，且

$$f'(x)=\ln a-\frac{a}{a+x}>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加，又 $f(0)=0$，从而 $f(x)>0(x>0)$，

即
$$a\ln(a+x)<(a+x)\ln a\quad(x>0),$$

因此
$$(a+x)^a<a^{a+x}\quad(x>0).$$

19．(1999．Ⅰ)试证：当 $x>0$ 时，

$$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2.$$

证法一 令 $\varphi(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2(x>0)$，易知 $\varphi(1)=0$．由于

$$\varphi'(x)=2x\ln x-x+2-\frac{1}{x},\varphi'(1)=0,$$

$$\varphi''(x)=2\ln x+1+\frac{1}{x^2},$$

$$\varphi'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3},$$

故当 $0<x<1$ 时，$\varphi'''(x)<0$；当 $1<x<+\infty$ 时，$\varphi'''(x)>0$，从而 $\varphi''(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，而 $\varphi''(1)=2>0$，故当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $\varphi''(x)>0$．

由 $\varphi'(1)=0$ 推知当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$；当 $1<x<+\infty$ 时，$\varphi'(x)>0$．从而 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，而 $\varphi(1)=0$，故 $\varphi(x)\geqslant0$，即当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$．

证法二 令 $\varphi(x)=\ln x-\frac{x-1}{x+1}(x>0)$，则

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+1}{x(x+1)^2}>0\quad (x>0).$$

从而 $\varphi(x)$在$(0,+\infty)$内单调增加，而 $\varphi(1)=0$，所以当 $0<x<1$ 时，$\varphi(x)<0$；当 $1<x<+\infty$时，$\varphi(x)>0$. 于是当 $x>0$ 时，

$$(x^2-1)\varphi(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\geqslant 0,$$

即

$$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2.$$

进一步，我们还可以证明：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\geqslant 2(x-1)^2$.

事实上，令 $\varphi(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$，则 $\varphi(1)=0$，且 $\varphi'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$，$x\neq 1$. 所以当 $0<x<1$ 时，$\varphi(x)<0$；当 $1<x<+\infty$时，$\varphi(x)>0$. 故当 $x>0$ 时，$(x-1)\varphi(x)\geqslant 0$，即有$(x^2-1)\ln x\geqslant 2(x-1)^2$.

20．(2000．Ⅱ)设函数 $f(x)$满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$，且 $f'(0)=0$，则(　　).

(A) $f(0)$是 $f(x)$的极大值．　　(B) $f(0)$是 $f(x)$的极小值.

(C) 点$(0,f(0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

(D) $f(0)$不是 $f(x)$的极值，点$(0,f(0))$也不是曲线 $y=f(x)$的拐点.

解　由 $f'(0)=0$ 及 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$ 知 $f''(0)=0$ 且 $f''(x)=x-[f'(x)]^2$，从而 $f''(x)$可导，于是

$$f'''(x)=1-2f'(x)f''(x),\quad f'''(0)=1>0,$$

而

$$f'''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x},$$

即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{x}>0$，由此推知 $f''(x)$在 $x=0$ 左、右两侧异号，因而应选(C).

21．(2001．Ⅱ)设 $\rho=\rho(x)$是抛物线 $y=\sqrt{x}$上任一点$M(x,y)(x\geqslant 1)$处的曲率半径，$s=s(x)$是该抛物线上介于点 $A(1,1)$与 M 之间的弧长，计算 $3\rho\dfrac{d^2\rho}{ds^2}-\left(\dfrac{d\rho}{ds}\right)^2$ 的值. $\left(\text{在直角坐标系下曲率公式为 } K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$

解　$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$y''=-\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$.

所以抛物线在点 $M(x,y)$处的曲率半径

$$\rho=\rho(x)=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}};$$

抛物线上$\overset{\frown}{AM}$的弧长

$$s=s(x)=\int_1^x\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_1^x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx.$$

由参数方程求导公式得

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}=\frac{\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(4x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 4}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=6\sqrt{x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)\frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}}=\frac{6}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=\frac{6}{\sqrt{4x+1}},$$

从而

$$3\rho\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}-\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2=\frac{3}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{6}{\sqrt{4x+1}}-36x=9.$$

22.（1990.Ⅲ）在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的第一象限部分上求一点 P，使该点处的切线，椭圆及两坐标轴所围图形的面积为最小（其中 $a>0,b>0$）.

解 设所求点为 $P(x_0,y_0)$，则该点处的切线方程为

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1,$$

图形面积为 $S=\frac{a^2b^2}{2x_0y_0}-\frac{1}{4}\pi ab,x_0\in(0,a)$.

设 $A=x_0y_0=\frac{b}{a}x_0\sqrt{a^2-x_0^2}$，则

$$A'(x_0)=\frac{b}{a}\left(\sqrt{a^2-x_0^2}-\frac{x_0^2}{\sqrt{a^2-x_0^2}}\right)=\frac{b(a^2-2x_0^2)}{a\sqrt{a^2-x_0^2}}.$$

由 $A'(x_0)=0$，得 $x_0=\frac{a}{\sqrt{2}}$，易知$\frac{a}{\sqrt{2}}$为 A 的极大点，即 S 的极小点，此时，$y_0=\frac{b}{\sqrt{2}}$. 故所求点为 $P\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$时，所围图形面积最小.

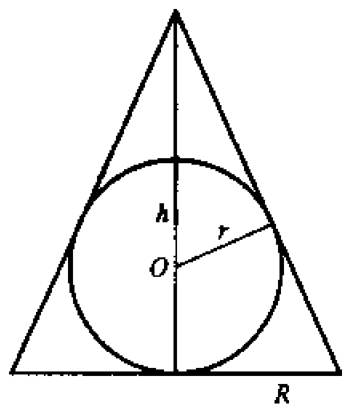
23.（1993.Ⅲ）作半径为 r 的球的外切正圆锥，问此圆锥的高 h 为何值时，其体积最小，并求出该最小值.

解 设圆锥的底面圆半径为 R（见图研 2-1），则有

$$Rh=(R+\sqrt{R^2+h^2})r,$$

解得

$$R=\frac{rh}{\sqrt{h^2-2hr}},$$



图研 2-1

于是圆锥的体积为

$$V(h)=\frac{\pi}{3}R^2h=\frac{\pi r^2}{3}\frac{h^2}{h-2r},\quad 2r<h<+\infty.$$

由
$$V'(h)=\frac{\pi r^2}{3}\frac{h^2-4rh}{(h-2r)^2}$$

可得 $V(h)$ 在 $(2r,+\infty)$ 内的惟一驻点 $h=4r$，当 $h=4r$ 时，V 取最小值，$V(4r)=\frac{8\pi r^3}{3}$.

24. (1994.Ⅲ)设 $y=\frac{x^3+4}{x^2}$，求

(1) 函数的增减区间及极值；(2) 函数图像的凹凸区间及拐点；

(3) 渐近线；(4) 作出其图形.

解 定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 当 $x=-\sqrt[3]{4}$ 时，$y=0$.

(1) $y'=1-\frac{8}{x^3}$，故驻点为 $x=2$. 又

x	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	−	0	+
y	↗	↘	3	↗

所以，$(-\infty,0)$ 及 $(2,+\infty)$ 为增区间，$(0,2)$ 为减区间，$x=2$ 为极小点，极小值为 $y=3$.

(2) $y''=\frac{24}{x^4}>0$，故 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 均为凹区间，图像无拐点.

(3) 因 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+4}{x^2}=+\infty$，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1=a,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)=0=b,$$

所以，$x=0$ 为铅直渐近线，$y=x$ 为斜渐近线.

(4) 图形见图研 2－2.

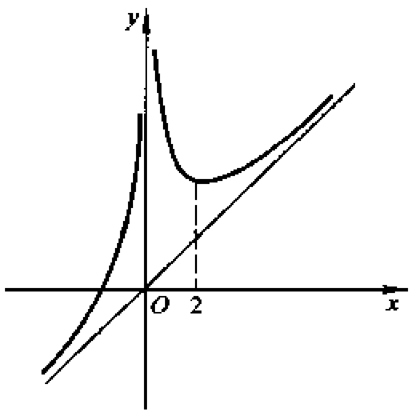


图 研 2－2

25. (1993.Ⅴ)已知某厂生产 x 件产品的成本为

$$C=25\,000+200x+\frac{1}{40}x^2(\text{元}),$$

问：(1) 要使平均成本最小，应生产多少件产品？

(2) 若产品以每件 500 元售出，要使利润最大，应生产多少件产品？

解 (1) 设平均成本为 y,则

$y=\dfrac{25\,000}{x}+200+\dfrac{x}{40}$. 由 $y'=-\dfrac{25\,000}{x^2}+\dfrac{1}{40}=0$,得 $x_1=1\,000$,$x_2=-1\,000$(舍去).
因为 $y''|_{x=1\,000}=5\cdot10^{-5}>0$,所以当 $x=10^3$ 时,y 取得极小值,也是最小值,因此,要使平均成本最小,应生产 1 000 件产品.

(2) 利润函数为

$$L=500x-\left(25\,000+200x+\frac{x^2}{40}\right)=300x-\frac{x^2}{40}-25\,000.$$

由 $L'=300-\dfrac{x}{20}=0$,得 $x=6\,000$. 因 $L''|_{x=6\,000}=-\dfrac{1}{20}<0$,所以当 $x=6\,000$ 时,L 取得极大值,也是最大值,因此,要使利润最大,应生产 6 000 件产品.

（三）一元函数积分学

1．(1989. Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ)设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=$______．

解 设 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=c$，则 $f(x)=x+2c$，因此有

$$c=\int_0^1 (t+2c)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+2c,$$

得到 $c=-\frac{1}{2}$，故 $\quad f(x)=x-1$．

2．(1998. Ⅱ)设 $f(x)$ 连续，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$______．

解 由于

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)\mathrm{d}(x^2-t^2)\xlongequal{u=x^2-t^2}-\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u,$$

因此 $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u\right]=\frac{1}{2}f(x^2)\cdot 2x=xf(x^2)$．

3．(1999. Ⅰ)$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin(x-t)^2\mathrm{d}t=$______．

解 $\int_0^x \sin(x-t)^2\mathrm{d}t\xlongequal{u=x-t}\int_x^0 -\sin u^2\mathrm{d}u=\int_0^x \sin u^2\mathrm{d}u$，因此有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^x \sin(x-t)^2\mathrm{d}t\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x \sin u^2\mathrm{d}u\right)=\sin x^2.$$

4．(1991. Ⅲ)设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$0\leqslant x\leqslant 2$，则有(　　)．

(A) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{3}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

(B) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\dfrac{7}{6}+2x-\dfrac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{x^3}{3}+2x-\dfrac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

(D) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x-\dfrac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

解 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\dfrac{x^3}{3}$；

当 $1<x\leqslant 2$ 时，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 t^2\mathrm{d}t+\int_1^x(2-t)\mathrm{d}t$

$$=-\frac{7}{6}+2x-\frac{x^2}{2}.$$故选(B).

5. (1999. Ⅱ)设 $\alpha(x)=\int_0^{5x}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，$\beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的(　　).

(A) 高阶无穷小.　　　　(B) 低阶无穷小.

(C) 同阶但不等价的无穷小.　　　　(D) 等价无穷小.

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\cdot\frac{\sin 5x}{5x}}{\cos x\cdot(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}}=\dfrac{5}{\mathrm{e}}$，故选(C).

6. (2002. Ⅱ, Ⅳ)设函数 $f(x)$ 连续，则下列函数中，必为偶函数的是(　　).

(1) $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$.　　　　(2) $\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$.

(3) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$.　　　　(4) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$.

解 记 $\varphi_1(x)=\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$，$\varphi_2(x)=\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$，$\varphi_3(x)=\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$，$\varphi_4(x)=\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$，则有

$\varphi_1(x)$ 是奇函数，因为 $\varphi_1(-x)=\int_0^{-x}f(t^2)\mathrm{d}t\xlongequal{u=-t}\int_0^x -f(u^2)\mathrm{d}u=$

$-\varphi_1(x)$;

$\varphi_2(x)$不一定是偶函数,例如当 $f(x)=1$ 时,$\varphi_2(x)=\int_0^x \mathrm{d}t = x$ 为奇函数;

$\varphi_3(x)$是奇函数,因为

$$\varphi_3(-x)=\int_0^{-x} t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} \int_0^x u[f(-u)-f(u)]\mathrm{d}u = -\varphi_3(x);$$

$\varphi_4(x)$必是偶函数,因为

$$\varphi_4(-x)=\int_0^{-x} t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} \int_0^x u[f(-u)+f(u)]\mathrm{d}u = \varphi_4(x).$$

故选(D).

7.(1987.Ⅲ)计算 $\int \frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x$,其中 a,b 是不全为0的非负常数.

解 当 $a\neq 0,b\neq 0$ 时,

$$\int \frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a^2\tan^2 x+b^2}\mathrm{d}(\tan x) = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)+C.$$

当 $a=0,b\neq 0$ 时,

$$\int \frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{b^2}\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b^2}\tan x + C.$$

当 $a\neq 0,b=0$ 时,

$$\int \frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a^2}\cot x + C.$$

8.(1993.Ⅰ,Ⅱ)求 $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$.

解 令 $u=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$,即 $x=\ln(u^2+1)$,因此有

$$\begin{aligned}\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x &= \int 2\ln(u^2+1)\mathrm{d}u = 2u\ln(u^2+1)-2\int\frac{2u^2}{u^2+1}\mathrm{d}u \\ &= 2u\ln(u^2+1)-4u+4\arctan u+C \\ &= 2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-4\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C.\end{aligned}$$

9.(1994.Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ)求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(2x)+2\sin x}$.

解法一

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(2x)+2\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x(\cos x+1)} = \int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{2(\cos^2 x-1)(\cos x+1)}$$

$$\xlongequal{u=\cos x} \int \frac{\mathrm{d}u}{2(u^2-1)(u+1)} = -\frac{1}{8}\int\left[\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}+\frac{2}{(1+u)^2}\right]\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{1}{8}\left[-\ln(1-u)+\ln(1+u)-\frac{2}{1+u}\right]+C$$

$$= -\frac{1}{8}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}+\frac{1}{4(1+\cos x)}+C.$$

解法二

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(2x)+2\sin x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x(\cos x+1)}=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

10.(1995.Ⅲ)设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$,且 $f[\varphi(x)]=\ln x$,求 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x$.

解 因为 $f(x^2-1)=\ln\frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}$,故得到 $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$.

又 $f[\varphi(x)]=\ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x$,因此$\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x$,即 $\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

于是得

$$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x=2\ln(x-1)+x+C.$$

11.(1987.Ⅱ)计算定积分 $\int_{-2}^{2}(|x|+x)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$.

解 由于 $x\mathrm{e}^{-|x|}$ 为奇函数,$|x|\mathrm{e}^{-|x|}$ 为偶函数,因此有

$$\int_{-2}^{2}(|x|+x)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=2\int_0^2|x|\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=2\int_0^2 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2[-x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}]_0^2=2-\frac{6}{\mathrm{e}^2}.$$

12.(1989.Ⅲ)已知 $f(2)=\frac{1}{2}$,$f'(2)=0$ 及 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=1$,求 $\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x$.

解 令 $t=2x$,则

$$\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int_0^2 t^2 f''(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int_0^2 t^2\mathrm{d}[f'(t)]=\frac{1}{8}[t^2 f'(t)]_0^2-\frac{1}{4}\int_0^2 tf'(t)\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^2 t\mathrm{d}[f(t)]=-\frac{1}{4}[tf(t)]_0^2+\frac{1}{4}\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0.$$

13.(1995.Ⅲ)设 $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$,计算 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = [xf(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} xf'(x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\pi - t}\mathrm{d}t - \int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\pi - x}\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\pi}\frac{(\pi - x)\sin x}{\pi - x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x = 2.$$

14. (1995. Ⅲ)求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 的最大值和最小值.

解 由于函数 $f(x)$为偶函数,因此只需求 $f(x)$在$[0,+\infty)$内的最大值和最小值.

$f'(x)=2x(2-x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$,令 $f'(x)=0$ 求得在$(0,+\infty)$内的惟一驻点 $x=\sqrt{2}$,易知该点为极大值点,也是最大值点,故最大值为

$$f(\sqrt{2})=\int_0^2(2-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=[-(2-t)\mathrm{e}^{-t}]_0^2-\int_0^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1+\mathrm{e}^{-2}.$$

又由于函数 $f(x)$在$[0,\sqrt{2}]$上单调增加,在$[\sqrt{2},+\infty)$内单调减少,而 $f(0)=0$,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\int_0^{+\infty}(2-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=[-(2-t)\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=2+[\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty}=1,$$

因此最小值为 $f(0)=0$.

15. (1998. Ⅱ)计算积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

解 注意到 $x=1$ 是被积函数的瑕点,而

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=[\arcsin(2x-1)]_{\frac{1}{2}}^{1}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

$$\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}=\left[\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right)\right]_1^{\frac{3}{2}}=\ln(2+\sqrt{3}).$$

因此 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}+\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}=\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3}).$

16. (2000. Ⅱ)设 xOy 平面上有正方形 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$及直线 $l:x+y=t(t\geqslant 0)$.若 $S(t)$表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积,试求 $\int_0^x S(t)\mathrm{d}t(x\geqslant 0)$.

解 如图研 3-1 可知,$S(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ -\frac{1}{2}t^2+2t-1, & 1<t\leqslant 2,\\ 1, & t>2.\end{cases}$

所以当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{1}{2}t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{6}x^3$；

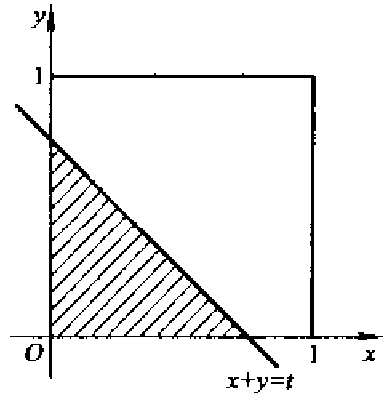


图 研 3－1

当 $1<x\leqslant 2$ 时，$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 S(t)\mathrm{d}t+\int_1^x\left(-\frac{1}{2}t^2+2t-1\right)\mathrm{d}t$

$$=-\frac{1}{6}x^3+x^2-x+\frac{1}{3};$$

当 $x>2$ 时，$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^2 S(t)\mathrm{d}t+\int_2^x \mathrm{d}t=x-1.$

因此
$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\frac{1}{6}x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\frac{1}{6}x^3+x^2-x+\frac{1}{3}, & 1<x\leqslant 2,\\ x-1, & x>2.\end{cases}$$

17.（1992.Ⅲ）求曲线 $y=\sqrt{x}$ 的一条切线 l，使该曲线与切线 l 及直线 $x=0,x=2$ 所围成图形面积最小.

解 由 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，得曲线在 $(t,\sqrt{t})$ 处的切线方程为

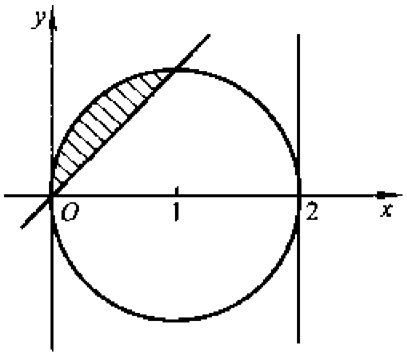
$$y-\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)\text{，即 } y=\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2}.$$

所围面积为

$$S(t)=\int_0^2\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2}-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}-\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

令 $S'(t)=0$，得 $t=1$，又 $S''(1)=\frac{1}{2}>0$. 故当 $t=1$ 时，面积取极小值，由于驻点惟一，因此 $t=1$ 是最小值点，此时 l 的方程为 $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$.

18. (1993. Ⅲ)设平面图形 A 由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $y\geqslant x$ 所确定,求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.



图研 3－2

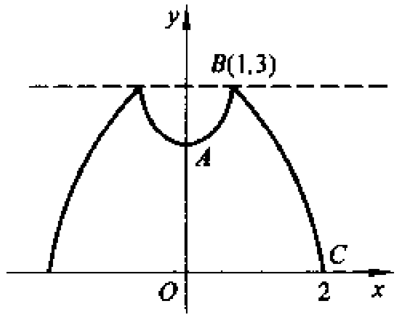
解 A 的图形如图研 3－2,取 y 为积分变量,则 y 的变化范围为[0,1].相应于[0,1]上的任一小区间[$y,y+\mathrm{d}y$]的体积元素为

$$\mathrm{d}V=\{\pi[2-(1-\sqrt{1-y^2})]^2-\pi(2-y)^2\}\mathrm{d}y$$
$$=2\pi[\sqrt{1-y^2}-(y-1)^2]\mathrm{d}y,$$

因此所求体积为

$$V=\int_0^1 2\pi[\sqrt{1-y^2}-(y-1)^2]\mathrm{d}y=2\pi\left[\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{2}\arcsin y+\frac{(1-y)^3}{3}\right]_0^1$$
$$=\frac{\pi^2}{2}-\frac{2\pi}{3}.$$

19. (1994. Ⅲ)求曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y=3$ 旋转所得的旋转体体积.



图研 3－3

解 如图研 3－3,曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的方程为 $y=x^2+2$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$,$\overset{\frown}{BC}$ 的方程为 $y=4-x^2(1\leqslant x\leqslant 2)$.

取 x 为积分变量,记相应于区间[0,1]和[1,2]上的体积分别为 V_1 和 V_2,则它们的体积元素分别为

$$\mathrm{d}V_1=\pi\{3^2-[3-(x^2+2)]^2\}\mathrm{d}x=\pi(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x,$$
$$\mathrm{d}V_2=\pi\{3^2-[3-(4-x^2)]^2\}\mathrm{d}x=\pi(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x.$$

由对称性得

$$V=2(V_1+V_2)=2\pi\int_0^1(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x+2\pi\int_1^2(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x$$
$$=2\pi\int_0^2(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x=\frac{448}{15}\pi.$$

20. (1991. Ⅰ,Ⅱ)设函数 $f(x)$ 在[0,1]上连续,(0,1)内可导,且 $3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x=f(0)$,证明在(0,1)内存在一点 c,使 $f'(c)=0$.

解 由积分中值定理知,在 $\left[\frac{2}{3},1\right]$ 上存在一点 c_1,使

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}f(c_1),$$

从而有 $f(c_1)=f(0)$，故 $f(x)$ 在区间 $[0,c_1]$ 上满足罗尔定理条件，因此在 $(0,c_1)(\subset(0,1))$ 内存在一点 c，使 $f'(c)=0$，证毕.

21.（1993. Ⅲ）设 $f'(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且 $f(0)=0$，证明：$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{Ma^2}{2}$，其中 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}|f'(x)|$.

解 由微分中值定理可知：对于任意 $x\in[0,a]$，存在 $\xi\in(0,x)$，使得 $f(x)-f(0)=f'(\xi)x$，由条件 $f(0)=0$ 得，$f(x)=f'(\xi)x$，因此有

$$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x=\int_0^a |f'(\xi)x|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^a Mx\,\mathrm{d}x=\frac{Ma^2}{2}.$$

22.（1991. Ⅰ，Ⅱ）为清除井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口（如图研 3－4）. 已知井深 30 m，抓斗自重 400 N，缆绳每米重 50 N，抓斗抓起的污泥重 2 000 N，提升速度为 3 m/s，在提升过程中，污泥以 20 N/s 的速度从抓斗缝隙中漏掉. 现将抓起污泥的抓斗提升至井口，问克服重力需作多少焦耳的功？

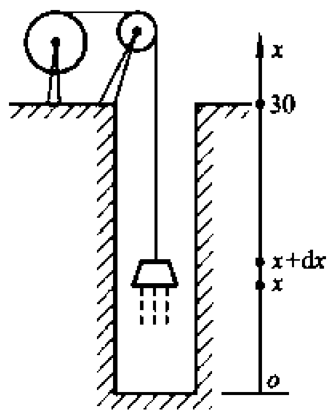
（说明：①1 N×1 m＝1 J；m，N，s，J 分别表示米，牛顿，秒，焦耳. ②抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.）

解 如图研 3－4 设立坐标，所求功

$$W=W_1+W_2+W_3,$$

其中 W_1 为克服抓斗自重所作的功；W_2 为克服缆绳重力所作的功；W_3 为提出污泥所作的功. 由所给条件可得

$$W_1=400\times30=12\ 000(\mathrm{J}).$$



图研 3－4

将抓斗从 x 处提升到 $x+\mathrm{d}x$ 处，克服缆绳重力所作的功为

$$\mathrm{d}W_2=50(30-x)\mathrm{d}x,$$

故有 $$W_2=\int_0^{30}50(30-x)\mathrm{d}x=22\ 500(\mathrm{J}).$$

在时间间隔 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内提升污泥需作功为

$$\mathrm{d}W_3=3(2\ 000-20t)\mathrm{d}t,$$

将污泥从井底提升至井口共需时间 $\frac{30}{3}=10(\mathrm{s})$，所以

$$W_3=\int_0^{10}3(2\ 000-20t)\mathrm{d}t=57\ 000(\mathrm{J}).$$

因此所求功

$$W=12\ 000+22\ 500+57\ 000=91\ 500(\mathrm{J}).$$

23.（1999. Ⅱ）设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数，

$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \ (n = 1,2,\cdots)$，证明数列$\{a_n\}$的极限存在.

解 由于 $f(x)$单调减少，因此

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(k) \quad (k=1,2,\cdots),$$

因此有

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left[f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x\right] + f(n) \geqslant 0,$$

即数列$\{a_n\}$有下界. 又

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

即得数列$\{a_n\}$单调减少，由单调有界数列必有极限的准则知数列$\{a_n\}$的极限存在.

24.（2002.Ⅰ）已知两曲线 $y=f(x)$与 $y=\int_0^{\arctan x} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 在点(0,0)处的切线相同，写出此切线方程，并求极限$\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)$.

解 由已知条件得到 $f(0)=0$，

$$f'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{\arctan x} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)\bigg|_{x=0} = \frac{\mathrm{e}^{-\arctan^2 x}}{1+x^2}\bigg|_{x=0} = 1,$$

故所求切线方程为 $\quad y = x$.

$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right) = 2\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right) - f(0)}{\frac{2}{n}} = 2f'(0) = 2.$$

25.（2002.Ⅰ，Ⅱ）设 $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{3}{2}x^2, & -1 \leqslant x < 0, \\ \frac{x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$ 求函数 $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 的表达式.

解 当$-1 \leqslant x < 0$时，

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{x}\left(2t + \frac{3}{2}t^2\right)\mathrm{d}t = \left[t^2 + \frac{1}{2}t^3\right]_{-1}^{x} = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}.$$

当$0 \leqslant x \leqslant 1$时，

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0}\left(2t+\frac{3}{2}t^2\right)\mathrm{d}t + \int_{0}^{x}\frac{t\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t+1)^2}\mathrm{d}t \\
&= \left[t^2+\frac{1}{2}t^3\right]_{-1}^{0} - \int_{0}^{x} t\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^t+1}\right) \\
&= -\frac{1}{2} - \left[\frac{t}{\mathrm{e}^t+1}\right]_{0}^{x} + \int_{0}^{x}\frac{1}{\mathrm{e}^t+1}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2} - \frac{x}{\mathrm{e}^x+1} + \int_{0}^{x}\frac{-1}{1+\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-t}) \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{x}{\mathrm{e}^x+1} - \left[\ln(1+\mathrm{e}^{-t})\right]_{0}^{x} = -\frac{1}{2} - \frac{x}{\mathrm{e}^x+1} - \ln(1+\mathrm{e}^{-x}) + \ln 2.
\end{aligned}
$$

因此

$$
F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^3 + x^2 - \dfrac{1}{2}, & -1 \leqslant x < 0, \\ -\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1} - \ln\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x}}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}
$$

（四）向量代数与空间解析几何

1．(1987．Ⅰ，Ⅱ)与两直线$\begin{cases}x=1,\\ y=-1+t,\\ z=2+t\end{cases}$及$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$都平行，且过原点的平面方程为______．

解 两已知直线的方向向量分别为$\boldsymbol{s}_1=(1,2,1)$和$\boldsymbol{s}_2=(0,1,1)$，所求平面的法向量$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{s}_1$和$\boldsymbol{s}_2$均垂直，故取$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=(1,-1,1)$．又平面过原点，故平面方程为$x-y+z=0$．

2．(1990．Ⅰ，Ⅱ)过点$M(1,2,-1)$且与直线$\begin{cases}x=-t+2,\\ y=3t-4,\\ z=t-1\end{cases}$垂直的平面方程是______．

解 已知直线的方向向量$\boldsymbol{s}=(-1,3,1)$，所求平面的法向量$\boldsymbol{n}\parallel\boldsymbol{s}$，故可取$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}$．于是平面的点法式方程为$-1(x-1)+3(y-2)+(z+1)=0$，即$x-3y-z+4=0$．

3．(1991．Ⅰ，Ⅱ)已知两条直线的方程是

$$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1},\quad L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1},$$

则过L_1且平行于L_2的平面方程是______．

解 两已知直线的方向向量分别是$\boldsymbol{s}_1=(1,0,-1)$和$\boldsymbol{s}_2=(2,1,1)$．所求平面的法向量$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{s}_1$和$\boldsymbol{s}_2$都垂直，故可取$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=(1,-3,1)$．又平面过$L_1$上的一点$(1,2,3)$，故所求平面的点法式方程为

$$(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0,\quad \text{即}\quad x-3y+z+2=0.$$

4．(1995．Ⅰ，Ⅱ)设$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，则$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$______．

解 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$

$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$

$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$

$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=4.$

5．(1996．Ⅰ，Ⅱ)设一平面经过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面$4x-y+2z=8$垂直，则此平面方程为______．

解 平面 $4x-y+2z=8$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 为 $(4,-1,2)$，过原点和点 $(6,-3,2)$ 的直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 为 $(6,-3,2)$. 按题设，所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1$ 且 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}$，故可取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{s}=(4,4,-6)$. 于是得平面的方程为 $4x+4y-6z=0$，或 $2x+2y-3z=0$.

6.（1993. Ⅰ，Ⅱ）设有直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x-y=6,\\2y+z=3,\end{cases}$ 则 L_1 与 L_2 的夹角为（　　）.

(A) $\dfrac{\pi}{6}$.　　(B) $\dfrac{\pi}{4}$.　　(C) $\dfrac{\pi}{3}$.　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$.

解 L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(1,-2,1)$ 和 $\boldsymbol{s}_2=(1,-1,0)\times(0,2,1)=(-1,-1,2)$，$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=\dfrac{1}{2}$，故 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$. 应选(C).

7.（1995. Ⅰ，Ⅱ）设有直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0,\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 $\pi:4x-2y+z-2=0$，则直线 L（　　）

(A) 平行于 π.　(B) 在 π 上.　(C) 垂直于 π.　(D) 与 π 斜交.

解 直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}=(1,3,2)\times(2,-1,-10)=(-28,14,-7)/\!/(4,-2,1)$，而 $(4,-2,1)$ 为平面 π 的法向量，故直线 L 垂直于 π. 应选(C).

8.（1998. Ⅰ）设矩阵 $\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}$ 是满秩的，则直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$（　　）.

(A) 相交于一点.　(B) 重合.　(C) 平行但不重合.　(D) 异面.

解 记点 M 为 (a_3,b_3,c_3)，点 N 为 (a_1,b_1,c_1). 两已知直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2)$，$\boldsymbol{s}_2=(a_2-a_3,b_2-b_3,c_2-c_3)$. 由于

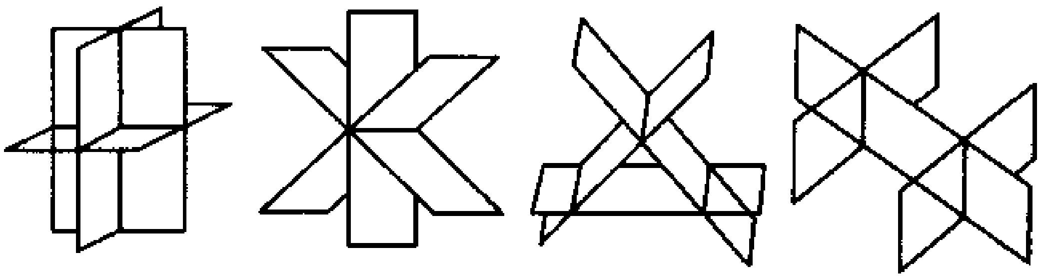
$\begin{vmatrix}a_1-a_2&b_1-b_2&c_1-c_2\\a_2-a_3&b_2-b_3&c_2-c_3\\a_3-a_1&b_3-b_1&c_3-c_1\end{vmatrix}=0$，故三向量 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\overrightarrow{MN}$ 共面. 又由于矩阵

$\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}$ 是满秩的，故 $\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1-a_2&b_1-b_2&c_1-c_2\\a_2-a_3&b_2-b_3&c_2-c_3\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\neq0$，因

此 $\dfrac{a_1-a_2}{a_2-a_3}=\dfrac{b_1-b_2}{b_2-b_3}=\dfrac{c_1-c_2}{c_2-c_3}$ 不成立，从而 $\boldsymbol{s}_1$ 与 $\boldsymbol{s}_2$ 不平行，于是两直线必交于

一点.应选(A).

9. (2002. Ⅰ)设有三张不同平面的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i$, $i=1,2,3$,它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2,则这三张平面可能的位置关系为(　)



(A)　(B)　(C)　(D)

图 研 4-1

解　由于线性方程组系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩,且小于未知数的个数 3,故线性方程组有无穷多个解,因此三张平面不可能没有公共交点,也不可能仅交于一点,这样就排除了 C、D 和 A. 又由于系数矩阵的秩为 2,故必有两张平面的法向量线性无关,即不共线,因此三平面必交于一线. 应选(B).

10. (1998. Ⅰ)求直线 $l:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 l_0 的方程,并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

解法一　直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{s}=(1,1,-1)$,平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$. 设经过 l 且垂直于平面 π 的平面方程为 $\pi_1: A(x-1)+By+C(z-1)=0$. 则由题设,$\pi_1$ 的法向量 (A,B,C) 与 $\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 均垂直,从而有

$$A+B-C=0,\quad A-B+2C=0,$$

由此解得 $A:B:C=(-1):3:2$. 于是得 π_1 的方程为 $x-3y-2z+1=0$. 从而得 l_0 的方程为

$$\begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ x-3y-2z+1=0. \end{cases}\quad 即\quad \begin{cases} x=2y, \\ z=-\frac{1}{2}(y-1). \end{cases}$$

设 l_0 绕 y 轴旋转一周所得的旋转曲面为 S,(x,y,z) 为 S 上任意一点. 则该点由直线 l_0 上的一点 (x_0,y_0,z_0) 绕 y 轴旋转而得,于是有关系:$y=y_0$,$x^2+z^2=x_0^2+z_0^2=(2y_0)^2+\left[-\frac{1}{2}(y_0-1)\right]^2=4y^2+\frac{1}{4}(y-1)^2$,从而得 S 的方程

$$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0.$$

解法二 将直线 l 的方程改写为一般方程：$\begin{cases} x-y-1=0, \\ y+z-1=0. \end{cases}$ 过 l 的平面束方程为 $(x-y-1)+\lambda(y+z-1)=0$，

即
$$x+(\lambda-1)y+\lambda z-(1+\lambda)=0.$$
现确定 λ 的值，使向量 $(1,\lambda-1,\lambda)$ 与平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$ 垂直，即令 $1-(\lambda-1)+2\lambda=0$，解得 $\lambda=-2$. 从而得过 l 且垂直于 π 的平面方程为 $x-3y-2z+1=0$.（下同解法一）

解法三 经过 l 且垂直于平面 π 的平面 π_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 可取为 $(1,1,-1)\times(1,-1,2)=(1,-3,-2)$. 又 π_1 通过 l 上的点 $(1,0,1)$，故 π_1 的方程为
$$(x-1)-3y-2(z-1)=0, \quad 即 \quad x-3y-2z+1-0.$$
（下同解法一）

三、同济大学《高等数学》试卷选编

（一）高等数学（上）期中考试试卷（Ⅰ）

试　　题

一、选择题.

1. 以下条件中，(　　)不是函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充分条件：

(A) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.　　(B) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(C) $f'(x_0)$存在.　　(D) $f(x)$在 x_0 可微.

2. 以下条件中，(　　)是函数 $f(x)$ 在 x_0 处有导数的必要且充分条件：

(A) $f(x)$在 x_0 处连续.　　(B) $f(x)$在 x_0 处可微分.

(C) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$存在.　(D) $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$存在.

3. $x=1$ 是函数 $f(x) = \dfrac{x-1}{\sin \pi x}$的(　　)间断点.

(A) 可去.　　(B) 跳跃.　　(C) 无穷.　　(D) 振荡.

4. 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续并在开区间(a,b)内可导，如果在(a,b)内 $f'(x)>0$，那么必有(　　).

(A) 在$[a,b]$上 $f(x)>0$.　　(B) 在$[a,b]$上 $f(x)$单调增加.

(C) 在$[a,b]$上 $f(x)$单调减少.　　(D) 在$[a,b]$上 $f(x)$的图形是凸的.

5. 设函数 $f(x) = (x^2-3x+2)\sin x$，则方程 $f'(x)=0$ 在$(0,\pi)$内根的个数为(　　).

(A) 0 个.　　(B) 至多 1 个.　　(C) 2 个.　　(D) 至少 3 个.

二、求下列极限.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln^b(1+ax)}{\sin ax}$ $(a>0)$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax+b\sin x}{cx+d\cos x}$ $(c\neq 0)$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} (e^{\frac{a}{x}} - 1)x$ $(a\neq 0)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

三、求下列函数的导数.

1. $y=\ln\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)-\cos x\ln(\tan x)$，求 y'.

2. 设 $F(x)$是可导的单调函数，满足 $F'(x)\neq 0, F(0)=0$. 方程

$$F(xy)=F(x)+F(y)$$

确定了隐函数 $y=y(x)$. 求$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

3. 设 $y=y(x)$是参数方程$\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2},\\ y=\arctan t\end{cases}$确定的函数，求$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(x+\mathrm{e}), & x>0,\\ a^x, & x\leqslant 0\end{cases}$ $(a>0)$，问 a 取何值时 $f'(0)$存在？

四、证明不等式 $\mathrm{e}^x\geqslant x^{\mathrm{e}}\ (x>0)$，且等号仅当 $x=\mathrm{e}$ 时成立.

五、假定足球门宽度为 4 m，在距离右门柱 6 m 处一球员沿垂直于底线的方向带球前进(如图 1)，问：他在离底线几米的地方将获得最大的射门张角？

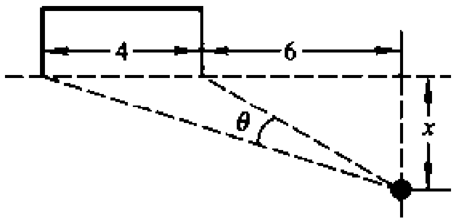


图 1

六、设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，在区间(a,b)内有二阶导数. 如果 $f(a)=f(b)$且存在 $c\in(a,b)$使得 $f(c)>f(a)$，证明在(a,b)内至少有一点 ξ，使得 $f''(\xi)<0$.

七、已知连续函数 $y=f(x)$为一指数函数与一幂函数之积，满足：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$；

(2) $y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内的图形只有一条切线且为水平切线，又只有一个拐点. 试写出 $f(x)$的表达式.

参 考 答 案

一、

1. (A)是 $f(x)$ 在 x_0 处连续的必要而非充分条件，故选(A).

2. (A)与(C)是 $f'(x_0)$ 存在的必要而非充分条件，(D)与 $f'(x_0)$ 是否存在没有关系，而(B)则是 $f'(x_0)$ 存在的充要条件.

3. 因 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-\dfrac{1}{\pi}$，故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

4. (B).

5. $f(x)=(x-1)(x-2)\sin x$，在 $[0,\pi]$ 上有 4 个零点 $x=0,1,2,\pi$，且 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内可导，故由罗尔定理知在 $(0,1)$、$(1,2)$ 及 $(2,\pi)$ 内，$f(x)$ 各至少有一个驻点. 故选(D).

二、

1. $$原式=\lim_{x\to 0}\frac{(ax)^b}{ax}=\lim_{x\to 0}(ax)^{b-1}=\begin{cases}\infty, & b<1,\\ 1, & b=1,\\ 0, & b>1.\end{cases}$$

2. $$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{a+b\dfrac{\sin x}{x}}{c+d\dfrac{\cos x}{x}}=\frac{a}{c}.$$

3. $$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{x}\cdot x=a.$$

4. $$原式=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}\cdot\frac{\sin x-x}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}}=e^{-\frac{1}{6}}.$$

三、

1. $$y'=\frac{\sec^2\dfrac{x}{2}}{\tan\dfrac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}-\left[-\sin x\ln(\tan x)+\cos x\cdot\frac{\sec^2 x}{\tan x}\right]$$
$$=\frac{1}{\sin x}+\sin x\ln(\tan x)-\frac{1}{\sin x}=\sin x\ln(\tan x).$$

2. 在方程 $F(xy)=F(x)+F(y)$ 中代入 $x=0$，得 $F(y)=0$，由于 F 是单调函数且 $F(0)=0$，故 $x=0$ 的对应值必为 $y=0$.

又在方程 $F(xy)=F(x)+F(y)$ 两端关于 x 求导，得
$$F'(xy)(y+xy')=F'(x)+F'(y)y'.$$

代入 $x=0,y=0$，有 $F'(0)+F'(0)y'\Big|_{x=0}=0$，故 $y'\Big|_{x=0}=-1$.

3.
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=\frac{1}{t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{t^3}.$$

4.
$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{\ln(\Delta x+e)-1}{\Delta x}=\frac{1}{e},$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\ln a,$$

因 $f'(0)$存在的充要条件为 $f'_+(0)=f'_-(0)$，由此得 $a=e^{\frac{1}{e}}$.

四、所证不等式等价于不等式：$x\geqslant e\ln x(x>0)$.

令 $f(x)=x-e\ln x(x>0)$，则 $f'(x)=1-\frac{e}{x}$.

在区间$(0,e)$内，由$f'(x)<0$知 $f(x)$单调减少，在区间$(e,+\infty)$内，由$f'(x)>0$知 $f(x)$单调增加，故 $x=e$是 $f(x)$在$(0,+\infty)$的最小值点且是惟一最小值点.

于是，当 $x>0$ 时有 $f(x)\geqslant f(e)=0$，即 $x\geqslant e\ln x$，等号仅当 $x=e$时成立.

五、如图 2 所示，$\theta=\beta-\alpha$，

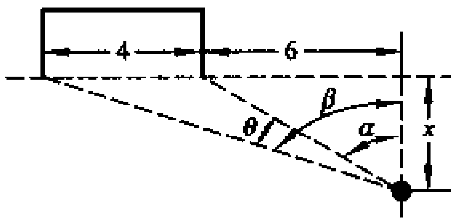


图 2

$$\tan\theta=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{\frac{10}{x}-\frac{6}{x}}{1+\frac{60}{x^2}}=\frac{4x}{x^2+60}.$$

上式两端关于 x 求导，得

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dx}=\frac{4(60-x^2)}{(x^2+60)^2},$$

可见 $x=\sqrt{60}$是函数 $\theta=\theta(x)$在 $x>0$ 的惟一驻点.而由问题的实际意义知 θ 必有最大值，故 $x=\sqrt{60}$就是 θ 的最大值点，即球员离底线$\sqrt{60}$ m 处可获得最

大射门张角 $\arctan\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

六、分别在区间$[a,c]$与$[c,b]$上用拉格朗日中值定理,知存在 $\xi_1\in(a,c)$,$\xi_2\in(c,b)$,使

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a},\quad f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

由 $f(c)>f(a)=f(b)$,可见 $f'(\xi_1)>0, f'(\xi_2)<0$.于是在区间$[\xi_1,\xi_2]$上再对函数 $f'(x)$用拉格朗日中值定理,知存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0.$$

七、按题意设 $f(x)=e^{\lambda x}x^{\mu}\quad(\lambda,\mu\neq 0)$.

因 $f(x)$连续,故必有 $\mu>0$(若 $\mu<0$,则 $x=0$ 是间断点,与 $f(x)$连续相矛盾).

依条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$,得 $\lambda<0$.

又 $$f'(x)=\lambda e^{\lambda x}x^{\mu}+e^{\lambda x}\mu x^{\mu-1}=e^{\lambda x}x^{\mu-1}(\lambda x+\mu).$$

由于 $y=f(x)$只有一条水平切线,即 $f'(x)=0$ 只有一个根,由上式知 $\mu=1$.(否则,若 $\mu>1$ 则 $f'(x)=0$ 有两根 $x=0$ 与 $x=-\frac{\mu}{\lambda}$;若 $0<\mu<1$,则有 $f'(0)=\infty$,即 $y=f(x)$有铅直切线,均与题设条件矛盾.)

于是 $f(x)=e^{\lambda x}x$,且 $f'(x)=e^{\lambda x}(\lambda x+1)$, $f''(x)=e^{\lambda x}(\lambda^2x+2\lambda)$.

可见,当 $x=-\dfrac{2}{\lambda}$时,$f''(x)=0$,且在 $x=-\dfrac{2}{\lambda}$的两侧$f''(x)$异号,故 $x=-\dfrac{2}{\lambda}$是曲线$y=f(x)$上的惟一拐点,符合条件(2).

综上分析知 $$f(x)=xe^{\lambda x}\quad(\lambda<0).$$

(二) 高等数学(上)期中考试试卷(Ⅱ)

试　　题

一、填空题.

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(1\quad\sin x)^{1/x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ________.

2. $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ 的________间断点.(可去,跳跃,无穷,振荡)

3. 若 $f'(x_0)=1$,则 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{f(x_0-3\varepsilon)-f(x_0)}{2\varepsilon}=$ ________.

4. 函数 $f(x)=(x^2-5x+6)\cos x$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内的驻点的个数为(　　).

(A) 0 个.　　(B) 至多 1 个.　　(C) 2 个.　　(D) 至少 3 个.

5. 设 $A>0$,若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{Ax^2+Bx+C}+Dx=r$,则 A 与 D 的关系是 ________.

二、计算题.

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

3. $y=\ln\left(\cot\dfrac{x}{2}\right)-\cos x\ln(\cot x)$,求 y'.

4. 设 $y=y(x)$ 是参数方程 $\begin{cases}x=e^t\cos t,\\ y=e^t\sin t\end{cases}$ 确定的函数,求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

5. 求 $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$.

6. 求 $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

三、证明:当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时,有 $\sin x+\tan x>2x$.

四、设函数 $f(x)$ 有二阶导数，且 $f(0)=0$，又满足方程 $f'(x)+f(x)=x$，证明 $f(0)$ 是极值，并说出它是极大值还是极小值？

五、设 a 和 b 是任意两个满足 $ab=1$ 的正数，试求 a^m+b^n 的最小值(其中常数 m、$n>0$).

六、设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，且 $0<f(x)<1$，证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=\xi$；又若 $f'(x)\neq 1$ $(x\in(0,1))$，证明这样的 ξ 是惟一的.

七、(1) 设 $\{a_n\}$ 是单调增加的正数列，在什么条件下，存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$？

(2) 对上述数列 $\{a_n\}$，令 $x_n=(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n)^{\frac{1}{n}}$，试用夹逼准则证明

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}a_n.$$

参 考 答 案

一、

1. $\lim\limits_{x\to0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1-\sin x)^{\frac{1}{-\sin x}\cdot\frac{-\sin x}{x}}=e^{-1}=f(0)$，故 $a=e^{-1}$.

2. $f(0^+)=0,f(0^-)=1$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

3. $$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{f(x_0-3\varepsilon)-f(x_0)}{2\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{f(x_0-3\varepsilon)-f(x_0)}{-3\varepsilon}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$$
$$=-\frac{3}{2}f'(x_0)=-\frac{3}{2}.$$

4. $f(x)=(x-2)(x-3)\cos x$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 有零点 $x=\frac{\pi}{2},2,3,\frac{3\pi}{2}$，由罗尔定理知 $f'(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},2\right)$、$(2,3)$、$\left(3,\frac{3\pi}{2}\right)$ 内至少各有一零点.

5. 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{Ax^2+Bx+C}+Dx=r$，得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{Ax^2+Bx+C}+Dx}{x}=0$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{A+\dfrac{B}{x}+\dfrac{C}{x^2}}+D\right)=0$，故 $\sqrt{A}+D=0$.

二、

1. $$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2}.$$

2. $$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

3. $y' = \dfrac{-\csc^2\dfrac{x}{2}}{\cot\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2} + \sin x\ln(\cot x) - \cos x\,\dfrac{-\csc^2 x}{\cot x}$

$$= -\frac{1}{\sin x} + \sin x\ln(\cot x) + \frac{1}{\sin x} = \sin x\ln(\cot x).$$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{e^t\sin t + e^t\cos t}{e^t\cos t - e^t\sin t} = \dfrac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}\right)\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{(\cos t - \sin t)^2 - (\sin t + \cos t)(-\sin t - \cos t)}{(\cos t - \sin t)^2\cdot e^t(\cos t - \sin t)}$$

$$= \frac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^3}.$$

5. $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx = \frac{1}{2}\int\frac{d(\sin^2 x)}{1+\sin^4 x} = \frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x) + C.$

6. 令 $x = \sec t$,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int\frac{\sec t\tan t\,dt}{\sec t\,\tan t} = \int dt = t + C$$

$$= \arccos\frac{1}{x} + C.$$

三、令 $\varphi(x) = \sin x + \tan x - 2x$,则 $\varphi(0)=0$,且 $\varphi'(x) = \cos x + \dfrac{1}{\cos^2 x} - 2$.

在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内,$\cos x + \dfrac{1}{\cos^2 x} > \cos x + \dfrac{1}{\cos x} > 2$,故 $\varphi'(x) > 0$.

$\varphi(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 单调增加,故当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时,$\varphi(x) > \varphi(0) = 0$.

四、把 $x=0$ 代入方程 $f'(x) + f(x) = x$,得 $f'(0)=0$. 故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点.

方程两端对 x 求导,得

$$f''(x) + f'(x) = 1.$$

把 $x=0$ 代入上式,得

$$f''(0) = 1(>0).$$

故 $f(0)$ 是极值且为极小值.

五、记 $x = a$,则 $b = \dfrac{1}{x}(x>0)$. 令 $f(x) = x^m + x^{-n}$,

$$f'(x) = mx^{m-1} - nx^{-n-1} = mx^{-n-1}\left(x^{m+n} - \frac{n}{m}\right).$$

由 $f'(x)=0$ 解得驻点 $x_0 = \left(\dfrac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}$.

当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 的最小值为

$$f(x_0)=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{m+n}}+\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m+n}}.$$

六、令 $\varphi(x)=x-f(x)$，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导(必连续).

$$\varphi(0)=-f(0)<0,\quad \varphi(1)=1-f(1)>0,$$

由零点定理知存在 $\xi\in(0,1)$，使 $\varphi(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$.

又 $\varphi'(x)=1-f'(x)\neq0$，故对任意 $x\in(0,1)$，$x\neq\xi$，由拉格朗日中值定理得

$$\varphi(x)=\varphi(x)-\varphi(\xi)=\varphi'(\eta)(x-\xi)\neq0\quad(\eta\text{ 介于 }x\text{ 与 }\xi\text{ 之间}).$$

故使 $\varphi(x)=0$ 的 ξ 是惟一的.

七、(1) 若 $\{a_n\}$ 有界，即存在 $M>0$，使 $a_n\leqslant M(n\in\mathbf{N}^+)$，则存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(2) 由于 a_n 单调增加，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 有确定意义：

若 a_n 有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，否则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

因

$$a_n=(a_n^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant x_n=(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant(na_n^n)^{\frac{1}{n}}=n^{\frac{1}{n}}a_n,$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$，故由夹逼准则，得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}a_n.$$

（三）高等数学（上）期末考试试卷（Ⅰ）

试　　题

一、填空题

1．函数 $f(x)$在$[a,b]$上有界是 $f(x)$在$[a,b]$上可积的________条件，函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续是 $f(x)$在$[a,b]$上可积的________条件.

2．函数 $y=\dfrac{1}{1+\tan x}$的间断点为 $x=$ ________ 与________，它们分别是________间断点与________间断点.

3．当 $x\to 0$ 时，把以下的无穷小：

(A) $a^x-1\quad(a>0,a\neq 1)$；　　(B) $x-\sin x$；

(C) $1-\cos 4x$；　　(D) $\ln(1+\sqrt{x})$

按 x 的低阶至高阶排列起来是____，____，____，____.（以字母表示）

4．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right]=\int_0^1$ ________ $\mathrm{d}x=$ ________.

5．设函数 $f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，则存在 $x_0\in(0,1)$，使 $f(x_0)+f(1-x_0)=0$. 证法如下：

令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_{1-x}^1 f(t)\mathrm{d}t$，$x\in[0,1]$，则 $F(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内________，且 $F(0)=$____，$F(1)=$____，故根据微分学中的________定理知，存在 $x_0\in(0,1)$使得 $F'(x_0)=f(x_0)+f(1-x_0)=0$，证毕.

二、计算题

1．若 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{cx}}=e^2$，求 c 的值.

2．设 $y=y(x)$是由方程 $e^y+y-\sin(xy)$确定的隐函数，求 y'.

3．求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)\mathrm{d}t}{\ln(1+x^6)}$.

4. 求 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

5. 求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x+\cos^4 x)\mathrm{d}x$.

6. 求 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

三、设 $f(x)=\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$,求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

四、设函数 $f(x)$在区间$[0,1]$上连续,且 $f(x)<1$,证明方程 $2x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=1$ 在开区间$(0,1)$内有且仅有一个根.

五、求由抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $x=\frac{1}{2}$所围成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转而成的立体的体积.

六、设半圆弧形线材的方程为 $y=\sqrt{R^2-x^2}$,其线密度为 $\rho=k-y$ $(k>R)$,求该线材的质量.

七、在一高为 4 的椭圆底柱形容器内储存某种液体,并将容器水平放置,如果椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$(单位:m)(如图 3),问

(1) 液面在 $y(-1\leqslant y\leqslant 1)$处时,容器内液体的体积 V 与 y 的函数关系是什么?

(2) 如果容器内储满了液体后以 0.16 m^3 每分钟的速度将液体从容器顶端抽出,当液面在 $y=0$ 时,液面下降的速度是每分钟多少 m?

(3) 如果液体的密度为 1($\mathrm{kg/m^3}$),抽完全部液体需作多少功?

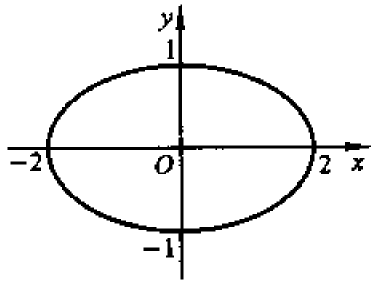


图 3

参 考 答 案

一、

1. 必要.

2. $k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\pi-\frac{\pi}{4}$,可去,无穷.

注 由于 $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan x}=0$, $\lim\limits_{x\to k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan x}=\infty$,故 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$为可去间

断点，$x=k\pi-\frac{\pi}{4}$为无穷间断点．

3．D,A,C,B.

注　当 $x\to 0$ 时，$a^x-1\sim x\ln a$，$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$，$1-\cos 4x\sim\frac{(4x)^2}{2}=8x^2$，$\ln(1+\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$，故当 $x\to 0$ 时，a^x-1、$x-\sin x$、$1-\cos 4x$、$\ln(1+\sqrt{x})$分别为 x 的 1 阶、3 阶、2 阶、1/2 阶无穷小．

4．$\sin \pi x,\frac{2}{\pi}$.

5．可导，0，0，罗尔．

二、

1．因 $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{cx}}=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{c}\right)}=e^{-\frac{1}{c}}$，

而
$$e^{-\frac{1}{c}}=e^2,\text{即}-\frac{1}{c}=2,$$

故
$$c=-\frac{1}{2}.$$

2．方程两端关于 x 求导，得
$$e^y\cdot y'+y'=\cos(xy)(y+xy').$$

整理得
$$y'=\frac{y\cos(xy)}{e^y+1-x\cos(xy)}.$$

3．由 $\ln(1+x^6)\sim x^6$（$x\to 0$ 时），
$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)dt}{x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^4}-1)\cdot 2x}{6x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\frac{e^{x^4}-1}{x^4}$$
$$=\frac{1}{3}.$$

4．令$\sqrt{x}=u$，即 $x=u^2$，
$$\text{原式}=\int\frac{2\ln u\cdot 2u\,du}{u}=4\int\ln u\,du=4(u\ln u-u)+C$$
$$=2\sqrt{x}(\ln x-2)+C.$$

5．因 $x\cos^4 x$ 是奇函数，故 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos^4 x\,dx=0$.

于是
$$\text{原式}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$$

$$=2[-x\cos x+\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=2.$$

6. 令 $x=\sec t, t\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$,

$$原式=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\tan t}{\sec^4 t\tan t}dt=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)d(\sin t)=\left[\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

三、用分部积分法,

$$\int_0^1 f(x)dx=[xf(x)]_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx=-\int_0^1 xe^{-x^2}dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e^{-1}-1).$$

四、令 $\varphi(x)=2x-\int_0^x f(t)dt-1$,则 φ 在[0,1]上可导(必连续). 且

$$\varphi(0)=-1<0,\quad \varphi(1)=2-\int_0^1 f(t)dt-1=1-\int_0^1 f(t)dt.$$

因 $f(t)<1$,且 f 在[0,1]上连续,故 $\int_0^1 f(t)dt<1$,于是 $\varphi(1)>0$.

由连续函数的零点定理,存在 $x_0\in(0,1)$,使 $\varphi(x_0)=0$,即原方程在(0,1)内有根.

又因为 $\varphi'(x)=2-f(x)>1$,即 $\varphi(x)$在[0,1]上单调增加,故 x_0 是 $\varphi(x)=0$ 在(0,1)内的惟一根.

五、抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $x=\frac{1}{2}$所围成的图形如图4所示,所求体积

$$V=\int_0^{\frac{1}{2}}\pi[(\sqrt{2x}+1)^2-(-\sqrt{2x}+1)^2]dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}4\sqrt{2}\sqrt{x}\,dx=\frac{4}{3}\pi.$$

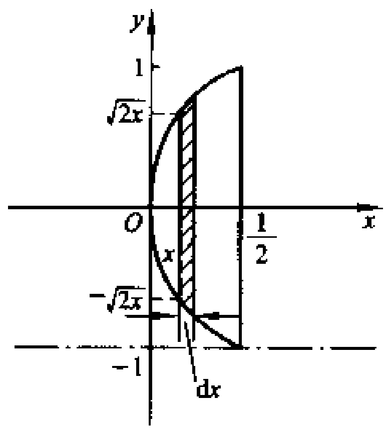


图 4

六、所求质量

$$M=\int_{-R}^{R}(k\cdot y)\sqrt{1+y'^2}dx$$

$$= \int_{-R}^{R} (k - \sqrt{R^2 - x^2}) \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx$$

$$= 2R \int_0^R \left(\frac{k}{\sqrt{R^2 - x^2}} - 1 \right) dx = Rk\pi - 2R^2.$$

七、(1) $V = 4\int_{-1}^{y} 4\sqrt{1-y^2}\,dy = 16\int_{-1}^{y} \sqrt{1-y^2}\,dy$.

(2) $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = 16\sqrt{1-y^2}\frac{dy}{dt}$. 令 $y=0$,并由条件$\frac{dV}{dt}=0.16$,得

$$\frac{dy}{dt} = 0.01 \quad (\mathrm{m/min}).$$

(3)
$$\begin{aligned} W &= \int_{-1}^{1} 16\, g \sqrt{1-y^2}(1-y)\,dy \\ &= 16\, g \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\,dy - 16\, g\int_{-1}^{1} y\sqrt{1-y^2}\,dy \\ &= 32\, g \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy \xlongequal{y=\sin t} 32\, g \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt \\ &= 32\, g \cdot \frac{\pi}{4} = 8\pi g\,(\mathrm{N}). \end{aligned}$$

其中由于 $y\sqrt{1-y^2}$ 为奇函数,故$\int_{-1}^{1} y\sqrt{1-y^2}\,dy = 0$.

（四）高等数学（上）期末考试试卷（Ⅱ）

试　题

一、填空题.

1. 极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在是函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的________条件；导数 $f'(x_0)$ 存在是函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的________条件.（填入适当的字母即可）

(A) 充分.　　　　　　　　(B) 必要.

(C) 充分且必要.　　　　　(D) 既不充分也不必要.

2. 若 $f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2h)-f(-h)}{h}=$________.

3. 设 $f(x)=x(x-1)(2x-1)(3x-1)\cdots(nx-1)(n \in \mathbf{N}^+)$，则 $f''(x)$ 在 $(0,1)$ 内有________个零点.

4. 设 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上连续的偶函数，则 $\int_{-\pi}^{\pi}[1+xf(\sin x)]\mathrm{d}x=$________.

5. 一平面过点 $(1,1,-1)$，$(-2,-2,2)$ 和 $(1,-1,2)$，则该平面的法线向量为________.

二、基本题（须有计算步骤）.

1. 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^{2x} \ln(1+t)\mathrm{d}t}{1-\cos x}$.

2. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x\mathrm{d}x$.

3. 设 $y=y(x)$ 是方程 $\mathrm{e}^y+\int_0^y \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t-x-1=0$ 确定的隐函数，证明 $y=y(x)$ 是单调增加函数并求 $y'\Big|_{x=0}$.

4. 求反常积分 $\int_0^1 \dfrac{u^3}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$.

三、设 a 和 b 是任意两个满足 $a+b=1$ 的正数，试求 $a^m \cdot b^n$ 的最大值（其中常数 m、$n>0$）.

四、一酒杯的容器内壁是由曲线 $y=x^3(0\leqslant x\leqslant 2$,单位:cm)绕 y 轴旋转而成,若把满杯的饮料吸入杯口上方 2 cm 的嘴中,问要做多少功?(饮料的密度为 1 g/cm^3)

五、教材中有一例通过应用定积分换元法,证得了等式

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

现在问:如果将上式左端的积分上限换成 $(2k-1)\pi(k\in\mathbf{Z})$,则将有怎样的结果?进一步设 $f(x)$ 是周期为 T 的连续的偶函数,$\int_0^{kT} xf(x)\mathrm{d}x$ 将有怎样相应的表达式?

六、设动点 $M(x,y,z)$ 到 xOy 面的距离与其到定点 $(1,-1,1)$ 的距离相等,动点 M 的轨迹为 Σ.若 L 是 Σ 和柱面 $2z=y^2$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线,求 L 上对应于 $1\leqslant x\leqslant 2$ 的一段弧的长度.

七、设 $f_0(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续的单调增加函数,函数 $f_1(x)=\dfrac{\int_0^x f_0(t)\mathrm{d}t}{x}$.

(1) 如何补充定义 $f_1(x)$ 在 $x=0$ 的值,使得补充定义后的函数(仍记为 $f_1(x)$)在 $[0,+\infty)$ 上连续?

(2) 证明 $f_1(x)<f_0(x)(x>0)$ 且 $f_1(x)$ 也是 $[0,+\infty)$ 上的连续的单调增加函数;

(3) 若 $f_2(x)=\dfrac{\int_0^x f_1(t)\mathrm{d}t}{x}$, $f_3(x)=\dfrac{\int_0^x f_2(t)\mathrm{d}t}{x}$, $\cdots$, $f_n(x)=\dfrac{\int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t}{x}$,证明:对任意的 $x>0$,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 存在.

参考答案

一、

1. B,A.

2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(2h)-f(0)}{2h}\cdot 2+\dfrac{f(-h)-f(0)}{-h}\right]$

$$=3f'(0)=3.$$

3. $f(x)$ 有零点 $x=0,1,\dfrac{1}{2},\cdots,\dfrac{1}{n}$,共 $n+1$ 个.由罗尔定理知,在 $(0,1)$ 内 $f'(x)$ 至少有 n 个零点,从而 $f''(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有 $n-1$ 个零点.由于 $f''(x)$

是 $n-1$ 次多项式，它至多有 $n-1$ 个零点，故 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内恰有 $n-1$ 个零点.

4. 2π.

注 由于 $f(x)$ 是偶函数，故 $xf(\sin x)$ 为奇函数，从而 $\int_{-\pi}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=0$.

5. 记 $A(1,1,-1)$, $B(-2,-2,2)$, $C(1,-1,2)$，则 $\overrightarrow{BA}=(3,3,-3)$, $\overrightarrow{CA}=(0,2,-3)$, $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{CA}=(-3,9,6)=3(-1,3,2)$，

故平面的法线向量可取 $(-1,3,2)$.

二、

1. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln(1+2x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot 2x}{x}=4$.

2. 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=[x(\tan x-x)]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x-x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-\left[-\ln\cos x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

3. 方程两端关于 x 求导，得

$$\mathrm{e}^y y'+\mathrm{e}^{y^2}y'-1=0,$$

即

$$y'=\frac{1}{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{y^2}}.$$

因为 $y'>0$，故 $y=y(x)$ 单调增加.

在原方程中代入 $x=0$，得 $\mathrm{e}^y+\int_0^y \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t-1=0$，$y=0$ 适合方程. 由于 $y=y(x)$ 单调增加，故仅当 $x=0$ 时，$y=0$.

于是 $y'\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^0+\mathrm{e}^0}=\dfrac{1}{2}$.

4. 令 $u=\sin x$，

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}$.

三、记 $a=x$，则 $b=1-x$，令 $f(x)=x^m(1-x)^n\ (0<x<1)$.

$f'(x)=mx^{m-1}(1-x)^n-nx^m(1-x)^{n-1}=x^{m-1}(1-x)^{n-1}[m(1-x)-nx]$.

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_0=\dfrac{m}{m+n}$.

又当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x)>0$；当 $x_0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，故

$$f(x_0)=\left(\frac{m}{m+n}\right)^m\cdot\left(\frac{n}{m+n}\right)^n$$

为所求的最大值.

四、如图 5 所示,利用元素法可得所求功为

$$
\begin{aligned}
W &= \mu g\int_0^8 \pi(\sqrt[3]{y})^2(10-y)\mathrm{d}y \quad (\mu=1\ \mathrm{g/cm^3})\\
&= g\pi\int_0^8 (10y^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{5}{3}})\mathrm{d}y\\
&= 96\ \pi g(\mathrm{Dyn}).
\end{aligned}
$$

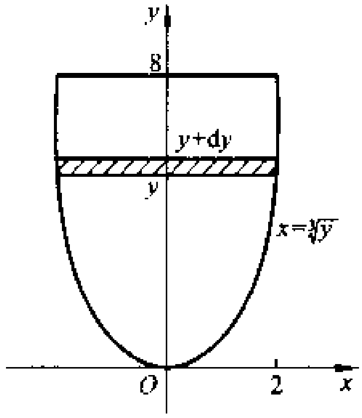


图 5

五、(1) 令 $x=(2k-1)\pi-t$,则

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{(2k-1)\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = -\int_{(2k-1)\pi}^0 [(2k-1)\pi-t]f(\sin t)\mathrm{d}t\\
&= (2k-1)\pi\int_0^{(2k-1)\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t - I,
\end{aligned}
$$

于是

$$
I=\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\int_0^{(2k-1)\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t.
$$

(2) 令 $x=kT-t$,则

$$
I=\int_0^{kT} xf(x)\mathrm{d}x=-\int_{kT}^0 (kT-t)f(t)\mathrm{d}t=kT\int_0^{kT} f(t)\mathrm{d}t-I,
$$

于是

$$
I=\frac{kT}{2}\int_0^{kT} f(t)\mathrm{d}t.
$$

又 $f(x)$是以 T 为周期的周期函数,故有 $\int_0^{kT} f(t)\mathrm{d}t=k\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$,

因此

$$
I=\frac{k^2T}{2}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.
$$

六、(1) 依题设得 Σ 的方程 $|z| = \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2}$，即

$$2z=(x-1)^2+(y+1)^2+1.$$

(2) 由 $\begin{cases}2z=(x-1)^2+(y+1)^2+1,\\ 2z=y^2\end{cases}$ 消去 z，得投影曲线 L 的方程

$$y=x-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}.$$

所求弧长　$S=\int_1^2\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^2\sqrt{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x.$

令 $x-1=\tan t$，则

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec t\,\mathrm{d}t=[\ln(\sec t+\tan t)]_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(\sqrt{2}+1).$$

七、(1) $\lim\limits_{x\to0^+}f_1(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x f_0(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}f_0(x)=f_0(0).$

定义 $f_1(0)=f_0(0)$，则 $f_1(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

(2) 对 $x>0$，由积分中值定理，$f_1(x)=\dfrac{\int_0^x f_0(t)\mathrm{d}t}{x}=f_0(\xi)\ (0<\xi<x)$.

因 $f(x)$ 单调增加，故 $f_0(\xi)<f_0(x)$，即 $f_1(x)<f_0(x)$.

又　$$f'_1(x)=\frac{xf_0(x)-\int_0^x f_0(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\frac{f_0(x)-f_0(\xi)}{2}>0,$$

故 $f_1(x)$ 是单调增加函数.

(3) 对 $x>0$，由(2)知 $f_n(x)<f_{n-1}(x)<\cdots<f_0(x)$，即 $f_n(x)$ 随 n 增大而减小. 又由(2)知 $f_n(x)$ 是单调增加函数，故

$$f_n(x)>\lim_{x\to0^+}f_n(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0^+}f_{n-1}(x)=\cdots=\lim_{x\to0^+}f_1(x)=f_0(0).$$

即数列 $\{f_n(x)\}$ 单调减少且有下界，故极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 存在.

College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

同济大学应用数学系 编

高等数学
习题全解指南(下册)

同济 · 四、五版

高等教育出版社

College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

本书内容包括以下三部分：

- **习题全解** 对主教材各章的全部习题与总习题给出解答；部分题目提供多种解法，揭示解题规律，归纳解题方法。
- **考研试题** 按照考试大纲中高等数学内容的顺序，选取近几年全国硕士研究生入学考试数学试题，给出解答，以期帮助考研人员掌握解题步骤和方法。
- **考卷选编** 精选了同济大学期中及期末高等数学考试试卷及详解，读者可检验对课程的掌握程度，巩固学习效果。

本书可作为工科和其他非数学类专业的学生学习高等数学以及准备报考硕士研究生的人员复习高等数学的参考书。

ISBN 7-04-011992-7
9 787040 119923 >
定价 24.60 元

大学数学学习辅导丛书

高等数学习题全解指南

同济·四、五版(下册)

同济大学应用数学系　编

高等教育出版社

内容提要

本书是与同济大学应用数学系主编的《高等数学》第四、五版相配套的学习辅导书，由同济大学应用数学系的教师编写.本书内容由三部分组成，第一部分是按《高等数学》（下册）的章节顺序编排，给出习题全解.部分题目在解答之后对该类题的解法作了小结、归纳，有的提供了多种解法；第二部分是全国硕士研究生入学考试数学试题选解，所选择的试题以工学类为主，少量涉及经济学类试题；第三部分是同济大学高等数学考卷选编，以及考题的参考解答.

本书对教材具有相对的独立性，可为工科和其他非数学类专业学生学习以及准备报考硕士研究生的人员复习高等数学提供解题指导，也可供讲授《高等数学》的教师在备课和批改作业时参考.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题全解指南.（下册）：同济·四、五版/同济大学应用数学系编. —北京：高等教育出版社，2003.7
ISBN 7-04-011992-7

Ⅰ.高… Ⅱ.同… Ⅲ.高等数学-高等学校-解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 025207 号

策　　划　张忠月　编　　辑　胡乃冏　封面设计　王凌波　责任绘图　吴文信
版式设计　王艳红　责任校对　朱惠芳　责任印制　杨　明

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码　100011
总　　机　010-82028899
购书热线　010-64054588
免费咨询　800-810-0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
排　　版　高等教育出版社照排中心
印　　刷　国防工业出版社印刷厂

开　　本　787×960　1/16
印　　张　23.5
字　　数　430 000
版　　次　2003 年 7 月第 1 版
印　　次　2003 年 7 月第 1 次印刷
定　　价　24.60 元

目　　录

一、《高等数学》(第五版)(下册)习题全解

二、硕士研究生入学考试数学试题选解

三、同济大学《高等数学》试卷选编

一、《高等数学》(第五版)(下册)习题全解

第八章 多元函数微分法及其应用

习 题 8-1

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集？并分别指出它们的聚点所成的点集(称为导集)和边界.

(1) $\{(x,y)\mid x\neq 0, y\neq 0\}$；　(2) $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$；

(3) $\{(x,y)\mid y>x^2\}$；

(4) $\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2\geqslant 1\}\cap\{(x,y)\mid x^2+(y-2)^2\leqslant 4\}$.

解 (1) 集合是开集，无界集；导集为 $\mathbf{R}^2$，边界为 $\{(x,y)\mid x=0 \text{ 或 } y=0\}$.

(2) 集合既非开集，又非闭集，是有界集；导集为 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$，边界为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$.

(3) 集合是开集，区域，无界集；导集为 $\{(x,y)\mid y\geqslant x^2\}$，边界为 $\{(x,y)\mid y=x^2\}$.

(4) 集合是闭集，有界集；导集为集合本身，边界为 $\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2=1\}\cup\{(x,y)\mid x^2+(y-2)^2=4\}$.

2. 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$，试求 $f(tx,ty)$.

解 $f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-(tx)(ty)\tan\dfrac{tx}{ty}=t^2\left(x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}\right)$

$=t^2f(x,y)$.

3. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

证 $F(xy,uv)=\ln(xy)\cdot\ln(uv)=(\ln x+\ln y)(\ln u+\ln v)$

$=\ln x\cdot\ln u+\ln x\cdot\ln v+\ln y\cdot\ln u+\ln y\cdot\ln v$

$=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v)$.

4. 已知函数 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$，试求 $f(x+y,x-y,xy)$.

解 $f(x+y,x-y,xy)=(x+y)^{xy}+(xy)^{(x+y)+(x-y)}=(x+y)^{xy}+$

$(xy)^{2r}$.

5. 求下列各函数的定义域:

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$;　　(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$;

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$;　　(4) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

(5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}(R>r>0)$;

(6) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 (1) $\{(x,y)\mid y^2-2x+1>0\}$.

(2) $\{(x,y)\mid x+y>0,x-y>0\}$.

(3) $\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^2\geqslant y\}$.

(4) $\{(x,y)\mid y-x>0,x\geqslant 0,x^2+y^2<1\}$.

(5) $\{(x,y,z)\mid r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$.

(6) $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2-z^2\geqslant 0,x^2+y^2\neq 0\}$.

注 本题是求多元函数的定义域,与求一元函数的定义域相类似,先写出构成该函数的各个简单函数的定义域,再求出表示这些定义域的集合的交集,即得所求定义域.

6. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$;　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}$;　　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

解 (1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=\dfrac{1-0}{0+1}=1$.

注 本题利用多元初等函数的连续性求极限,即极限值等于函数值.对于多元初等函数在点 P_0 处的极限,若 P_0 在该函数的定义区域内,均可利用此方法求极限.

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1+0}}=\ln 2$.

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\frac{1}{4}.$$

注 本题分母的极限为零,不能运用商的极限运算法则,而采用通过分母或分子有理化等方法,消去分母中趋于零的因子,再运用极限运算法则,这是求极限的基本方法之一.

(4) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(xy+1)-1}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{xy+1}+1)=2.$$

(5) $$\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sin(xy)}{y}=\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot x=1\cdot 2=2.$$

注 本题利用 $\sin(xy)\sim xy\ ((x,y)\to(2,0))$,相当于令 $u=xy$,当 $(x,y)\to(2,0)$ 且 $y\neq 0$ 时,有 $u=xy\to 0$,且 $u\neq 0$,于是

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sin xy}{xy}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1.$$

(6) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{e^{x^2y^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 0=0.$$

注 本题利用 $1-\cos(x^2+y^2)\sim\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2\quad((x,y)\to(0,0))$.

7. 证明下列极限不存在:

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x-y}$; (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

证 (1) 当 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+k)x}{(1-k)x}=\frac{1+k}{1-k}\quad(k\neq 1).$$

显然它是随着 k 的值不同而改变的,故所求极限不存在.

(2) 依次取 $(x,y)\to(0,0)$ 的两种方式:$y=x$,$y=-x$,分别求极限:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+4}=0.$$

两种方式求得的极限值不同,故所求极限不存在.

注 本题证明极限不存在所采用的方法是:找出两条不同的路径,使得点 P 沿这两条路径趋于 P_0 时,$f(P)$ 的极限存在但不相等;或者找出一条特殊的路径,使得点 P 沿这路径趋于 P_0 时,$f(P)$ 的极限不存在.这是证明多元函数极限

不存在常用的方法.

8. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处是间断的?

解 这函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid y^2-2x\neq 0\}$,曲线 $y^2-2x=0$ 上各点均为 D 的聚点,且函数在这些点处没有定义,因此曲线 $y^2-2x=0$ 上各点均为函数的间断点.

9. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证 因为 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leqslant\dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$,

要使 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon$,只要 $\sqrt{x^2+y^2}<2\varepsilon$,

所以 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=2\varepsilon$,则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,就有 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon$ 成立,即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

10. 设 $F(x,y)=f(x)$,$f(x)$ 在 x_0 处连续,证明:对任意 $y_0\in R$,$F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

证 设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$,因为 $f(x)$ 在 x_0 处连续,所以 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.从而,当 $P(x,y)\in U(P_0,\delta)$ 时,$|x-x_0|\leqslant\rho(P,P_0)<\delta$,因而有

$$|F(x,y)-F(x_0,y_0)|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

即 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

习　题　8-2

1. 求下列函数的偏导数:

(1) $z=x^3y-y^3x$;　　(2) $s=\dfrac{u^2+v^2}{uv}$;

(3) $z=\sqrt{\ln(xy)}$;　　(4) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$;

(5) $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$;　　(6) $z=(1+xy)^y$;

(7) $u=x^{\frac{y}{z}}$;　　(8) $u=\arctan(x-y)^z$.

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-3y^2x$.

(2) $\frac{\partial s}{\partial u}=\frac{\frac{\partial}{\partial u}(u^2+v^2)\cdot uv-(u^2+v^2)\cdot\frac{\partial}{\partial u}(uv)}{(uv)^2}=\frac{2u^2v-(u^2+v^2)v}{u^2v^2}$

$=\frac{1}{v}-\frac{v}{u^2}$,

$\frac{\partial s}{\partial v}=\frac{\frac{\partial}{\partial v}(u^2+v^2)\cdot uv-(u^2+v^2)\cdot\frac{\partial}{\partial v}(uv)}{(uv)^2}=\frac{2uv^2-(u^2+v^2)u}{u^2v^2}$

$=\frac{1}{u}-\frac{u}{v^2}$.

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\frac{1}{xy}\cdot y=\frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\frac{1}{xy}\cdot x=\frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$.

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)+2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot y$

$=y[\cos(xy)-\sin(2xy)]$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy)+2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot x$

$=x[\cos(xy)-\sin(2xy)]$.

(5) $\frac{\partial z}{\partial x}=\cot\frac{x}{y}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y}\csc\frac{2x}{y}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\cot\frac{x}{y}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{2x}{y^2}\csc\frac{2x}{y}$.

(6) $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[e^{y\ln(1+xy)}]=(1+xy)^y[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}]$.

(7) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$.

(8) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$.

2. 设 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,求证 $l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=0$.

证 因为 $\dfrac{\partial T}{\partial l}=2\pi\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{l}{g}}}\cdot\dfrac{1}{g}=\dfrac{\pi}{\sqrt{gl}}$,

$$\frac{\partial T}{\partial g}=2\pi\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{l}{g}}}\cdot\left(-\frac{l}{g^2}\right)=-\frac{\pi\sqrt{l}}{g\sqrt{g}},$$

所以 $l\dfrac{\partial T}{\partial l}+g\dfrac{\partial T}{\partial g}=\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}-\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}=0$.

3. 设 $z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$,求证 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$.

证 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{y^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$,

所以 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=2e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2z$.

4. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$,求 $f_x(x,1)$.

解 $f_x(x,y)=1+\dfrac{y-1}{\sqrt{1-\dfrac{x}{y}}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{y}}}\cdot\dfrac{1}{y}$,

$f_x(x,1)=1$.

5. 曲线 $\begin{cases}z=\dfrac{x^2+y^2}{4},\\ y=4\end{cases}$ 在点(2,4,5)处的切线对于 x 轴的倾角是多少?

解 按偏导数的几何意义,$f_x(2,4)$就是曲线在点(2,4,5)处的切线对于 x 轴的斜率,而 $f_x(2,4)=\dfrac{1}{2}x\big|_{x=2}=1$,即 $k=\tan\alpha=1$,于是倾角 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

6. 求下列函数的$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$:

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$;

(2) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$;

(3) $z=y^x$.

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$, $\qquad\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y$, $\qquad\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(4x^3-8xy^2)=-16xy$.

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$.

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\cdot\ln^2 y$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y^x\ln y)=y^{x-1}(1+x\ln y)$.

7. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$,

求 $f_{xx}(0,0,1),f_{xz}(1,0,2),f_{yz}(0,-1,0)$及 $f_{zzx}(2,0,1)$.

解 因为 $f_x=y^2+2xz,f_{xx}=2z,f_{xz}=2x$,

$f_y=2xy+z^2,f_{yz}=2z$,

$f_z=2yz+x^2,f_{zz}=2y,f_{zzx}=0$.

所以 $f_{xx}(0,0,1)=2,f_{xz}(1,0,2)=2,f_{yz}(0,-1,0)=0$,

$f_{zzx}(2,0,1)=0$.

8. 设 $z=x\ln(xy)$,求$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$及$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+x\cdot\frac{y}{xy}=\ln(xy)+1$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y}{xy}=\frac{1}{x},\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x}{xy}=\frac{1}{y},\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}$.

9. 验证:

(1) $y=e^{-kn^2t}\sin nx$ 满足$\frac{\partial y}{\partial t}=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$;

(2) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$满足$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$.

证 (1) 因为 $\frac{\partial y}{\partial t}=-kn^2e^{-kn^2t}\sin nx,\frac{\partial y}{\partial x}=ne^{-kn^2t}\cos nx$,

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(ne^{-kn^2t}\cos nx)=-n^2e^{-kn^2t}\sin nx$,

所以 $\frac{\partial y}{\partial t}=k(-n^2e^{-kn^2t}\sin nx)=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

(2) 因为 $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{1}{r}-\frac{x}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=\frac{r^2-x^2}{r^3}$,

由函数关于自变量的对称性,得

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3},$$

所以 $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}=\frac{2}{r}$.

习 题 8-3

1. 求下列函数的全微分:

(1) $z=xy+\frac{x}{y}$;

(2) $z=e^{\frac{y}{x}}$;

(3) $z=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(4) $u=x^{yz}$.

解 (1) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=y+\frac{1}{y},\frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$,

所以 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(y+\frac{1}{y}\right)dx+\left(x-\frac{x}{y^2}\right)dy$.

(2) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}$,

所以 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{y}{x}}(ydx-xdy)$.

(3) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

所以 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}(ydx-xdy)$.

(4) 因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=yzx^{yz-1},\frac{\partial u}{\partial y}=zx^{yz}\ln x,\frac{\partial u}{\partial z}=yx^{yz}\ln x$,

所以 $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\ln x\,dy+yx^{yz}\ln x\,dz$.

2. 求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 当 $x=1,y=2$ 时的全微分.

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{1+x^2+y^2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{1}{3},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{2}{3},$$

所以 $\left.\mathrm{d}z\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{1}{3}\mathrm{d}x+\frac{2}{3}\mathrm{d}y$.

3. 求函数 $z=\frac{y}{x}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

解 $\Delta z=\frac{y+\Delta y}{x+\Delta x}-\frac{y}{x},\mathrm{d}z=-\frac{y}{x^2}\Delta x+\frac{1}{x}\Delta y$.

当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时,

全增量 $\Delta z=\frac{1+(-0.2)}{2+0.1}-\frac{1}{2}=-0.119$,

全微分 $\mathrm{d}z=-\frac{1}{4}\cdot0.1+\frac{1}{2}\cdot(-0.2)=-0.125$.

4. 求函数 $z=\mathrm{e}^{xy}$ 当 $x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$ 时的全微分.

解 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=y\mathrm{e}^{xy}\Delta x+x\mathrm{e}^{xy}\Delta y$.

当 $x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$ 时,

全微分 $\mathrm{d}z=\mathrm{e}\cdot0.15+\mathrm{e}\cdot0.1=0.25\mathrm{e}$.

*5. 计算 $\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$ 的近似值.

解 设 $z=\sqrt{x^3+y^3}$,则

$$\sqrt{(x+\Delta x)^3+(y+\Delta y)^3}=\sqrt{x^3+y^3}+\Delta z\approx\sqrt{x^3+y^3}+\mathrm{d}z$$
$$=\sqrt{x^3+y^3}+\frac{3x^2\Delta x+3y^2\Delta y}{2\sqrt{x^3+y^3}}.$$

取 $x=1,y=2,\Delta x=0.02,\Delta y=-0.03$,可得

$$\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}\approx\sqrt{1+2^3}+\frac{3\cdot1\cdot0.02+3\cdot2^2\cdot(-0.03)}{2\sqrt{1+2^3}}=2.95.$$

*6. 计算 $(1.97)^{1.05}$ 的近似值($\ln2=0.693$).

解 设 $z=x^y$,则

$$(x+\Delta x)^{y+\Delta y}=x^y+\Delta z\approx x^y+\mathrm{d}z=x^y+yx^{y-1}\Delta x+x^y\ln x\cdot\Delta y.$$

取 $x=2,y=1,\Delta x=-0.03,\Delta y=0.05$,可得

$$(1.97)^{1.05}\approx2-0.03+2\ln2\cdot0.05=1.97+0.0693\approx2.039.$$

*7. 已知边长为 $x=6$ m 与 $y=8$ m 的矩形,如果 x 边增加 5 cm 而 y 边减

少 10 cm,问这个矩形的对角线的近似变化怎样?

解 矩形的对角线的长为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$\Delta z\approx \mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\Delta x+y\Delta y).$$

当 $x=6,y=8,\Delta x=0.05,\Delta y=-0.1$ 时,

$$\Delta z\approx\frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}(6\cdot 0.05-8\cdot 0.1)=-0.05,$$

即,这个矩形的对角线的长减少大约 5 cm.

*8. 设有一无盖圆柱形容器,容器的壁与底的厚度均为 0.1 cm,内高为 20 cm,内半径为 4 cm. 求容器外壳体积的近似值.

解 圆柱体的体积公式为 $V=\pi R^2H$,圆柱形容器的外壳体积就是圆柱体体积 V 的增量 ΔV,而

$$\Delta V\approx \mathrm{d}V=\frac{\partial V}{\partial R}\Delta R+\frac{\partial V}{\partial H}\Delta H=2\pi RH\Delta R+\pi R^2\Delta H.$$

当 $R=4,H=20,\Delta R=\Delta H=0.1$ 时

$$\Delta V\approx 2\cdot 3.14\cdot 4\cdot 20\cdot 0.1+3.14\cdot 4^2\cdot 0.1\approx 55.3,$$

即,容器外壳的体积大约是 55.3 cm^3.

*9. 设有直角三角形,测得其两直角边的长分别为 7 ± 0.1 cm 和 24 ± 0.1 cm. 试求利用上述二值来计算斜边长度时的绝对误差.

解 设两直角边长度分别为 x 和 y,则斜边长度为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$|\Delta z|\approx|\mathrm{d}z|=\left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right|\leqslant\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right||\Delta x|+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right||\Delta y|=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot$$

$$(x|\Delta x|+y|\Delta y|)\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\delta_x+y\delta_y),$$

便得

$$\delta_z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\delta_x+y\delta_y).$$

当 $x=7,y=24,\delta_x=0.1,\delta_y=0.1$ 时,

$$\delta_z=\frac{1}{\sqrt{7^2+24^2}}(7\cdot 0.1+24\cdot 0.1)=0.124.$$

即,计算斜边长度 z 的绝对误差约为 0.124 cm.

*10. 测得一块三角形土地的两边边长分别为 63 ± 0.1 m 和 78 ± 0.1 m,这两边的夹角为 $60°\pm 1°$. 试求三角形面积的近似值,并求其绝对误差和相对误差.

解 设三角形的两边长分别为 a 和 b,它们的夹角为 θ,则三角形的面积为

$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$,

$$|\Delta S|\approx|\mathrm{d}S|=\left|\frac{\partial S}{\partial a}\Delta a+\frac{\partial S}{\partial b}\Delta b+\frac{\partial S}{\partial \theta}\Delta\theta\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{\partial S}{\partial a}\right||\Delta a|+\left|\frac{\partial S}{\partial b}\right||\Delta b|+\left|\frac{\partial S}{\partial \theta}\right||\Delta\theta|$$
$$=\frac{1}{2}b\sin\theta|\Delta a|+\frac{1}{2}a\sin\theta|\Delta b|+\frac{1}{2}ab\cos\theta|\Delta\theta|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}b\sin\theta\delta_a+\frac{1}{2}a\sin\theta\delta_b+\frac{1}{2}ab\cos\theta\delta_\theta,$$

便得

$$\delta_S=\frac{1}{2}b\sin\theta\delta_a+\frac{1}{2}a\sin\theta\delta_b+\frac{1}{2}ab\cos\theta\delta_\theta.$$

当 $a=63,b=78,\theta=\frac{\pi}{3},\delta_a=0.1,\delta_b=0.1,\delta_\theta=\frac{\pi}{180}$时,三角形面积的近似值为

$$S=\frac{1}{2}\cdot63\cdot78\cdot\sin\frac{\pi}{3}=2\ 127.8(\mathrm{m}^2),$$

绝对误差为

$$\delta_S=\frac{1}{2}\cdot78\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot0.1+\frac{1}{2}\cdot63\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot0.1+\frac{1}{2}\cdot63\cdot78\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{180}=27.6(\mathrm{m}^2),$$

相对误差为

$$\frac{\delta_S}{S}=\frac{27.6}{2\ 127.8}=1.30\%.$$

*11. 利用全微分证明:两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

解 设 $u=x+y$,则

$$|\Delta u|\approx|\mathrm{d}u|=\left|\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right|=|\Delta x+\Delta y|\leqslant|\Delta x|+|\Delta y|\leqslant\delta_x+\delta_y,$$

便得

$$\delta_u=\delta_x+\delta_y,$$

即两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

*12. 利用全微分证明:乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和;商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

解 设 $u=xy,v=\frac{x}{y}$,则

$$|\Delta u|\approx|\mathrm{d}u|=|y\Delta x+x\Delta y|\leqslant|y||\Delta x|+|x||\Delta y|\leqslant|y|\delta_x+|x|\delta_y,$$

$$|\Delta v| \approx |dv| = \left|\frac{y\Delta x - x\Delta y}{y^2}\right| \leqslant \frac{|y|\cdot|\Delta x| + |x||\Delta y|}{|y|^2}$$

$$\leqslant \frac{|y|\delta_x + |x|\delta_y}{|y|^2},$$

便得

$$\delta_u = |y|\delta_x + |x|\delta_y, \qquad \delta_v = \frac{|y|\delta_x + |x|\delta_y}{|y|^2},$$

$$\frac{\delta_u}{|u|} = \frac{|y|\delta_x + |x|\delta_y}{|xy|} = \frac{\delta_x}{|x|} + \frac{\delta_y}{|y|},$$

$$\frac{\delta_v}{|v|} = \frac{1}{\left|\frac{x}{y}\right|}\cdot\frac{|y|\delta_x + |x|\delta_y}{|y|^2} = \frac{\delta_x}{|x|} + \frac{\delta_y}{|y|}.$$

即,乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和,商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

习 题 8-4

1. 设 $z = u^2 + v^2$,而 $u = x + y, v = x - y$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 2u\cdot 1 + 2v\cdot 1 = 2(u+v) = 4x,$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 2u\cdot 1 + 2v\cdot(-1) = 2(u-v) = 4y.$

2. 设 $z = u^2\ln v$,而 $u = \frac{x}{y}, v = 3x - 2y$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 2u\ln v\cdot\frac{1}{y} + \frac{u^2}{v}\cdot 3$$

$$= \frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y) + \frac{3x^2}{(3x-2y)y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 2u\ln v\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{u^2}{v}\cdot(-2)$$

$$= -\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y) - \frac{2x^2}{(3x-2y)y^2}.$$

3. 设 $z = e^{x-2y}$,而 $x = \sin t, y = t^3$,求$\frac{dz}{dt}$.

解
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = e^{x-2y}\cdot\cos t + e^{x-2y}\cdot(-2)\cdot 3t^2$$

$$= e^{x-2y}(\cos t - 6t^2) = e^{\sin t - 2t^3}(\cos t - 6t^2).$$

4. 设 $z=\arcsin(x-y)$，而 $x=3t$，$y=4t^3$，求 $\frac{dz}{dt}$.

解 $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\cdot 3+\frac{(-1)}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\cdot 12t^2$

$=\frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$.

5. 设 $z=\arctan(xy)$，而 $y=e^x$，求 $\frac{dz}{dx}$.

解 $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1+x^2y^2}+\frac{x}{1+x^2y^2}\cdot e^x$

$=\frac{(1+x)e^x}{1+x^2e^{2x}}$.

6. 设 $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，而 $y=a\sin x$，$z=\cos x$，求 $\frac{du}{dx}$.

解 $\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}$

$=\frac{ae^{ax}(y-z)}{a^2+1}+\frac{e^{ax}}{a^2+1}\cdot a\cos x+\frac{e^{ax}}{a^2+1}\cdot(-1)\cdot(-\sin x)$

$=\frac{e^{ax}}{a^2+1}(a^2\sin x-a\cos x+a\cos x+\sin x)$

$=e^{ax}\sin x$.

7. 设 $z=\arctan\frac{x}{y}$，而 $x=u+v$，$y=u-v$，验证

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

证 $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)$

$$=\frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot 1+\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot 1+\frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot 1+\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot(-1)$$

$=\frac{2y}{x^2+y^2}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$，

故等式成立.

8. 求下列函数的一阶偏导数(其中 f 具有一阶连续偏导数)：

(1) $u=f(x^2-y^2,e^{xy})$； (2) $u=f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$；

(3) $u=f(x,xy,xyz)$.

解 (1) 将中间变量 x^2-y^2,e^{xy}依次编为 1,2 号,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2)+f_2'\cdot\frac{\partial}{\partial x}(e^{xy})=2xf_1'+ye^{xy}f_2',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2)+f_2'\cdot\frac{\partial}{\partial y}(e^{xy})=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'.$$

(2) 令 $s=\frac{x}{y},t=\frac{y}{z}$,则 $u=f(s,t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{1}{y}f_s',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_s'+\frac{1}{z}f_t',$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}f_t'.$$

(3) 将中间变量 x,xy,xyz 依次编为 1,2,3 号,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot y+f_3'\cdot yz=f_1'+yf_2'+yzf_3',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_2'\cdot x+f_3'\cdot xz=xf_2'+xzf_3',$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=f_3'\cdot xy=xyf_3'.$$

9. 设 $z=xy+xF(u)$,而 $u=\frac{y}{x}$,$F(u)$为可导函数,证明

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy.$$

证
$$\begin{aligned}x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}&=x\left[y+F(u)+xF'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+y\left[x+xF'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right]\\&=x\left[y+F(u)-\frac{y}{x}F'(u)\right]+y[x+F'(u)]\\&=xy+xF(u)+xy=z+xy,\end{aligned}$$

故等式成立.

10. 设 $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$,其中 $f(u)$为可导函数,验证

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

证 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y\cdot f_u'\cdot 2x}{f^2(u)}=-\frac{2xyf_u'}{f^2(u)}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f(u)-yf_u'\cdot(-2y)}{f^2(u)}=\frac{1}{f(u)}+\frac{2y^2f_u'}{f^2(u)},$$

故 $$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2yf'_u}{f^2(u)}+\frac{1}{yf(u)}+\frac{2yf'_u}{f^2(u)}=\frac{1}{yf(u)}$$
$$=\frac{z}{y^2}.$$

11. 设 $z=f(x^2+y^2)$,其中 f 具有二阶导数,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解 令 $u=x^2+y^2$,则 $z=f(u)$.

记 $$f'=f'(u),f''=f''(u)$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2xf',$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}=2yf',$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'+2xf''\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2f'+4x^2f'',$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf''\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=4xyf'',$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f'+2yf''\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=2f'+4y^2f''.$$

12. 求下列函数的$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$(其中 f 具有二阶连续偏导数):

(1) $z=f(xy,y)$;　　　(2) $z=f\left(x,\frac{x}{y}\right)$;

(3) $z=f(xy^2,x^2y)$;　　　(4) $z=f(\sin x,\cos y,e^{x+y})$.

解 (1) 令 $s=xy,t=y$,则 $z=f(s,t)$,s 和 t 是中间变量.将 s,t 依次编为1,2号,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\cdot\frac{\partial s}{\partial x}=yf'_1,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_1\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+f'_2\cdot\frac{dt}{dy}=xf'_1+f'_2.$$

因为 $f(s,t)$是 s 和 t 的函数,所以 f'_1 和 f'_2 也是 s 和 t 的函数,从而 f'_1 和 f'_2 是以 s 和 t 为中间变量的 x 和 y 的函数.故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(yf'_1)=yf''_{11}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}=y^2f''_{11},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(yf'_1)=f'_1+y\left(f''_{11}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+f''_{12}\cdot\frac{dt}{dy}\right).$$
$$=f'_1+xyf''_{11}+yf''_{12},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(xf'_1+f'_2)=x\left(f''_{11}\frac{\partial s}{\partial y}+f''_{12}\frac{dt}{dy}\right)+f''_{21}\frac{\partial s}{\partial y}+f''_{22}\frac{dt}{dy}$$
$$=x^2f''_{11}+2xf''_{12}+f''_{22}.$$

(2) 令 $s=x,t=\dfrac{x}{y}$,并将 s,t 依次编为 1,2 号,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}+f'_2\frac{\partial t}{\partial x}=f'_1+\frac{1}{y}f'_2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_2\frac{\partial t}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f'_2.$$

因为 $f(s,t)$是 s 和 t 的函数,所以 f'_1 和 f'_2 也是 s 和 t 的函数,从而 f'_1 和 f'_2 是以 s 和 t 为中间变量的 x 和 y 的函数.故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(f'_1+\frac{1}{y}f'_2\right)=f''_{11}+f''_{12}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{1}{y}\left(f''_{21}+f''_{22}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right)$$

$$=f''_{11}+\frac{2}{y}f''_{12}+\frac{1}{y^2}f''_{22},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(f'_1+\frac{1}{y}f'_2\right)=f''_{12}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}-\frac{1}{y^2}f'_2+\frac{1}{y}f''_{22}\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$=-\frac{x}{y^2}f''_{12}-\frac{1}{y^2}f'_2-\frac{x}{y^3}f''_{22},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{y^2}f'_2\right)=\frac{2x}{y^3}f'_2-\frac{x}{y^2}f''_{22}\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{2x}{y^3}f'_2+\frac{x^2}{y^4}f''_{22}.$$

(3) 令 $s=xy^2,t=x^2y$,并将 s,t 依次编为 1,2 号,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\frac{\partial s}{\partial x}+f'_2\frac{\partial t}{\partial x}=y^2f'_1+2xyf'_2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_1\frac{\partial s}{\partial y}+f'_2\frac{\partial t}{\partial y}=2xyf'_1+x^2f'_2.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(y^2f'_1+2xyf'_2)$$

$$=y^2\left(f''_{11}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+f''_{12}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right)+2yf'_2+2xy\left(f''_{21}\frac{\partial s}{\partial x}+f''_{22}\frac{\partial t}{\partial x}\right)$$

$$=y^2(y^2f''_{11}+2xyf''_{12})+2yf'_2+2xy(y^2f''_{21}+2xyf''_{22})$$

$$=2yf'_2+y^4f''_{11}+4xy^3f''_{12}+4x^2y^2f''_{22},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(y^2f'_1+2xyf'_2)=2yf'_1+y^2\left(f''_{11}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+f''_{12}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}\right)+2xf'_2$$

$$+2xy\left(f''_{21}\frac{\partial s}{\partial y}+f''_{22}\frac{\partial t}{\partial y}\right)=2yf'_1+y^2(2xyf''_{11}+x^2f''_{12})+2xf'_2$$

$$+2xy(2xyf''_{21}+x^2f''_{22})=2yf'_1+2xf'_2+2xy^3f''_{11}+5x^2y^2f''_{12}$$

$$+2x^3yf''_{22},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(2xyf'_1+x^2f'_2)\quad 2xf'_1+2xy\left(f''_{11}\frac{\partial s}{\partial y}+f''_{12}\frac{\partial t}{\partial y}\right)+x^2$$

$$\left(f''_{21}\frac{\partial s}{\partial y}+f''_{22}\frac{\partial t}{\partial y}\right)=2xf'_1+2xy(2xyf''_{11}+x^2f''_{12})+x^2(2xyf''_{21}+x^2f''_{22})$$

$$=2xf'_1+4x^2y^2f''_{11}+4x^3yf''_{12}+x^4f''_{22}.$$

(4) 令 $u=\sin x,v=\cos y,w=e^{x+y}$,并将 u,v,w 依次编为 1,2,3 号,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\frac{du}{dx}+f'_3\frac{\partial w}{\partial x}=\cos xf'_1+e^{x+y}f'_3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_2\frac{dv}{dy}+f'_3\frac{\partial w}{\partial y}=-\sin yf'_2+e^{x+y}f'_3.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(\cos xf'_1+e^{x+y}f'_3)$$

$$=-\sin xf'_1+\cos x\left(f''_{11}\frac{du}{dx}+f''_{13}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+e^{x+y}f'_3+e^{x+y}\left(f''_{31}\frac{du}{dx}+f''_{33}\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$=-\sin xf'_1+\cos x(\cos xf''_{11}+e^{x+y}f''_{13})+e^{x+y}f'_3+e^{x+y}(\cos xf''_{31}+e^{x+y}f''_{33})$$

$$=e^{x+y}f'_3-\sin xf'_1+\cos^2 xf''_{11}+2e^{x+y}\cos xf''_{13}+e^{2(x+y)}f''_{33},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(\cos xf'_1+e^{x+y}f'_3)$$

$$=\cos x\left(f''_{12}\frac{dv}{dy}+f''_{13}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+e^{x+y}f'_3+e^{x+y}\left(f''_{32}\frac{dv}{dy}+f''_{33}\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$=\cos x(-\sin yf''_{12}+e^{x+y}f''_{13})+e^{x+y}f'_3+e^{x+y}(-\sin yf''_{32}+e^{x+y}f''_{33})$$

$$=e^{x+y}f'_3-\cos x\sin yf''_{12}+e^{x+y}\cos xf''_{13}-e^{x+y}\sin yf''_{32}+e^{2(x+y)}f''_{33},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(-\sin yf'_2+e^{x+y}f'_3)$$

$$=-\cos yf'_2-\sin y\left(f''_{22}\frac{dv}{dy}+f''_{23}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+e^{x+y}f'_3+e^{x+y}\left(f''_{32}\frac{dv}{dy}+f''_{33}\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$=-\cos yf'_2-\sin y(-\sin yf''_{22}+e^{x+y}f''_{23})+e^{x+y}f'_3+e^{x+y}(-\sin yf''_{32}+e^{x+y}f''_{33})$$

$$=e^{x+y}f'_3-\cos yf'_2+\sin^2 yf''_{22}-2e^{x+y}\sin yf''_{23}+e^{2(x+y)}f''_{33}.$$

13. 设 $u=f(x,y)$ 的所有二阶偏导数连续,而

$$x=\frac{s-\sqrt{3}t}{2},y=\frac{\sqrt{3}s+t}{2},$$

证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$$

及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

证 因为 $\displaystyle\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial y}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y},$$

所以 $\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

又因为 $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$=\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

习 题 8－5

1．设 $\sin y+e^x-xy^2=0$，求$\frac{dy}{dx}$.

解 设 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，

则 $F_x=e^x-y^2$，$F_y=\cos y-2xy$.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$$

$$=\frac{y^2-e^x}{\cos y-2xy}.$$

2．设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$，求$\frac{dy}{dx}$.

解 设 $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}$，则一阶偏导数分别为

$$F_x=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{x+y}{x^2+y^2},$$

$$F_y=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{y-x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x+y}{x^2+y^2}\Big/\frac{y-x}{x^2+y^2}=\frac{x+y}{x-y}.$$

3．设 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　方法一　设 $F(x,y,z)=x+2y+z-2\sqrt{xyz}$，则

$$F_x=1-\frac{yz}{\sqrt{xyz}},F_y=2-\frac{xz}{\sqrt{xyz}},F_z=1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}.$$

于是
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}.$$

方法二　在所给方程两端分别对 x 求偏导数，并注意 $z=z(x,y)$，得

$$1+\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{\sqrt{xyz}}\left(yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

解得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{yz}{\sqrt{xyz}}-1}{1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}.$$

同理，方程两端分别对 y 求偏导数，得

$$2+\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{1}{\sqrt{xyz}}\left(xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$$

解得
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{xz}{\sqrt{xyz}}-2}{1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}}=\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}.$$

方法三　对所给方程两端分别求全微分，得

$$\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+\mathrm{d}z-\frac{1}{\sqrt{xyz}}(yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z)=0,$$

即
$$\left(1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}\right)\mathrm{d}z=\left(\frac{yz}{\sqrt{xyz}}-1\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{xz}{\sqrt{xyz}}-2\right)\mathrm{d}y$$

解得
$$\mathrm{d}z=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}\mathrm{d}x+\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}\mathrm{d}y.$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}.$$

4. 设$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$,求$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 令 $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$,则

$$F_x=\frac{1}{z},F_y=-\frac{1}{\frac{z}{y}}\cdot\left(-\frac{z}{y^2}\right)=\frac{1}{y},$$

$$F_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{\frac{z}{y}}\cdot\frac{1}{y}=-\frac{x+z}{z^2}.$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{1}{z}\bigg/\left(-\frac{x+z}{z^2}\right)=\frac{z}{x+z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{1}{y}\bigg/\left(-\frac{x+z}{z^2}\right)=\frac{z^2}{y(x+z)}.$$

5. 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$,证明$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

证 设 $F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$,则

$$F_x=2\cos(x+2y-3z)-1,$$

$$F_y=2\cos(x+2y-3z)\cdot2-2=2F_x,$$

$$F_z=2\cos(x+2y-3z)\cdot(-3)+3=-3F_x,$$

故 $$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_x}{F_z}-\frac{F_y}{F_z}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1.$$

6. 设 $x=x(y,z),y=y(x,z),z=z(x,y)$都是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的具有连续偏导数的函数,证明:$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$.

证 因为 $$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x},\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z}{F_y},\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},$$

所以 $$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\cdot\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)\cdot\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)=-1.$$

7. 设 $\Phi(u,v)$具有连续偏导数,证明由方程 $\Phi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$满足 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$.

证 令 $u=cx-az,v=cy-bz$,则

$$\Phi_x=\Phi_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=c\Phi_u,$$

$$\Phi_y = \Phi_v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = c\Phi_v,$$

$$\Phi_z = \Phi_u \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \Phi_v \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = -a\Phi_u - b\Phi_v.$$

故
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\Phi_x}{\Phi_z} = \frac{c\Phi_u}{a\Phi_u + b\Phi_v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\Phi_y}{\Phi_z} = \frac{c\Phi_v}{a\Phi_u + b\Phi_v}.$$

于是
$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = a \cdot \frac{c\Phi_u}{a\Phi_u + b\Phi_v} + b \cdot \frac{c\Phi_v}{a\Phi_u + b\Phi_v} = c.$$

8. 设 $e^z - xyz = 0$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 设 $F(x,y,z) = e^z - xyz$，则 $F_x = -yz, F_z = e^z - xy$.

于是
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{e^z - xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{y\frac{\partial z}{\partial x}(e^z - xy) - yz\left(e^z\frac{\partial z}{\partial x} - y\right)}{(e^z - xy)^2}$$

$$= \frac{y^2 z - yz\left(e^z \cdot \frac{yz}{e^z - xy} - y\right)}{(e^z - xy)^2}$$

$$= \frac{2y^2 z e^z - 2xy^3 z - y^2 z^2 e^z}{(e^z - xy)^3}.$$

9. 设 $z^3 - 3xyz = a^3$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 设 $F(x,y,z) = z^3 - 3xyz - a^3$，则

$$F_x = -3yz, F_y = -3xz, F_z = 3z^2 - 3xy.$$

于是
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{z^2 - xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2 - xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{z^2 - xy}\right)$$

$$= \frac{\left(z + y\frac{\partial z}{\partial y}\right)(z^2 - xy) - yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial y} - x\right)}{(z^2 - xy)^2}$$

$$= \frac{\left(z + \frac{xyz}{z^2 - xy}\right) \cdot (z^2 - xy) - yz\left(\frac{2xz^2}{z^2 - xy} - x\right)}{(z^2 - xy)^2}$$

$$= \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3}.$$

10. 求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数:

(1) 设$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20, \end{cases}$ 求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$;

(2) 设$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$ 求$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$;

(3) 设$\begin{cases} u = f(ux, v + y), \\ v = g(u - x, v^2 y), \end{cases}$ 其中 f, g 具有一阶连续偏导数,求$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$;

(4) 设$\begin{cases} x = \mathrm{e}^u + u\sin v, \\ y = \mathrm{e}^u - u\cos v, \end{cases}$ 求$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解 (1) 分别在两个方程两端对 x 求导,得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2x + 2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \\ 2x + 4y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0. \end{cases}$$

移项,得

$$\begin{cases} 2y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -2x, \\ 2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -x. \end{cases}$$

由于 $$D = \begin{vmatrix} 2y & -1 \\ 2y & 3z \end{vmatrix} = 6yz + 2y \neq 0,$$

解方程组得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\begin{vmatrix} -2x & -1 \\ -x & 3z \end{vmatrix}}{D} = \frac{-6xz - x}{6yz + 2y} = \frac{-x(6z+1)}{2y(3z+1)}.$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\begin{vmatrix} 2y & -2x \\ 2y & -x \end{vmatrix}}{D} = \frac{2xy}{6yz + 2y} = \frac{x}{3z+1}.$$

(2) 所给方程组确定两个一元隐函数:$x = x(z)$和 $y = y(z)$,将所给方程的两端分别对 z 求导并移项,得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = -1, \\ 2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} + 2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = -2z. \end{cases}$$

由于 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2(y - x) \neq 0$,

解方程组得

$$\frac{dx}{dz}=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2z & 2y\end{vmatrix}}{D}=\frac{-2y+2z}{2(y-x)}=\frac{y-z}{x-y},$$

$$\frac{dy}{dz}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2x & -2z\end{vmatrix}}{D}=\frac{-2z+2x}{2(y-x)}=\frac{z-x}{x-y}.$$

(3) 此方程组可以确定两个二元隐函数：$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$.

分别在方程两端对 x 求偏导数，得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'\left(u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+f_2'\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x},\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=g_1'\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-1\right)+2g_2'yv\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{cases}$$

移项整理后得

$$\begin{cases}(xf_1'-1)\dfrac{\partial u}{\partial x}+f_2'\dfrac{\partial v}{\partial x}=-uf_1',\\ g_1'\dfrac{\partial u}{\partial x}+(2yvg_2'-1)\dfrac{\partial v}{\partial x}=g_1'.\end{cases}$$

在 $D=\begin{vmatrix}xf_1'-1 & f_2'\\ g_1' & 2yvg_2'-1\end{vmatrix}=(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'\neq 0$ 的条件下，解方程组得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}-uf_1' & f_2'\\ g_1' & 2yvg_2'-1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{-uf_1'(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'}{(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}xf_1'-1 & -uf_1'\\ g_1' & g_1'\end{vmatrix}=\frac{g_1'(xf_1'+uf_1'-1)}{(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'}.$$

(4) 此方程组确定两个二元隐函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$是已知函数的反函数，令

$$F(x,y,u,v)=x-e^u-u\sin v,$$

$$G(x,y,u,v)=y-e^u+u\cos v.$$

则 $F_x=1, F_y=0, F_u=-e^u-\sin v, F_v=-u\cos v,$

$G_x=0, G_y=1, G_u=-e^u+\cos v, G_v=-u\sin v.$

在 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}-e^u-\sin v & -u\cos v\\ -e^u+\cos v & -u\sin v\end{vmatrix}$

$=ue^u(\sin v-\cos v)+u\neq 0$ 的条件下，

解方程组得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\dfrac{1}{J}\begin{vmatrix}1 & -u\cos v\\0 & -u\sin v\end{vmatrix}$

$$=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}0 & -u\cos v\\1 & -u\sin v\end{vmatrix}$$

$$=\frac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}-e^u-\sin v & 1\\-e^u+\cos v & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\cos v-e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}-e^u-\sin v & 0\\-e^u+\cos v & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\sin v+e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}.$$

11. 设 $y=f(x,t)$，而 $t=t(x,y)$是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的函数，其中 f,F 都具有一阶连续偏导数. 试证明

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}.$$

证法一 由方程组 $\begin{cases}y=f(x,t),\\F(x,y,t)=0\end{cases}$ 可确定两个一元隐函数 $y=y(x)$，$t=t(x)$. 分别在两个方程两端对 x 求导可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x},\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=0.\end{cases}$$

移项得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x},\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\partial F}{\partial x}.\end{cases}$$

由于

$$D=\begin{vmatrix}1 & \dfrac{-\partial f}{\partial t}\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial t}\end{vmatrix}=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0,$$

解方程组，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{D}\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & -\dfrac{\partial f}{\partial t}\\ -\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial t}\end{vmatrix}=\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial y}}$.

证法二 分别在 $y=f(x,t)$ 及 $F(x,y,t)=0$ 两端求全微分，得

$$\begin{cases}\mathrm{d}y=f_x\mathrm{d}x+f_t\mathrm{d}t, & (1)\\ F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_t\mathrm{d}t=0. & (2)\end{cases}$$

由(2)，得 $$F_t\mathrm{d}t=-(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y). \tag{3}$$

将 F_t 乘以(1)式两端，并以(3)式代入，得

$$F_t\mathrm{d}y=f_xF_t\mathrm{d}x-f_t(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y),$$

即 $$(F_t+f_tF_y)\mathrm{d}y=(f_xF_t-f_tF_x)\mathrm{d}x.$$

故 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f_xF_t-f_tF_x}{F_t+f_tF_y}.$$

习 题 8－6

1．求曲线 $x=t-\sin t$，$y=1-\cos t$，$z=4\sin\dfrac{t}{2}$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2}\right)$ 处的切线及法平面方程．

解 点 $\left(\dfrac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2}\right)$ 所对应的参数 $t_0=\dfrac{\pi}{2}$．曲线在该点处的切向量 $\boldsymbol{T}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))=(1,1,\sqrt{2})$．于是曲线在给定点处的切线方程为

$$\frac{x-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

法平面方程为

$$1\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}+1\right)+1\cdot(y-1)+\sqrt{2}(z-2\sqrt{2})=0,$$

即 $$x+y+\sqrt{2}z=\frac{\pi}{2}+4.$$

2．求曲线 $x=\dfrac{t}{1+t}$，$y=\dfrac{1+t}{t}$，$z=t^2$ 在对应于 $t=1$ 的点处的切线及法平面方程．

解 曲线在对应于 $t=1$ 的点为 $\left(\frac{1}{2},2,1\right)$，该点处的切向量 $\boldsymbol{T}=(x'(1),y'(1),z'(1))=\left(\frac{1}{(1+t)^2},-\frac{1}{t^2},2t\right)\Big|_{t=1}=\left(\frac{1}{4},-1,2\right)$，于是曲线在该点处的切线方程为

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2},$$

即
$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{8}.$$

所求法平面方程为

$$\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)-(y-2)+2(z-1)=0,$$

即
$$2x-8y+16z-1=0.$$

3. 求曲线 $y^2=2mx,z^2=m-x$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线及法平面方程.

解 设曲线的参数方程中的参数为 x，将方程 $y^2=2mx$ 和 $z^2=m-x$ 两端分别对 x 求导，得

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2m,2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1,\text{即}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{m}{y},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{2z}.$$

所以曲线在点 (x_0,y_0,z_0) 的切向量为

$$\boldsymbol{T}=\left(1,\frac{m}{y_0},-\frac{1}{2z_0}\right).$$

于是在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\frac{m}{y_0}}=\frac{z-z_0}{-\frac{1}{2z_0}}.$$

法平面方程为 $\quad (x-x_0)+\frac{m}{y_0}(y-y_0)-\frac{1}{2z_0}(z-z_0)=0.$

4. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0,\\2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程.

解 为了求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，在所给方程两端分别对 x 求导，得

$$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}-3=0, \\ 2-3\dfrac{dy}{dx}+5\dfrac{dz}{dx}=0. \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} 2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=-2x+3, \\ 3\dfrac{dy}{dx}-5\dfrac{dz}{dx}=2. \end{cases}$$

由于
$$D=\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=-10y-6z,$$

故解方程组得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} -2x+3 & 2z \\ 2 & -5 \end{vmatrix}=\frac{10x-4z-15}{-10y-6z},$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 2y & -2x+3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=\frac{6x+4y-9}{-10y-6z}.$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1,1)}=\frac{9}{16},\left.\frac{dz}{dx}\right|_{(1,1,1)}=-\frac{1}{16}.$$

于是在点(1,1,1)处的切线方程为$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{\frac{9}{16}}=\dfrac{z-1}{-\frac{1}{16}}$,

即
$$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}.$$

法平面方程为 $(x-1)+\dfrac{9}{16}(y-1)-\dfrac{1}{16}(z-1)=0$,

即
$$16x+9y-z-24=0.$$

5. 求出曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上的点,使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解 因为 $x_t'=1,y_t'=2t,z_t'=3t^2$,设所求点对应的参数为 t_0,于是曲线在该点处的切向量可取为 $\boldsymbol{T}=(1,2t_0,3t_0^2)$. 已知平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$,由切线与平面平行,得 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}=0$,即 $1+4t_0+3t_0^2=0$,解得 $t_0=-1$ 和 $-\dfrac{1}{3}$. 于是所求点为$(-1,1,-1)$或$\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{27}\right)$.

6. 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点(2,1,0)处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x,y,z)=e^z-z+xy-3$,则

$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(y,x,e^z-1),\boldsymbol{n}|_{(2,1,0)}=(1,2,0).$$

点(2,1,0)处的切平面方程为

$$1\cdot(x-2)+2(y-1)+0\cdot(z-0)=0,$$

即
$$x+2y-4=0.$$

点(2,1,0)处的法线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2},\\ z=0.\end{cases}$$

7. 求曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 在点(x_0,y_0,z_0)处的切平面及法线方程

解 令 $F(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2-1$,则曲面在点$(x,y,z)$处的一个法向量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}&=(F_x,F_y,F_z)=(2ax,2by,2cz)\\&=2(ax,by,cz),\end{aligned}$$

在点(x_0,y_0,z_0)处的一个法向量为(ax_0,by_0,cz_0),故在该点处的切平面方程为

$$ax_0(x-x_0)+by_0(y-y_0)+cz_0(z-z_0)=0,$$

即
$$ax_0x+by_0y+cz_0z=ax_0^2+by_0^2+cz_0^2=1.$$

法线方程为
$$\frac{x-x_0}{ax_0}=\frac{y-y_0}{by_0}=\frac{z-z_0}{cz_0}.$$

8. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-1$,则曲面在点(x,y,z)处的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,4y,2z)$.已知平面的法向量为$(1,-1,2)$,由已知平面与所求切平面平行,得

$$\frac{2x}{1}=\frac{4y}{-1}=\frac{2z}{2},\text{即 } x=\frac{1}{2}z,y=-\frac{1}{4}z.$$

代入椭球面方程得
$$\left(\frac{z}{2}\right)^2+2\left(-\frac{z}{4}\right)^2+z^2=1.$$

解得
$$z=\pm2\sqrt{\frac{2}{11}},\text{则 } x=\pm\sqrt{\frac{2}{11}},y=\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}.$$

所以切点为
$$\left(\pm\sqrt{\frac{2}{11}},\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}},\pm2\sqrt{\frac{2}{11}}\right).$$

所求切平面方程为

$$\left(x\pm\sqrt{\frac{2}{11}}\right)-\left(y\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}\right)+2\left(z\pm2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=0,$$

即
$$x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}.$$

9. 求旋转椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点$(-1,-2,3)$处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦.

解 令 $F(x,y,z)=3x^2+y^2+z^2-16$，曲面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(6x,2y,2z),$$

曲面在点$(-1,-2,3)$处的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{n}|_{(-1,-2,3)}=(-6,-4,6)$，$xOy$ 面的法向量为$\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$，记 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角为 r，则所求的余弦值为

$$\cos r=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{6}{\sqrt{6^2+4^2+6^2}\cdot 1}=\frac{3}{\sqrt{22}}.$$

10．试证曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ (a>0)$上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

证 设 $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$，则曲面在点$(x,y,z)$处的一个法向量

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}},\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{1}{2\sqrt{z}}\right).$$

在曲面上任取一点 $M(x_0,y_0,z_0)$，则在点 M 处的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0,$$

即
$$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a},$$

化为截距式，得
$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}}+\frac{y}{\sqrt{ay_0}}+\frac{z}{\sqrt{az_0}}=1,$$

所以截距之和为

$$\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=a.$$

习　题　8－7

1．求函数 $z=x^2+y^2$ 在点$(1,2)$处沿从点$(1,2)$到点$(2,2+\sqrt{3})$的方向的方向导数.

解 按题意，方向 $l=(1,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{e}_l=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

又
$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=4,$$

故
$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,2)}=2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1+2\sqrt{3}.$$

2．求函数 $z=\ln(x+y)$在抛物线 $y^2=4x$ 上点$(1,2)$处，沿着这抛物线在该

点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.

解 先求切线斜率:在 $y^2=4x$ 两端分别对 x 求导,得

$$2y\frac{dy}{dx}=4.$$

于是 $$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{y},\qquad k=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)}=1,$$

切线方向 $l=(1,1)$, $e_l=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

又 $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{1}{x+y}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{1}{x+y}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3}.$$

故 $$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

3. 求函数 $z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$在点$\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$处沿曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在这点的内法线方向的方向导数.

解 先求切线斜率:在$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 两端分别对 x 求导,得

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

于是 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y},\qquad k=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{b}{a},$$

法线斜率为

$$k'=-\frac{1}{k}=\frac{a}{b},$$

内法线方向 $l=(-b,-a)$, $e_l=\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

又 $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{a},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{b}.$$

故 $$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{a}\cdot\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)-\frac{\sqrt{2}}{b}\cdot\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{ab}\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

4. 求函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点(1,1,2)处沿方向角为 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$, $\gamma=\frac{\pi}{3}$的方向的方向导数.

解 因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=y^2-yz,\frac{\partial u}{\partial y}=2xy-xz,\frac{\partial u}{\partial z}=3z^2-xy,$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,2)}=-1,\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,2)}=0,\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,2)}=11.$$

$$\boldsymbol{e}_l=\left(\cos\frac{\pi}{3},\cos\frac{\pi}{4},\cos\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right),$$

所以
$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1,2)}=-1\cdot\frac{1}{2}+0+11\cdot\frac{1}{2}=5.$$

5. 求函数 $u=xyz$ 在点(5,1,2)处沿从点(5,1,2)到点(9,4,14)的方向的方向导数.

解 按题意,方向 $l=(4,3,12),\boldsymbol{e}_l=\left(\frac{4}{13},\frac{3}{13},\frac{12}{13}\right)$.

又
$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz,\frac{\partial u}{\partial y}=xz,\frac{\partial u}{\partial z}=xy,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(5,1,2)}=2,\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(5,1,2)}=10,\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(5,1,2)}=5,$$

故
$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(5,1,2)}=2\cdot\frac{4}{13}+10\cdot\frac{3}{13}+5\cdot\frac{12}{13}=\frac{98}{13}.$$

6. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上点(1,1,1)处,沿曲线在该点的切线正方向(对应于 t 增大的方向)的方向导数.

解 先求曲线在给定点的切线方向:

因为 $x_t'=1,y_t'=2t,z_t'=3t^2,$

所以 曲线在点(1,1,1)处的切线的方向向量可取为 $\boldsymbol{T}=(1,2,3),\boldsymbol{e}_T=\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$.

又
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=2,\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=2,\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=2.$$

故
$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{T}}\right|_{(1,1,1)}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{6}{7}\sqrt{14}.$$

7. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点 (x_0,y_0,z_0) 处,沿球面在该点的外法线方向的方向导数.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$,则 $F_x=2x,F_y=2y,F_z=2z$,于是球面在 (x_0,y_0,z_0) 处的外法线方向向量可取为 $\boldsymbol{l}=(F_x,F_y,F_z)|_{(x_0,y_0,z_0)}=(2x_0,2y_0,2z_0)$,$\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},\cos\beta=\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},\cos\gamma=\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},$$

又 $$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\frac{\partial u}{\partial y}=1,\frac{\partial u}{\partial z}=1.$$

故 $$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$$

$$=1\cdot\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}+1\cdot\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}+1\cdot\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$$

$$=\frac{x_0+y_0+z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$$

$$=x_0+y_0+z_0.$$

8. 设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，求 **grad** $f(0,0,0)$ 及 **grad** $f(1,1,1)$.

解 **grad** $f(x,y,z)=f_x\boldsymbol{i}+f_y\boldsymbol{j}+f_z\boldsymbol{k}=(2x+y+3)\boldsymbol{i}+(4y+x-2)\boldsymbol{j}+(6z-6)\boldsymbol{k}$,

$$\mathbf{grad}\ f(0,0,0)=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k},$$

$$\mathbf{grad}\ f(1,1,1)=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}.$$

9. 设 u,v 都是 x,y,z 的函数，u,v 的各偏导数都存在且连续，证明：

(1) $\mathbf{grad}(u+v)=\mathbf{grad}\ u+\mathbf{grad}\ v$;

(2) $\mathbf{grad}(uv)=v\,\mathbf{grad}\ u+u\,\mathbf{grad}\ v$;

(3) $\mathbf{grad}(u^2)=2u\,\mathbf{grad}\ u$.

证 (1) $$\mathbf{grad}(u+v)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$=\mathbf{grad}\ u+\mathbf{grad}\ v.$$

(2) $$\mathbf{grad}(uv)=\left(\frac{\partial}{\partial x}(uv),\frac{\partial}{\partial y}(uv),\frac{\partial}{\partial z}(uv)\right)$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}v+u\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}v+u\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}v+u\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$=v\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$=v\,\mathbf{grad}\ u+u\,\mathbf{grad}\ v.$$

(3) $$\mathbf{grad}(u^2)=\left(\frac{\partial}{\partial x}u^2,\frac{\partial}{\partial y}u^2,\frac{\partial}{\partial z}u^2\right)$$

$$=2u\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$=2u\,\mathbf{grad}\ u.$$

10. 问函数 $u=xy^2z$ 在点 $P(1,-1,2)$ 处沿什么方向的方向导数最大？并

求此方向导数的最大值.

解 函数 $u=xy^2z$ 在点 $P(1,-1,2)$ 处沿方向 $l=\mathbf{grad}\ f(1,-1,2)$ 的方向导数最大,而

$$\mathbf{grad}\ f(x,y,z)=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=(y^2z,2xyz,xy^2),$$

$$l=\mathbf{grad}\ f(1,-1,2)=(2,-4,1).$$

故方向导数的最大值为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,-1,2)}=|\mathbf{grad}\ f(1,-1,2)|=|(2,-4,1)|=\sqrt{21}.$$

习 题 8-8

1. 求函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases}f_x=4-2x=0,\\ f_y=-4-2y=0,\end{cases}$$

求得驻点 $(2,-2)$.

又 $A=f_{xx}(2,-2)=-2<0$, $B=f_{xy}(2,-2)=0$,

$C=f_{yy}(2,-2)=-2$, $AC-B^2=4>0$,

由判定极值的充分条件知:在点 $(2,-2)$ 处,函数取得极大值 $f(2,-2)=8$.

2. 求函数 $f(x,y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$ 的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases}f_x=(6-2x)(4y-y^2)=0,\\ f_y=(6x-x^2)(4-2y)=0.\end{cases}$$

求得以下五组解:

$$\begin{cases}x_1=0,\\ y_1=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=0,\\ y_2=4,\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=3,\\ y_3=2,\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=6,\\ y_4=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x_5=6,\\ y_5=4.\end{cases}$$

于是,得驻点 $(0,0)$,$(0,4)$,$(3,2)$,$(6,0)$,$(6,4)$.

又 $f_{xx}(x,y)=-2(4y-y^2)$,

$f_{xy}(x,y)=4(3-x)(2-y)$,

$f_{yy}(x,y)=-2(6x-x^2)$.

由判定极值的充分条件知:

在点 $(0,0)$ 处,$A=f_{xx}(0,0)=0$,$B=f_{xy}(0,0)=24$,$C=f_{yy}(0,0)=0$,$AC-B^2=-24^2<0$,故 $f(0,0)$ 不是极值;

在点(0,4)处，$A=f_{xx}(0,4)=0$，$B=f_{xy}(0,4)=-24$，$C=f_{yy}(0,4)=0$，$AC-B^2=-24^2<0$，故 $f(0,4)$不是极值；

在点(3,2)处，$A=f_{xx}(3,2)=-8<0$，$B=f_{xy}(3,2)=0$，$C=f_{yy}(3,2)=-18$，$AC-B^2=144>0$，故函数在点(3,2)处取得极大值，极大值为 $f(3,2)=36$；

在点(6,0)处，$A=f_{xx}(6,0)=0$，$B=f_{xy}(6,0)=-24$，$C=f_{yy}(6,0)=0$，$AC-B^2=-24^2<0$，故 $f(6,0)$不是极值；

在点(6,4)处，$A=f_{xx}(6,4)=0$，$B=f_{xy}(6,4)=24$，$C=f_{yy}(6,4)=0$，$AC-B^2=-24^2<0$，故 $f(6,4)$不是极值.

3. 求函数 $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases} f_x=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0, \\ f_y=e^{2x}(2y+2)=0, \end{cases}$$

求得驻点 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$.

又 $A=f_{xx}\left(\frac{1}{2},-1\right)=2e>0$，$B=f_{xy}\left(\frac{1}{2},-1\right)=0$，$C=f_{yy}\left(\frac{1}{2},-1\right)=2e$，

$AC-B^2=4e^2>0$，

由判定极值的充分条件知，在点$\left(\frac{1}{2},-1\right)$处，函数取得极小值 $f\left(\frac{1}{2},-1\right)=-\frac{e}{2}$.

4. 求函数 $z=xy$ 在适合附加条件 $x+y=1$ 下的极大值.

解 本题属条件极值问题，易将它化为无条件极值问题.

条件 $x+y=1$ 可表示成 $y=1-x$，代入 $z=xy$，则问题化为求 $z=x(1-x)$的极大值.

由 $\frac{dz}{dx}=1-2x=0$，得 $x=\frac{1}{2}$.

又 $\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=\frac{1}{2}}=-2<0$.

由一元函数取得极值的充分条件知：$x=\frac{1}{2}$ 为极大值点，极大值为 $z=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

5. 从斜边之长为 l 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形.

解 设直角三角形的两直角边之长分别为 x,y，则周长

$$S=x+y+l \quad (0<x<l,0<y<l)$$

本题是在 $x^2+y^2=l^2$ 条件下的条件极值问题，作拉格朗日函数

$$L(x,y)=x+y+l+\lambda(x^2+y^2-l^2).$$

令

$$\begin{cases} L_x=1+2\lambda x=0, \\ L_y=1+2\lambda y=0, \end{cases} 得\ x=y=-\frac{1}{2\lambda},$$

代入 $x^2+y^2=l^2$，解得 $\lambda=-\frac{\sqrt{2}}{2l}$，于是 $x=y=\frac{l}{\sqrt{2}}$，$\left(\frac{l}{\sqrt{2}},\frac{l}{\sqrt{2}}\right)$是惟一的驻点，根据问题性质可知这种最大周长的直角三角形一定存在，所以在斜边之长为 l 的一切直角三角形中，周长最大的是等腰直角三角形.

注 条件极值的解法，一般是采用拉格朗日乘数法求解.但要注意利用乘数法所得到的点只是可能极值点，究竟这些点是否极值点以及是极大点还是极小点尚需进一步判断.在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定.在特殊情形下，条件极值问题可化为无条件极值问题求解.

6. 要造一个容积等于定数 k 的长方体无盖水池，应如何选择水池的尺寸，方可使它的表面积最小.

解 设水池的长为 a，宽为 b，高为 c，则水池的表面积为 $A=ab+2ac+2bc(a>0,b>0,c>0)$.

约束条件 $abc=k$.

作拉格朗日函数 $L(a,b,c)=ab+2ac+2bc+\lambda(abc-k)$.

由

$$\begin{cases} L_a=b+2c+\lambda bc=0, \\ L_b=a+2c+\lambda ac=0, \\ L_c=2a+2b+\lambda ab=0, \\ abc=k \end{cases}$$

解得 $a=b=\sqrt[3]{2k}$，$c=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$，$\lambda=-\sqrt[3]{\frac{32}{k}}$.

$\left(\sqrt[3]{2k},\sqrt[3]{2k},\frac{1}{2}\sqrt[3]{2k}\right)$是惟一的驻点，由问题本身可知 A 一定有最小值，所以表面积最小的水池的长和宽都应为$\sqrt[3]{2k}$，高为$\frac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$.

7. 在平面 xOy 上求一点，使它到 $x=0$，$y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三直线的距离平方之和为最小.

解 设所求点为(x,y)，则此点到三直线的距离依次为：$|y|$，$|x|$，$\frac{|x+2y-16|}{\sqrt{5}}$.三距离平方之和为

$$z=x^2+y^2+\frac{1}{5}(x+2y-16)^2.$$

由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+\dfrac{2}{5}(x+2y-16)=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y+\dfrac{4}{5}(x+2y-16)=0\end{cases}$$

求得驻点$\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5}\right)$.由于驻点惟一,根据问题本身可知,距离平方和最小的点必定存在,故所求点即为$\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5}\right)$.

8. 将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体.问矩形的边长各为多少时,才可使圆柱体的体积为最大?

解 设矩形的一边长为 x,则另一边长为$(p-x)$,假设矩形绕长为 $p-x$ 的一边旋转,则旋转所成圆柱体的体积为 $V=\pi x^2(p-x)$.

由 $\dfrac{dV}{dx}=2\pi x(p-x)-\pi x^2=\pi x(2p-3x)=0$,求得驻点为 $x=\dfrac{2}{3}p$.

由于驻点惟一,由题意又可知这种圆柱体一定有最大值,所以当矩形的边长为$\dfrac{2p}{3}$和$\dfrac{p}{3}$时,绕短边旋转所得圆柱体体积最大.

9. 求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体.

解 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$,(x,y,z)是它的内接长方体在第一卦限内的一个顶点,则此长方体的长、宽、高分别为 $2x$、$2y$、$2z$,体积为

$$V=2x\cdot 2y\cdot 2z=8xyz.$$

令
$$L(x,y,z)=8xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-a^2),$$

由 $\begin{cases}L_x=8yz+2\lambda x=0,\\ L_y=8xz+2\lambda y=0,\\ L_z=8xy+2\lambda z=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}4yz+\lambda x=0,\\ 4xz+\lambda y=0,\\ 4xy+\lambda z=0,\end{cases}$

解得 $x=y=z=-\dfrac{\lambda}{4}$,代入 $x^2+y^2+z^2=a^2$,解得 $\lambda=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}a$,故$\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$为惟一驻点,由题意可知满足题意的长方体必有最大体积,所以当长方体的长、宽、高都为$\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$时其体积最大.

10. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆,求原点到这椭圆的最长与最短距离.

解 设椭圆上的点为(x,y,z),则原点到椭圆上的点的距离平方为

$$d^2=x^2+y^2+z^2.$$

x,y,z 满足条件：$z=x^2+y^2, x+y+z=1$.

作拉格朗日函数

$$L=x^2+y^2+z^2+\lambda(z-x^2-y^2)+\mu(x+y+z-1).$$

令

$$\begin{cases} L_x=2x-2\lambda x+\mu=0, & (1)\\ L_y=2y-2\lambda y+\mu=0, & (2)\\ L_z=2z+\lambda+\mu=0. & (3)\end{cases}$$

(1) − (2)，得 $$(1-\lambda)(x-y)=0.$$

故有　$\lambda=1$ 或 $x=y$.

由 $\lambda=1\Rightarrow\mu=0, z=-\dfrac{1}{2}$，不合题意，故舍去.

将 $x=y$ 代入 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=1$，得

$$z=2x^2, 2x+z=1 \quad\Rightarrow\quad 2x^2+2x-1=0.$$

解得 $$x=y=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}, z=2\mp\sqrt{3}.$$

于是得到两个驻点：

$$M_1\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}\right), M_2\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3}\right).$$

它们是两个可能的极值点，由题意可知这种距离的最大值和最小值一定存在，所以距离的最大值和最小值分别在这两点处取得. 而

$$d^2=x^2+y^2+z^2,$$

$$2\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right)^2+(2\mp\sqrt{3})^2=9\mp5\sqrt{3},$$

故最长与最短距离分别为

$$d_{\max}=d_{M_2}=\sqrt{9+5\sqrt{3}}, d_{\min}=d_{M_1}=\sqrt{9-5\sqrt{3}}.$$

*习　题　8－9

1. 求函数 $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ 在点 $(1,-2)$ 的泰勒公式.

解　$f(1,-2)=5, f_x(1,-2)=(4x-y-6)|_{(1,-2)}=0,$

$f_y(1,-2)=(-x-2y-3)|_{(1,-2)}=0,$

$f_{xx}(1,-2)=4, f_{xy}(1,-2)=-1, f_{yy}(1,-2)=-2.$

函数为 2 次多项式，3 阶及 3 阶以上的各偏导数均为零.

又 $$h=x-1, k=y+2.$$

将以上各项代入泰勒公式，便得

$$f(x,y)=f(1,-2)+(x-1)f_x(1,-2)+(y+2)f_y(1,-2)$$

$$+\frac{1}{2!}[(x-1)^2f_{xx}(1,-2)+2(x-1)(y+2)f_{xy}(1,-2)+(y+2)^2f_{yy}(1,-2)]$$

$$=5+\frac{1}{2}[4(x-1)^2-2(x-1)(y+2)-2(y+2)^2]$$

$$=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2.$$

2. 求函数 $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$在点(0,0)的三阶泰勒公式.

解 $f_x(x,y)=e^x\ln(1+y)$, $\qquad f_y(x,y)=\dfrac{e^x}{1+y}$,

$f_{xx}(x,y)=e^x\ln(1+y)$, $\qquad f_{xy}(x,y)=\dfrac{e^x}{1+y}$,

$f_{yy}(x,y)=-\dfrac{e^x}{(1+y)^2}$, $\qquad f_{xxx}(x,y)=e^x\ln(1+y)$,

$f_{yyy}(x,y)=\dfrac{2e^x}{(1+y)^3}$.

于是 $\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)=hf_x(0,0)+kf_y(0,0)=k$,

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(0,0)=h^2f_{xx}(0,0)+2hkf_{xy}(0,0)+k^2f_{yy}(0,0)=2hk-k^2,$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3f(0,0)=h^3f_{xxx}(0,0)+3h^2kf_{xxy}(0,0)+3hk^2f_{xyy}(0,0)+k^3f_{yyy}(0,0)=3h^2k-3hk^2+2k^3.$$

又 $\qquad f(0,0)=0, h=x, k=y.$

将以上各项代入三阶泰勒公式，便得

$$e^x\ln(1+y)=y+\frac{1}{2!}(2xy-y^2)+\frac{1}{3!}(3x^2y-3xy^2+2y^3)+R_3,$$

其中 $R_3=\dfrac{1}{4!}\left[\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^4f(\theta h,\theta k)\right]_{h=x,k=y}$

$$=\frac{e^{\theta x}}{24}\left[x^4\ln(1+\theta y)+\frac{4x^3y}{1+\theta y}-\frac{6x^2y^2}{(1+\theta y)^2}+\frac{8xy^3}{(1+\theta y)^3}-\frac{6y^4}{(1+\theta y)^4}\right],$$

$$(0<\theta<1).$$

3. 求函数 $f(x,y)=\sin x\sin y$ 在点$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$的二阶泰勒公式.

解 $f_x(x,y)=\cos x\sin y$, $\qquad f_y(x,y)=\sin x\cos y$,

$$f_{xx}(x,y) = -\sin x\sin y,\quad f_{xy}(x,y)=\cos x\cos y,$$

$$f_{yy}(x,y) = -\sin x\sin y,\quad f_{xxx}(x,y) = -\cos x\sin y,$$

$$f_{xxy}(x,y) = -\sin x\cos y,\quad f_{xyy}(x,y) = -\cos x\sin y,$$

$$f_{yyy}(x,y) = -\sin x\cos y.$$

于是 $\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)=hf_x\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)+kf_y\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}h+\dfrac{1}{2}k,$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=h^2 f_{xx}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)+2hkf_{xy}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$$
$$+k^2 f_{yy}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}h^2+hk-\frac{1}{2}k^2,$$

又
$$f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2},h=x-\frac{\pi}{4},k=y-\frac{\pi}{4}.$$

将以上各项代入二阶泰勒公式,便得

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2!}\left[-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]+R_2$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\left[\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\right.$$
$$\left.-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]+R_2,$$

其中 $R_2=\dfrac{1}{3!}\left[\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(\xi,\eta)\right]_{h=x-\frac{\pi}{4},k=y-\frac{\pi}{4}}$

$$=-\frac{1}{6}\left[\cos\xi\sin\eta\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+3\sin\xi\cdot\cos\eta\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\left(y-\frac{\pi}{4}\right)\right.$$
$$\left.+3\cos\xi\sin\eta\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2+\sin\xi\cos\eta\cdot\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^3\right],$$

$\xi=\dfrac{\pi}{4}+\theta\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right),\eta=\dfrac{\pi}{4}+\theta\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right),0<\theta<1.$

4. 利用函数 $f(x,y)=x^y$ 的三阶泰勒公式,计算 $1.1^{1.02}$ 的近似值.

解 先求函数 $f(x,y)=x^y$ 在点(1,1)的三阶泰勒公式.

$$f_x(1,1)=yx^{y-1}|_{(1,1)}=1,\quad f_y(1,1)=x^y\ln x|_{(1,1)}=0,$$

$$f_{xx}(1,1)=y(y-1)x^{y-2}|_{(1,1)}=0,$$

$$f_{xy}(1,1)=(x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x)|_{(1,1)}=1,$$

$$f_{yy}(1,1)=x^y\ln^2 x|_{(1,1)}=0,f_{xxx}(1,1)=y(y-1)(y-2)x^{y-3}|_{(1,1)}=0,$$

$$f_{xxy}(1,1)=[(2y-1)x^{y-2}+y(y-1)x^{y-2}\ln x]|_{(1,1)}=1,$$

$$f_{xyy}(1,1)=[2x^{y-1}\ln x+yx^{y-1}\ln^2 x]|_{(1,1)}=0,$$

$$f_{yyy}(1,1)=x^y\ln^3 x|_{(1,1)}=0.$$

又 $$f(1,1)=1,h=x-1,k=y-1.$$

将以上各项代入三阶泰勒公式,便得

$$x^y=1+(x-1)+\frac{1}{2!}[2(x-1)(y-1)]+\frac{1}{3!}[3(x-1)^2(y-1)]+R_3$$

$$=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)+R_3.$$

因此 $1.1^{1.02}\approx 1+0.1+0.1\times 0.02+\frac{1}{2}\times 0.1^2\times 0.02$

$$=1+0.1+0.002+0.000\ 1=1.102\ 1.$$

5. 求函数 $f(x,y)=e^{x+y}$ 在点(0,0)的 n 阶泰勒公式.

解 $f(0,0)=1,f_x(0,0)=e^{x+y}|_{(0,0)}=1,f_y(0,0)=e^{x+y}|_{(0,0)}=1,\cdots,$ $f^{(n)}_{x^m y^{n-m}}(0,0)=e^{x+y}|_{(0,0)}=1\quad(m=0,1,\cdots,n).$

又 $$h=x,k=y.$$

将以上各项代入 n 阶泰勒公式,便得

$$e^{x+y}=1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x^2+2xy+y^2)+\frac{1}{3!}(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}(x+y)^n+R_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x+y)^k}{k!}+R_n,$$

其中 $$R_n=\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta(x+y)}(0<\theta<1).$$

*习 题 8-10

1. 某种合金的含铅量百分比(%)为 p,其熔解温度℃为 θ,由实验测得 p 与 θ 的数据如下表:

p/(%)	36.9	46.7	63.7	77.8	84.0	87.5	
θ/℃	181	197	235	270	283	292	

试用最小二乘法建立 θ 与 p 之间的经验公式 $\theta=ap+b$.

解 设 M 是各个数据的偏差平方和,即

$$M=\sum_{i=1}^{6}[\theta_i-(ap_i+b)]^2.$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial a}=-\sum\limits_{i=1}^{6}2p_i[\theta_i-(ap_i+b)]=0,\\ \dfrac{\partial M}{\partial b}=-\sum\limits_{i=1}^{6}2[\theta_i-(ap_i+b)]=0.\end{cases}$$

整理,得

$$\begin{cases}a\sum\limits_{i=1}^{6}p_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{6}p_i=\sum\limits_{i=1}^{6}\theta_ip_i,\\ a\sum\limits_{i=1}^{6}p_i+6b=\sum\limits_{i=1}^{6}\theta_i.\end{cases}$$

计算,得 $\sum\limits_{i=1}^{6}p_i^2=28\ 365.28,\ \sum\limits_{i=1}^{6}p_i=396.6,$

$$\sum_{i=1}^{6}\theta_ip_i=101\ 176.3,\ \sum_{i=1}^{6}\theta_i=1\ 458.$$

代入方程组,得

$$\begin{cases}28\ 365.28a+396.6b=101\ 176.3,\\ 396.6a+6b=1\ 458.\end{cases}$$

解得 $a=\dfrac{4\ 802.5}{2\ 150.02}=2.234,$

$$b=\frac{572.0}{6}=95.33.$$

所以经验公式为 $\theta=2.234p+95.33$.

2. 已知一组实验数据为$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$. 现若假定经验公式是

$$y=ax^2+bx+c.$$

试按最小二乘法建立 a、b、c 应满足的三元一次方程组.

解 设 M 是各个数据的偏差平方和,即

$$M=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]^2.$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial a}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]\cdot x_i^2=0,\\ \dfrac{\partial M}{\partial b}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]\cdot x_i=0,\\ \dfrac{\partial M}{\partial c}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]=0.\end{cases}$$

整理，得 a、b、c 应满足的三元一次方程组如下：

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^4+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+nc=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i. \end{cases}$$

总习题八

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内：

(1) $f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分是 $f(x,y)$ 在该点连续的______条件. $f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续是 $f(x,y)$ 在该点可微分的______条件.

(2) $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点可微分的______条件. $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分是函数在该点的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在的______条件.

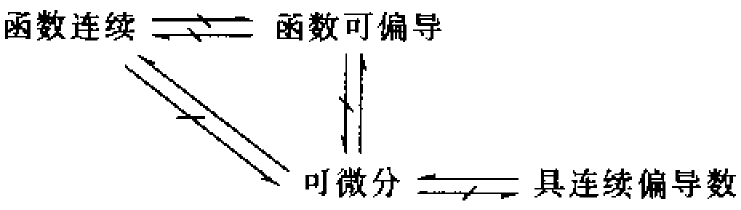
(3) $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 存在且连续是 $f(x,y)$ 在该点可微分的______条件.

(4) 函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续是这两个二阶混合偏导数在 D 内相等的______条件.

解 (1) 充分，必要. (2) 必要，充分.

(3) 充分. (4) 充分.

注 本题结果给出了二元函数连续、可偏导（两个偏导数均存在）、可微及具有连续偏导数之间的联系，用图表可表示为



2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论：

设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义，且 $f_x(0,0)=3, f_y(0,0)=-1$，则有______.

(A) $dz|_{(0,0)}=3dx-dy$.

(B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个法向量为 $(3,-1,1)$.

(C) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $(1,0,3)$.

(D) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $(3,0,1)$.

解 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个偏导数存在，不一定可微分，故(A)不对.

曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的一个法向量是 $(3,-1,-1)$，而不是 $(3,-1,1)$，故(B)不对.

取 x 为参数，则曲线 $x=x, y=0, z=f(x,0)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的一个切向量为 $(1,0,3)$，故(C)正确.

3. 求函数 $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域，并求 $\lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},0\right)} f(x,y)$.

解 函数的定义域为 $D=\{(x,y)\,|\,0<x^2+y^2<1, y^2\leqslant 4x\}$.

因为点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)\in D$，$f(x,y)$ 为初等函数，

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},0\right)} f(x,y)=f\left(\dfrac{1}{2},0\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{\ln\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\ln 3-\ln 4}$.

4. 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

证 取两条趋于 $(0,0)$ 的路径，$c_1: x=0, c_2: y^2=x$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in c_1}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=0;$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in c_2}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y^2=x}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}.$$

由于 (x,y) 分别沿 c_1、c_2 趋于 $(0,0)$ 时 $f(x,y)$ 的极限不相等，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

5. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

求 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$.

解 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

当 $x^2+y^2=0$ 时,

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

故

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

6. 求下列函数的一阶和二阶偏导数:

(1) $z=\ln(x+y^2)$;　　(2) $z=x^y$.

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x+y^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{1}{(x+y^2)^2},$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(x+y^2)-4y^2}{(x+y^2)^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+y^2}\right)=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}.$$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2},$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1})=x^{y-1}+y\cdot x^{y-1}\ln x.$$

7. 求函数 $z=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.01,\Delta y=0.03$ 时的全增量和全微分.

解 $\Delta z=\dfrac{(2.01)\cdot(1.03)}{(2.01)^2-(1.03)^2}-\dfrac{2}{3}=0.02.$

又 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(y^3+x^2y)}{(x^2-y^2)^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3+xy^2}{(x^2-y^2)^2},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}=-\frac{5}{9},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}=\frac{10}{9}.$$

故 $$\mathrm{d}z\Big|_{\substack{x=2,\Delta x=0.01\\ y=1,\Delta y=0.03}}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}\cdot\Delta x+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}\cdot\Delta y=0.03.$$

8. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

证明：$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续且偏导数存在，但不可微分.

证 因为 $$0\leqslant\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\leqslant\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0,$$

所以 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$$

又 $f(0,0)=0$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$，即 $f(x,y)$在点$(0,0)$处连续.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

$$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\frac{(\Delta x)^2\cdot(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}},$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{\dfrac{(\Delta x)^2\cdot(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}}{\rho}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^4}{[2(\Delta x)^2]^2}=\frac{1}{4}\neq 0,$$

故 $f(x,y)$在点$(0,0)$处偏导数存在，但不可微分.

9. 设 $u=x^y$，而 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$都是可微函数，求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=yx^{y-1}\cdot\varphi'(t)+x^y\ln x\cdot\psi'(t).$$

10. 设 $z=f(u,v,w)$具有连续偏导数，而

$$u=\eta-\zeta,\ v=\zeta-\xi,\ w=\xi-\eta,$$

求$\dfrac{\partial z}{\partial\xi},\dfrac{\partial z}{\partial\eta},\dfrac{\partial z}{\partial\zeta}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial\xi}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial\xi}=-\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial w},$$

$$\frac{\partial z}{\partial\eta}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial\eta}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial w},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial \zeta}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial \zeta}=-\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}.$$

11. 设 $z=f(u,x,y)$，$u=xe^y$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f_x=f_u\cdot e^y+f_x$，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(f_u\cdot e^y+f_x)=\left(\frac{\partial}{\partial y}f_u\right)\cdot e^y+f_u\cdot e^y+\frac{\partial}{\partial y}f_x\\&=\left(f_{uu}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f_{uy}\right)e^y+f_u\cdot e^y+\left(f_{xu}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f_{xy}\right)\\&=(f_{uu}\cdot xe^y+f_{uy})e^y+f_u\cdot e^y+f_{xu}\cdot xe^y+f_{xy}\\&=xe^{2y}f_{uu}+e^yf_{uy}+xe^yf_{xu}+f_{xy}+e^yf_u.\end{aligned}$$

12. 设 $x=e^u\cos v$，$y=e^u\sin v$，$z=uv$. 试求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}$.

分别在 $x=e^u\cos v$，$y=e^u\sin v$ 的两端对 x 求偏导数，得

$$\begin{cases}e^u\cos v\dfrac{\partial u}{\partial x}-e^u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial x}=1,\\[2mm] e^u\sin v\dfrac{\partial u}{\partial x}+e^u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0.\end{cases}$$

由以上方程组解得 $\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-u}\cos v$，$\frac{\partial v}{\partial x}=-e^{-u}\sin v$.

从而
$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-u}(v\cos v-u\sin v).$$

同理
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}.$$

分别在 $x=e^u\cos v$，$y=e^u\sin v$ 的两端对 y 求偏导数，得

$$\begin{cases}e^u\cos v\dfrac{\partial u}{\partial y}-e^u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\[2mm] e^u\sin v\dfrac{\partial u}{\partial y}+e^u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial y}=1.\end{cases}$$

由以上方程组解得 $\frac{\partial u}{\partial y}=e^{-u}\sin v$，$\frac{\partial v}{\partial y}=e^{-u}\cos v$.

从而
$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-u}(u\cos v+v\sin v).$$

13. 求螺旋线 $x=a\cos\theta$，$y=a\sin\theta$，$z=b\theta$ 在点$(a,0,0)$处的切线及法平面方程.

解 $\dfrac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta,\quad \dfrac{dy}{d\theta}=a\cos\theta,\quad \dfrac{dz}{d\theta}=b.$

点$(a,0,0)$所对应的参数 $\theta=0$,故曲线在给定点的切向量

$$\boldsymbol{T}=(0,a,b).$$

于是切线方程为

$$\frac{x-a}{0}=\frac{y}{a}=\frac{z}{b},$$

即

$$\begin{cases}x=a,\\ by-az=0.\end{cases}$$

法平面方程为

$$a(y-0)+b(z-0)=0,$$

即

$$ay+bz=0.$$

14. 在曲面 $z=xy$ 上求一点,使这点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$,并写出这法线的方程.

解 设所求点为 $M(x_0,y_0,z_0)$,曲面在该点处的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(y_0,x_0,-1)$,平面的法向量为$(1,3,1)$.

按题意,$\boldsymbol{n}$ 垂直于平面,故有

$$\frac{y_0}{1}=\frac{x_0}{3}=\frac{-1}{1}.$$

求得 $x_0=-3,y_0=-1,z_0=x_0y_0=3$.于是所求点为 $M(-3,-1,3)$,法线方程为

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

15. 设 $\boldsymbol{e}_l=(\cos\theta,\sin\theta)$,求函数

$$f(x,y)=x^2-xy+y^2$$

在点$(1,1)$沿方向 l 的方向导数,并分别确定角 θ,使这导数有(1)最大值,(2)最小值,(3)等于0.

解 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x-y,\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}=-x+2y,$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=1,\qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=1.$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}\cos\theta+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}\sin\theta=\cos\theta+\sin\theta.$$

因为 $$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right),$$

所以(1)当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$时,方向导数最大,其最大值为$\sqrt{2}$.

(2) 当 $\theta=\frac{5}{4}\pi$ 时，方向导数最小，其最小值为 $-\sqrt{2}$.

(3) 当 $\theta=\frac{3}{4}\pi$ 或 $\frac{7}{4}\pi$ 时，方向导数为 0.

16. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $M_0\ (x_0,y_0,z_0)$ 处沿外法线方向的方向导数.

解 椭球面在点 M_0 处的沿外法线方向的一个向量为 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right)$，

$$\boldsymbol{e}_n=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right).$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}\left(2x_0\cdot\frac{x_0}{a^2}+2y_0\cdot\frac{y_0}{b^2}+2z_0\cdot\frac{z_0}{c^2}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}.$$

17. 求平面 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点.

解 设交线上的点为 $M(x,y,z)$，它到 xOy 面上距离的平方为 z^2. 问题就成为求函数 z^2 在约束条件 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和 $x^2+y^2=1$ 下的最小值问题. 作拉格朗日函数

$$L=z^2+\lambda\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1\right)+\mu(x^2+y^2-1).$$

令

$$\begin{cases} L_x=\frac{\lambda}{3}+2\mu x=0, \\ L_y=\frac{\lambda}{4}+2\mu y=0, \\ L_z=2z+\frac{\lambda}{5}=0. \end{cases}$$

又由约束条件，有

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1,$$

$$x^2+y^2=1.$$

解此方程组，得 $x=\frac{4}{5}, y=\frac{3}{5}, z=\frac{35}{12}$. 于是，得可能极值点 $M_0\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12}\right)$. 由问题本身可知，距离最短的点必定存在，因此 M_0 就是所求的点.

18. 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小. 求这切平面的切点，并求此最小体积.

解 设切点为 $M(x_0,y_0,z_0)$, $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$,

$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right).$$

曲面在点 M 处的切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0,$$

即
$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1.$$

于是，切平面在三个坐标轴上的截距依次为 $\frac{a^2}{x_0},\frac{b^2}{y_0},\frac{c^2}{z_0}$，切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积为

$$V=\frac{1}{6}\cdot\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}.$$

在 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的条件下，求 V 的最小值，即求分母 xyz 的最大值. 作拉格朗日函数

$$L(x,y,z)=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right).$$

令

$$\begin{cases} L_x=yz+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0, & (1)\\ L_y=xz+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0, & (2)\\ L_z=xy+\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0. & (3)\end{cases}$$

$(1)\cdot x+(2)\cdot y+(3)\cdot z$，并由约束条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，得

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3},$$

从而

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}}, y=\frac{b}{\sqrt{3}}, z=\frac{c}{\sqrt{3}}.$$

于是，得可能极值点 $M\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$. 由此问题的性质知，所求的切点为 $M\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$，四面体的最小体积为

$$V_{\text{最小}}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc.$$

第九章 重 积 分

习 题 9－1

1. 设有一平面薄板(不计其厚度),占有 xOy 面上的闭区域 D,薄板上分布有面密度为 $\mu=\mu(x,y)$ 的电荷,且 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续,试用二重积分表达该板上的全部电荷 Q.

解 用一组曲线网将 D 分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_i$,其面积也记为 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$.任取一点 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$,则 $\Delta\sigma_i$ 上分布的电量 $\Delta Q_i\approx\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.通过求和、取极限,便得到该板上的全部电荷为

$$Q=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\iint_D\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\sigma_i$ 的直径$\}$.

注 以上解题过程可用所谓的元素法简化叙述如下:

设想用曲线网将 D 分成 n 个小闭区域,取出其中任意一个记作 $\mathrm{d}\sigma$(其面积也记作 $\mathrm{d}\sigma$),(x,y)为 $\mathrm{d}\sigma$ 上一点,则 $\mathrm{d}\sigma$ 上分布的电荷近似等于$\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$,记作

$$\mathrm{d}Q=\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma\quad(\text{称为电荷元素}),$$

以 $\mathrm{d}Q$ 作为被积表达式,在 D 上作重积分,即得所求的电荷为

$$Q=\iint_D\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

2. 设 $I_1=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$ 其中 $D_1=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,-2\leqslant y\leqslant 2\}$;

又 $I_2=\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$ 其中 $D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

试利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 之间的关系.

解 由二重积分的几何意义知,I_1 表示底为 D_1、顶为曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 的曲顶柱体 Ω_1 的体积;I_2 表示底为 D_2、顶为曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 的曲顶柱体 Ω_2 的体积(图 9－1).由于位于 D_1 上方的曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 关于 yOz 面和 zOx 面均对称,故 yOz 面和 zOx 面将Ω_1 分成四个等积的部分,其中位于第一卦限的部分即为 Ω_2.由此可知

$$I_1 = 4I_2.$$

注 (1) 本题也可利用被积函数和积分区域的对称性来解答. 设 $D_3 = \{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, -2\leqslant y\leqslant 2\}$. 由于 D_1 关于 y 轴对称,被积函数 $(x^2+y^2)^3$ 关于 x 是偶函数,故

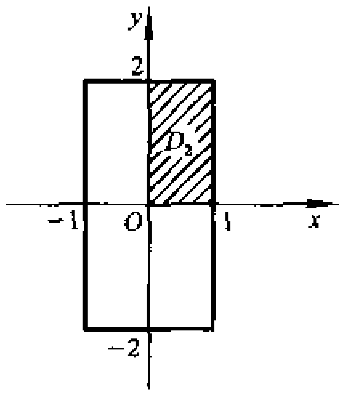


图 9-1

$$I_1 = \iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma = 2\iint\limits_{D_3}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma.$$

又由于 D_3 关于 x 轴对称,被积函数 $(x^2+y^2)^3$ 关于 y 是偶函数,故

$$\iint\limits_{D_3}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma = 2\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma = 2I_2.$$

从而得

$$I_1 = 4I_2.$$

(2) 利用对称性来计算二重积分还有以下两个结论值得注意:

如果积分区域 D 关于 x 轴对称,而被积函数 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数,即 $f(x,-y) = -f(x,y)$,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0;$$

如果积分区域 D 关于 y 轴对称,而被积函数 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数,即 $f(-x,y) = -f(x,y)$,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0.$$

3. 利用二重积分定义证明:

(1) $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = \sigma$ (其中 σ 为 D 的面积);

(2) $\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ (其中 k 为常数);

(3) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$,

其中 $D = D_1\cup D_2$, D_1、D_2 为两个无公共内点的闭区域.

证 (1) 由于被积函数 $f(x,y)\equiv 1$,故由二重积分定义得

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i \\ &= \lim_{\lambda\to 0}\sigma = \sigma.\end{aligned}$$

(2) $\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}kf(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

$$=k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(3) 因为函数 $f(x,y)$在闭区域 D 上可积,故不论把 D 怎样分割,积分和的极限总是不变的.因此在分割 D 时,可以使 D_1 和 D_2 的公共边界永远是一条分割线.这样 $f(x,y)$在 $D_1\cup D_2$ 上的积分和就等于 D_1 上的积分和加 D_2 上的积分和,记为

$$\sum_{D_1\cup D_2}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\sum_{D_1}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i+\sum_{D_2}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

令所有 $\Delta\sigma_i$ 的直径的最大值$\lambda\to 0$,上式两端同时取极限,即得

$$\iint_{D_1\cup D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

4. 根据二重积分的性质,比较下列积分的大小:

(1) $\iint\limits_D(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}\sigma$,其中积分区域 D 是由 x 轴、y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成;

(2) $\iint\limits_D(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}\sigma$,其中积分区域 D 是由圆周$(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成;

(3) $\iint\limits_D\ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D[\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是三角形闭区域,三顶点分别为(1,0),(1,1),(2,0);

(4) $\iint\limits_D\ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D[\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 3\leqslant x\leqslant 5,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

解 (1) 在积分区域 D 上,$0\leqslant x+y\leqslant 1$,故有

$$(x+y)^3\leqslant(x+y)^2.$$

根据二重积分的性质 5,可得

$$\iint_D(x+y)^3\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D(x+y)^2\mathrm{d}\sigma.$$

(2) 由于积分区域 D 位于半平面$\{(x,y)\mid x+y\geqslant 1\}$内,故在 D 上有 $(x+y)^2\leqslant(x+y)^3$.从而 $\iint\limits_D(x+y)^2\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}\sigma$.

(3) 由于积分区域 D 位于条形区域$\{(x,y)\mid 1\leqslant x+y\leqslant 2\}$内,故知区域 D

上的点满足$0\leqslant\ln(x+y)\leqslant1$,从而有$[\ln(x+y)]^2\leqslant\ln(x+y)$.

因此 $$\iint\limits_D[\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_D\ln(x+y)\mathrm{d}\sigma.$$

(4) 由于积分区域 D 位于半平面$\{(x,y)\mid x+y\geqslant e\}$内,故在 D 上有$\ln(x+y)\geqslant1$,从而$[\ln(x+y)]^2\geqslant\ln(x+y)$.

因此 $$\iint\limits_D[\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma\geqslant\iint\limits_D\ln(x+y)\mathrm{d}\sigma.$$

5. 利用二重积分的性质估计下列积分的值:

(1) $I=\iint\limits_D xy(x+y)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1\}$;

(2) $I=\iint\limits_D\sin^2x\sin^2y\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$;

(3) $I=\iint\limits_D(x+y+1)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant2\}$;

(4) $I=\iint\limits_D(x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant4\}$.

解 (1) 在积分区域 D 上,$0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1$,从而$0\leqslant xy(x+y)\leqslant2$,又 D 的面积等于1,因此

$$0\leqslant\iint\limits_D xy(x+y)\mathrm{d}\sigma\leqslant2.$$

(2) 在积分区域 D 上,$0\leqslant\sin x\leqslant1,0\leqslant\sin y\leqslant1$,从而$0\leqslant\sin^2x\sin^2y\leqslant1$,又 D 的面积等于 π^2,因此

$$0\leqslant\iint\limits_D\sin^2x\sin^2y\mathrm{d}\sigma\leqslant\pi^2.$$

(3) 在积分区域 D 上有$1\leqslant x+y+1\leqslant4$,$D$ 的面积等于2,因此

$$2\leqslant\iint\limits_D(x+y+1)\mathrm{d}\sigma\leqslant8.$$

(4) 因为在积分区域 D 上有$0\leqslant x^2+y^2\leqslant4$,所以有

$$9\leqslant x^2+4y^2+9\leqslant4(x^2+y^2)+9\leqslant25,$$

又 D 的而积等于 4π,因此

$$36\pi\leqslant\iint\limits_D(x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma\leqslant100\pi.$$

习　题　9－2

1. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\,|\,|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$;

(2) $\iint\limits_D (3x+2y)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由两坐标轴及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域;

(3) $\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$;

(4) $\iint\limits_D x\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是顶点分别为$(0,0)$,$(\pi,0)$和(π,π)的三角形闭区域.

解 (1)

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-1}^{1}\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(2x^2+\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}.$$

(2) D 可用不等式表示为

$$0\leqslant y\leqslant 2-x,\quad 0\leqslant x\leqslant 2.$$

于是

$$\iint\limits_D (3x+2y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}(3x+2y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^2[3xy+y^2]_0^{2-x}\mathrm{d}x=\int_0^2(4+2x-2x^2)\mathrm{d}x=\frac{20}{3}.$$

(3)

$$\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\left[\frac{x^4}{4}+x^3y+y^3x\right]_0^1\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\frac{1}{4}+y+y^3\right)\mathrm{d}y=1.$$

(4) D 可用不等式表示为

$$0\leqslant y\leqslant x,\quad 0\leqslant x\leqslant \pi.$$

于是

$$\iint\limits_D x\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x\int_0^{x}\cos(x+y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{\pi}x[\sin(x+y)]_0^{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}x(\sin 2x-\sin x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\pi}x\mathrm{d}\left(\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)$$
$$=\left[x\left(\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left(\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left(-1-\frac{1}{2}\right)-0=-\frac{3}{2}\pi.$$

2. 画出积分区域,并计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D x\sqrt{y}\,\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint\limits_D xy^2\,\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域;

(3) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$;

(4) $\iint\limits_D (x^2+y^2-x)\,\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由直线 $y=2$, $y=x$ 及 $y=2x$ 所围成的闭区域.

解 (1) D 可用不等式表示为

$$x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x},0\leqslant x\leqslant 1(\text{图 } 9-2).$$

于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x\sqrt{y}\,\mathrm{d}\sigma&=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\sqrt{y}\,\mathrm{d}y\\&=\frac{2}{3}\int_0^1 x\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_0^1\left(x^{\frac{7}{4}}-x^4\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{6}{55}.\end{aligned}$$

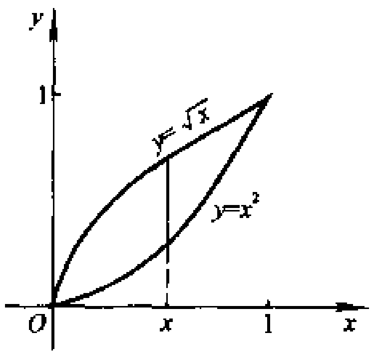


图 9-2

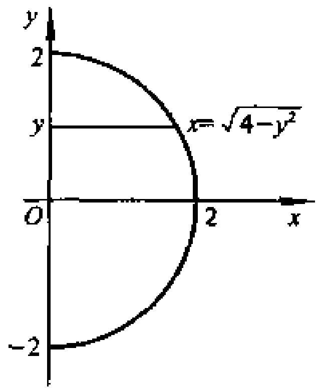


图 9-3

(2) D 可用不等式表示为

$$0\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2},-2\leqslant y\leqslant 2(\text{图 } 9-3),$$

故

$$\iint\limits_D xy^2\,\mathrm{d}\sigma=\int_{-2}^{2}y^2\,\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{4-y^2}}x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} y^2(4-y^2)\mathrm{d}y=\frac{64}{15}.$$

（3）如图 9－4，$D=D_1\cup D_2$，其中

$$D_1=\{(x,y)\mid -x-1\leqslant y\leqslant x+1,-1\leqslant x\leqslant 0\};$$

$$D_2=\{(x,y)\mid x-1\leqslant y\leqslant -x+1,0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

因此

$$\begin{aligned}\iint_D \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}\sigma&=\iint_{D_1}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}\sigma\\&=\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\int_{-x-1}^{x+1}\mathrm{e}^y\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\int_{x-1}^{-x+1}\mathrm{e}^y\mathrm{d}y\\&=\int_{-1}^{0}(\mathrm{e}^{2x+1}-\mathrm{e}^{-1})\mathrm{d}x+\int_0^1(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{2x-1})\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}.\end{aligned}$$

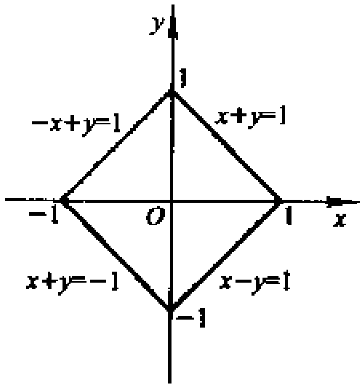


图 9－4

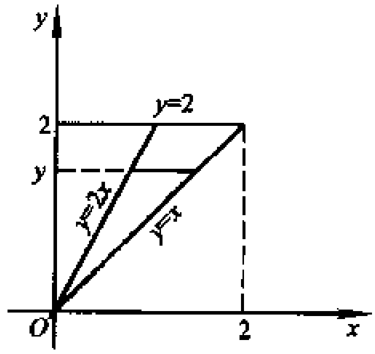


图 9－5

（4）$D:\frac{y}{2}\leqslant x\leqslant y,0\leqslant y\leqslant 2$，

故
$$\begin{aligned}\iint_D(x^2+y^2-x)\mathrm{d}\sigma&=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{y}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^2\left[\frac{x^3}{3}+y^2x-\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y}{2}}^{y}\mathrm{d}y\\&=\int_0^2\left(\frac{19}{24}y^3-\frac{3}{8}y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{13}{6}.\end{aligned}$$

3．如果二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的被积函数 $f(x,y)$ 是两个函数 $f_1(x)$ 及

$f_2(y)$的乘积,即 $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$,积分区域 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$,证明这个二重积分等于两个单积分的乘积,即

$$\iint_D f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left[\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right].$$

证 $$\iint_D f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x,$$

在上式右端的第一次积分 $\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}y$ 中,$f_1(x)$与积分变量 y 无关,可视为常数提到积分号外,因此上式右端等于

$$\int_a^b f_1(x)\cdot\left[\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

而在这个积分中,由于 $\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y$ 为常数,故又可提到积分号外,从而得到

$$\iint_D f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left[\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right]\cdot\left[\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\left[\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right].$$证毕.

4. 化二重积分

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

为二次积分(分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分),其中积分区域 D 是:

(1) 由直线 $y=x$ 及抛物线 $y^2=4x$ 所围成的闭区域;

(2) 由 x 轴及半圆周 $x^2+y^2=r^2(y\geqslant0)$所围成的闭区域;

(3) 由直线 $y=x,x=2$ 及双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$所围成的闭区域;

(4) 环形闭区域$\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant4\}$.

解 (1) 直线 $y=x$ 及抛物线 $y^2=4x$ 的交点为(0,0)和(4,4)(图 9-6).于是

$$I=\int_0^4\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{4x}}f(x,y)\mathrm{d}y,$$

或 $$I=\int_0^4\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{4}}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

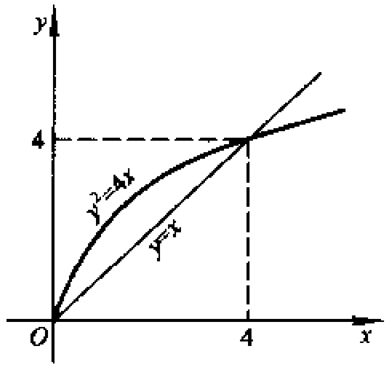


图 9-6

(2) 将 D 用不等式表示为 $0\leqslant y\leqslant\sqrt{r^2-x^2}$, $-r\leqslant x\leqslant r$,于是可将 I 化为如下的先对 y、后对 x 的二次积分:

$$I=\int_{-r}^{r}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y;$$

如将 D 用不等式表示为 $-\sqrt{r^2-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{r^2-y^2}$，$0\leqslant y\leqslant r$，则可将 I 化为如下的先对 x、后对 y 的二次积分：

$$I=\int_{0}^{r}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

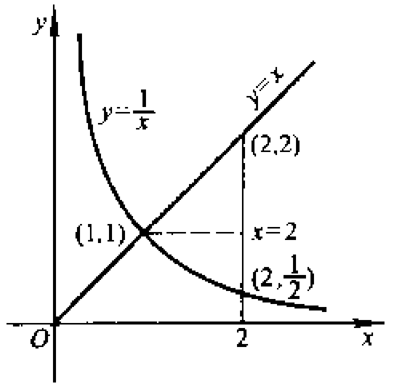


图 9－7

(3) 如图 9－7. 三条边界曲线两两相交，先求得 3 个交点为(1,1)、$\left(2,\frac{1}{2}\right)$和(2,2). 于是

$$I=\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y;$$

或

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{y}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

注 本题说明，将二重积分化为二次积分时，需注意根据积分区域的边界曲线的情况，选取恰当的积分次序. 本题中的积分区域 D 的上、下边界曲线均分别由一个方程给出，而左边界曲线却分为两段，由两个不同的方程给出，在这种情况下采取先对 y、后对 x 的积分次序比较有利：只需做一个二次积分，如果采用相反的积分次序则需计算两个二次积分.

需要指出，选择积分次序时，还需考虑被积函数 $f(x,y)$ 的特点. 具体例子可见教材下册第 83 页上的例 2.

(4) 将 D 按图 9－8(a)和 9－8(b)的两种不同方式划分为 4 块，分别得

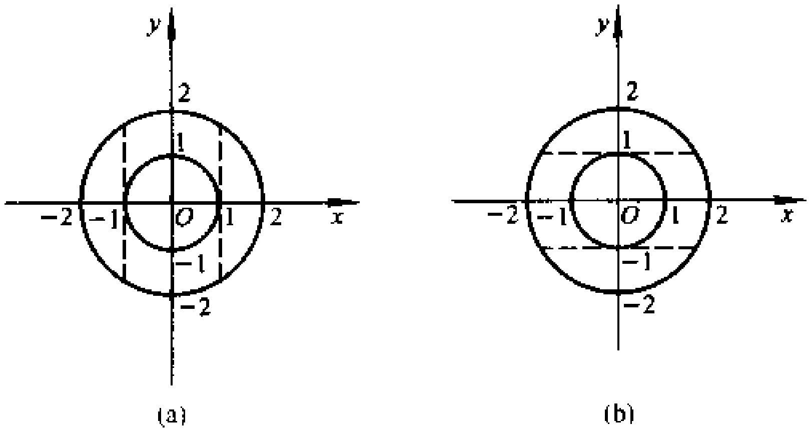


图 9－8

$$I=\int_{-2}^{-1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y,$$

和

$$I=\int_{-2}^{-1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$+\int_{1}^{1}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

5. 设 $f(x,y)$在 D 上连续,其中 D 是由直线 $y=x$、$y=a$ 及 $x=b(b>a)$ 所围成的闭区域,证明

$$\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^x f(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_y^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

证 等式两端的二次积分均等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$,因而它们相等.

6. 改换下列二次积分的积分次序:

(1) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$;

(5) $\int_1^e\mathrm{d}x\int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y$;　　(6) $\int_0^\pi\mathrm{d}x\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)\mathrm{d}y$.

解 (1) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$,其中$D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant y,0\leqslant y\leqslant 1\}$. D 可改写为$\{(x,y)|x\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant 1\}$(图 9-9),于是

$$\text{原式}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(2) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)|y^2\leqslant x\leqslant 2y,0\leqslant y\leqslant 2\}$. 又 D 可表示为$\{(x,y)|\frac{x}{2}\leqslant y\leqslant\sqrt{x},0\leqslant x\leqslant 4\}$(图 9-10),因此

$$\text{原式}=\int_0^4\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(3) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)|-\sqrt{1-y^2}$

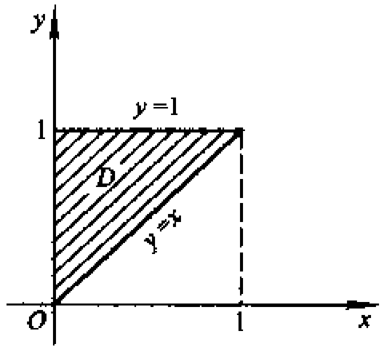


图 9-9

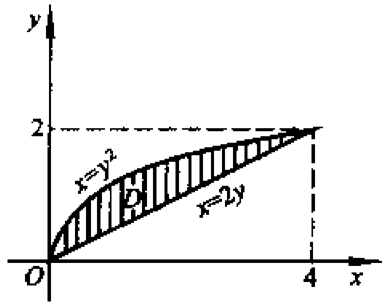


图 9-10

$\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2},0\leqslant y\leqslant 1\}$. 又 D 可表示为 $\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},-1\leqslant x\leqslant 1\}$ (图 9-11),

因此
$$原式=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(4) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\mid 2-x\leqslant y\leqslant\sqrt{2x-x^2},1\leqslant y\leqslant 2\}$. 又 D 可表示为 $\{(x,y)\mid 2-y\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{1-y^2},0\leqslant y\leqslant 1\}$ (图 9-12), 故

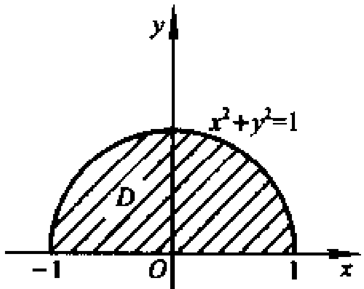


图 9-11

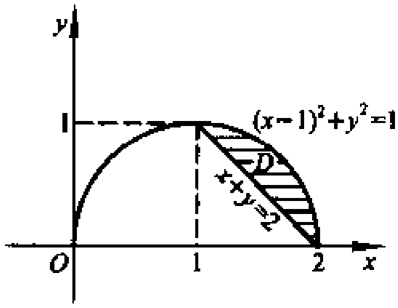


图 9-12

$$原式=\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(5) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\ln x,1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}\}$. 又 D 可表示为 $\{(x,y)\mid \mathrm{e}^y\leqslant x\leqslant\mathrm{e},0\leqslant y\leqslant 1\}$ (图 9-13), 故
$$原式=\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(6) 如图 9-14, 将积分区域 D 表示为 $D_1\cup D_2$, 其中 $D_1=\{(x,y)\mid\arcsin y$

$\leqslant x\leqslant\pi-\arcsin y, 0\leqslant y\leqslant 1\}$[1], $D_2=\{(x,y)\mid -2\arcsin y\leqslant x\leqslant\pi, -1\leqslant y\leqslant 0\}$.
于是

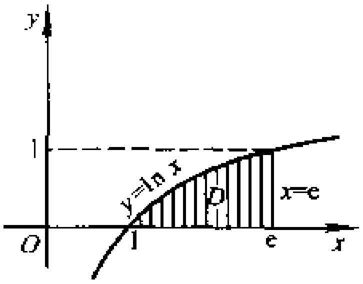


图9－13

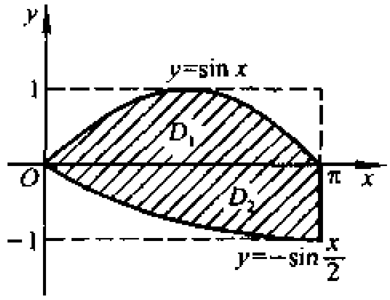


图9－14

$$原式=\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx+\int_{-1}^0 dy\int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x,y)dx.$$

7. 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2$, $y=x$ 和 x 轴所围成，它的面密度 $\mu(x,y)=x^2+y^2$，求该薄片的质量.

解 D 如图 9－15 所示.

$$M=\iint_D \mu(x,y)d\sigma=\int_0^1 dy\int_y^{2-y}(x^2+y^2)dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{3}x^3+xy^2\right]_y^{2-y}dy$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{3}(2-y)^3+2y^2-\frac{7}{3}y^3\right]dy$$

$$=\left[-\frac{1}{12}(2-y)^4+\frac{2}{3}y^3-\frac{7}{12}y^4\right]_0^1=\frac{4}{3}.$$

8. 计算由四个平面 $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积.

解 此立体为一曲顶柱体，它的底是 xOy 面上的闭区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，顶是曲面 $z=6-2x-3y$(图 9－16). 因此所求立体的体积

$$V=\iint_D(6-2x-3y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1(6-2x-3y)dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{9}{2}-2x\right)dx=\frac{7}{2}.$$

9. 求由平面 $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面

---

[1] 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$y=\sin x$ 的反函数是 $x=\arcsin y$. 而当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$时，$\pi-x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. 于是由 $y=\sin x=\sin(\pi-x)$ 可得 $\pi-x=\arcsin y$，从而得反函数 $x=\pi-\arcsin y$.

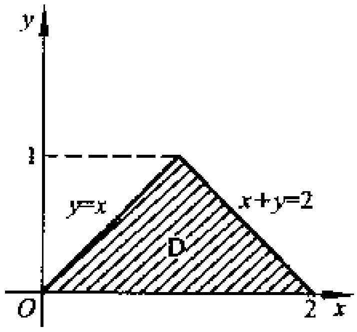


图 9－15

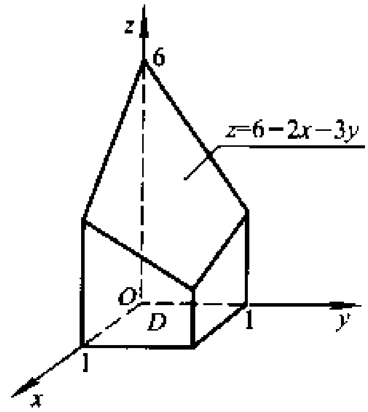


图 9－16

$x^2+y^2=6-z$ 截得的立体的体积.

解 此立体为一曲顶柱体,它的底是 xOy 面上的闭区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1-x,0\leqslant x\leqslant 1\}$,顶是曲面 $z=6-(x^2+y^2)$(图 9－17),故体积

$$\begin{aligned}V&=\iint\limits_D[6-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(6-x^2-y^2)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\left[6(1-x)-x^2+x^3-\frac{1}{3}(1-x)^3\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{17}{6}.\end{aligned}$$

10. 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

解 由 $\begin{cases}z=x^2+2y^2\\z=6-2x^2-y^2\end{cases}$ 消去 z,得 $x^2+y^2=2$,故所求立体在 xOy 面上的投影区域为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}(\text{图 }9-18).$$

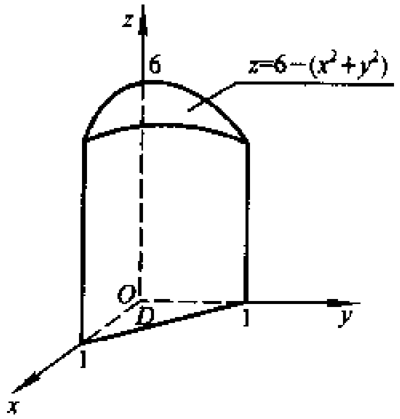


图 9－17

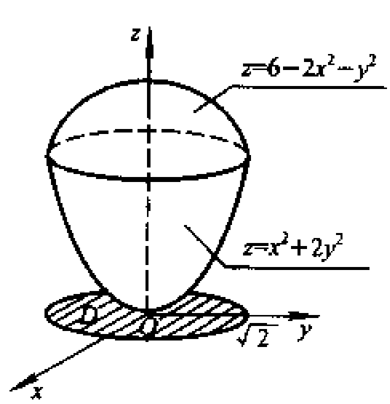


图 9－18

所求立体的体积等于两个曲顶柱体体积的差：

$$\begin{aligned}V&=\iint_D(6-2x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma-\iint_D(x^2+2y^2)\mathrm{d}\sigma\\&=\iint_D(6-3x^2-3y^2)\mathrm{d}\sigma=\iint_D(6-3\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(6-3\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=6\pi.\end{aligned}$$

注 求类似于第 8、9、10 题中这样的立体体积时，并不一定要画出立体的准确图形，但一定要会求出立体在坐标面上的投影区域，并知道立体的底和顶的方程，这就需要复习和掌握第七章中学过的空间解析几何的有关知识.

11. 画出积分区域，把积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示为极坐标形式的二次积分，其中积分区域 D 是：

(1) $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}(a>0)$；

(2) $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$；

(3) $\{(x,y)\mid a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\}$，其中 $0<a<b$；

(4) $\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1-x,0\leqslant x\leqslant 1\}$.

解 (1) 如图 9-19，在极坐标系中，$D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant a,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，故

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

(2) 如图 9-20，在极坐标系中，

$D=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\theta,-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$，故

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

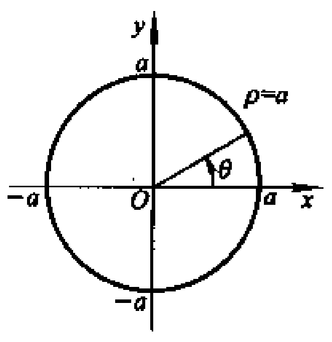


图 9-19

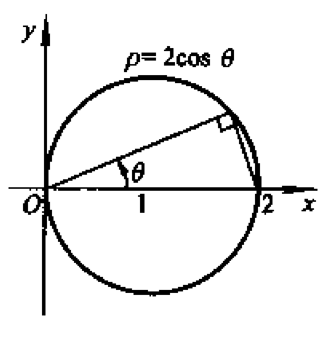


图 9-20

(3) 如图 9-21，在极坐标系中，

$D=\{(\rho,\theta)\mid a\leqslant\rho\leqslant b,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，故

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

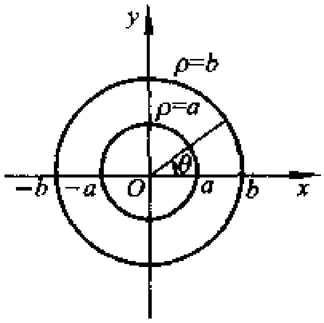


图 9 - 21

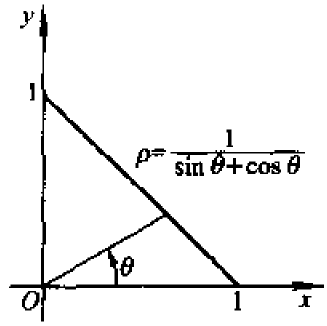


图 9 - 22

(4) D 如图 9 - 22 所示. 在极坐标系中, 直线 $x+y=1$ 的方程为 $\rho=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$, 故 $D=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta},0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

于是

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

12. 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分:

(1) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$; (2) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y$;

(3) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$; (4) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$.

解 (1) 如图 9 - 23, 用直线 $y=x$ 将积分区域 D 分成 D_1、D_2 两部分:

$$D_1=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\};$$

$$D_2=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant\csc\theta,\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\}.$$

于是

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\csc\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

(2) D 如图 9 - 24 所示. 在极坐标系中, 直线 $x=2$、$y=x$ 和 $y=\sqrt{3}x$ 的方程分别是 $\rho=2\sec\theta$, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 和 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$. 因此

$D=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant 2\sec\theta,\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{3}\right\}$. 又, $f(\sqrt{x^2+y^2})=f(\rho)$. 于是

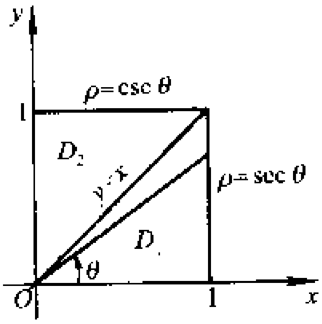


图 9-23

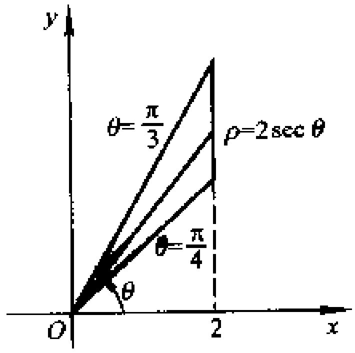


图 9-24

$$\text{原式}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sec\theta}f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho$$

(3) D 如图 9-25 所示. 在极坐标系中, 直线 $y=1-x$ 的方程为 $r=\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$, 圆 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的方程为 $r=1$, 因此

$$D=\left\{(\rho,\theta)\mid\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

于是

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

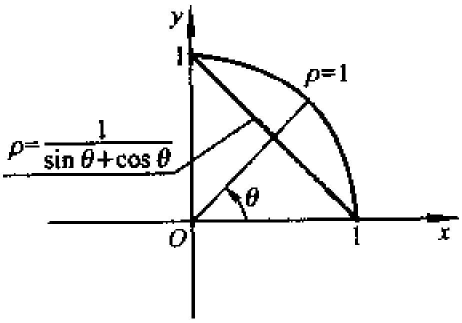


图 9-25

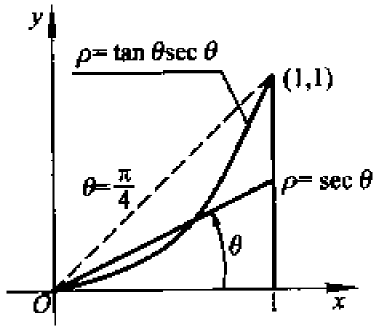


图 9-26

(4) D 如图 9-26 所示. 在极坐标系中, 直线 $x=1$ 的方程是 $\rho=\sec\theta$; 抛物线 $y=x^2$ 的方程是 $\rho\sin\theta=\rho^2\cos^2\theta$, 即 $\rho=\tan\theta\sec\theta$; 两者的交点与原点的连线的方程是 $\theta=\frac{\pi}{4}$. 故

$$D=\left\{(\rho,\theta)\mid\tan\theta\sec\theta\leqslant\rho\leqslant\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\},$$

于是

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\tan\theta\sec\theta}^{\sec\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

13. 把下列积分化为极坐标形式,并计算积分值:

(1) $\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$;　　(2) $\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y$;

(3) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$;　　(4) $\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x$.

解　(1) 积分区域 D 如图 9-27 所示. 在极坐标系中, $D=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant 2a\cos\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$,

于是

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{2a\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=4a^4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi a^4.$$

注　在二重积分和以后的三重积分的计算中,常会遇到定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\mathrm{d}\theta$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\mathrm{d}\theta$. 因此记住如下的结果(见教材上册第 247 页例 10)是很有益的:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\mathrm{d}\theta\left(=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\mathrm{d}\theta\right)=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, n\ 为正偶数,\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, n\ 为大于\ 1\ 的正奇数.\end{cases}$$

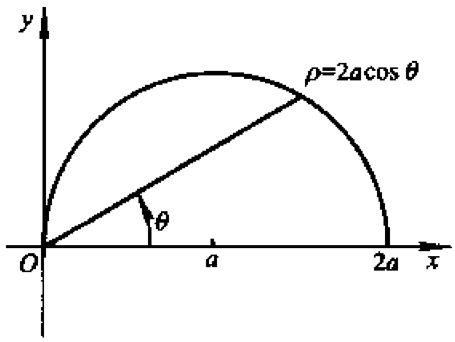


图 9-27

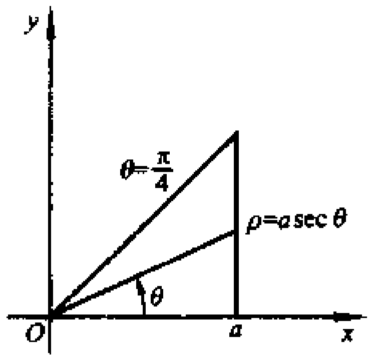


图 9-28

(2) 如图 9-28, 在极坐标系中,

$D=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant a\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}$.

于是

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sec\theta}\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$
$$=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{a^3}{6}[\sec\theta\tan\theta+\ln(\sec\theta+\tan\theta)]_0^{\frac{\pi}{4}}（见教材上册 209 页例 8）$$
$$=\frac{a^3}{6}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$$

(3) 积分区域 D 如图 9－29 所示. 在极坐标系中，抛物线 $y=x^2$ 的方程是 $\rho\sin\theta=\rho^2\cos^2\theta$，即 $\rho=\tan\theta\sec\theta$；直线 $y=x$ 的方程是 $\theta=\frac{\pi}{4}$，故

$$D=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant\tan\theta\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}.$$

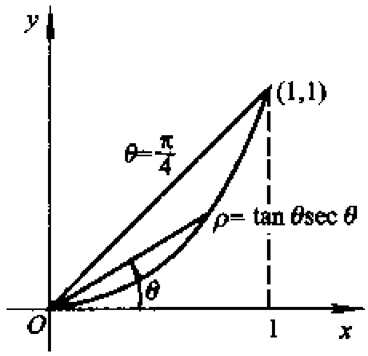


图 9－29

于是

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\tan\theta\sec\theta}\frac{1}{\rho}\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan\theta\sec\theta\mathrm{d}\theta=[\sec\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1.$$

(4) 积分区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\sqrt{a^2-y^2},0\leqslant y\leqslant a\}$
$$=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant a,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

故

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^4}{4}=\frac{\pi}{8}a^4.$$

14. 利用极坐标计算下列各题：

(1) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域；

(2) $\iint\limits_D\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域；

(3) $\iint\limits_D\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$，$x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0$，$y=x$ 所围成的在第一象限内的闭区域.

解 (1) 在极坐标系中，积分区域 $D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant 2,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，于是

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D e^{\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 e^{\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\cdot\left[\frac{e^{\rho^2}}{2}\right]_0^2=\pi(e^4-1).$$

(2) 在极坐标系中，积分区域 $D=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$，于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma&=\iint\limits_D \ln(1+\rho^2)\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\ln(1+\rho^2)\cdot\rho\mathrm{d}\rho\\&=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+\rho^2)\mathrm{d}(1+\rho^2)\\&=\frac{\pi}{4}\left[(1+\rho^2)\ln(1+\rho^2)\Big|_0^1-\int_0^1 2\rho\mathrm{d}\rho\right]\\&=\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1).\end{aligned}$$

(3) 在极坐标系中，积分区域 $D=\left\{(\rho,\theta)\mid 1\leqslant\rho\leqslant 2,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}$，$\arctan\frac{y}{x}=\theta$，于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma&=\iint\limits_D \theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{2}(2^2-1)\\&=\frac{3}{64}\pi^2.\end{aligned}$$

15. 选用适当的坐标计算下列各题：

(1) $\iint\limits_D\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $x=2$，$y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域；

(2) $\iint\limits_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域；

(3) $\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=x+a$，$y=a$，$y=3a\ (a>0)$ 所围成的闭区域；

(4) $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是圆环形闭区域 $\{(x,y)\mid a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\}$.

解 (1) D 如图 9－30 所示. 根据 D 的形状，选用直角坐标较宜. $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant x,1\leqslant x\leqslant 2\right\}$，故

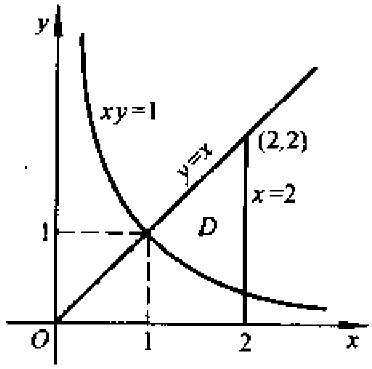


图 9－30

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}dy$$

$$= \int_1^2 (-x + x^3)dx = \frac{9}{4}.$$

(2) 根据积分区域 D 的形状和被积函数的特点，选用极坐标为宜.
$D = \left\{(\rho,\theta) | 0 \leqslant \rho \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$，故

$$\text{原式} = \iint_D \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\rho d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 \frac{1-\rho^2}{\sqrt{1-\rho^4}}\rho d\rho = \frac{\pi}{2}\left(\int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^4}}d\rho - \int_0^1 \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^4}}d\rho\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}}d\rho^2 + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}}d(1-\rho^4)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\arcsin \rho^2 \Big|_0^1 + \frac{1}{2}\sqrt{1-\rho^4}\Big|_0^1\right]$$

$$= \frac{\pi}{8}(\pi - 2).$$

(3) D 如图 9－31 所示. 选用直角坐标为宜. 又根据 D 的边界曲线的情况，宜采用先对 x、后对 y 的积分次序. 于是

$$\iint_D (x^2+y^2)d\sigma = \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^{y} (x^2+y^2)dx$$

$$= \int_a^{3a} \left(2ay^2 - a^2y + \frac{a^3}{3}\right)dy = 14a^4.$$

(4) 本题显然适于用极坐标计算. $D = \{(\rho,\theta) | a \leqslant \rho \leqslant b, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$.

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma = \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \rho^2 d\rho$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{3}(b^3 - a^3) = \frac{2}{3}\pi(b^3 - a^3).$$

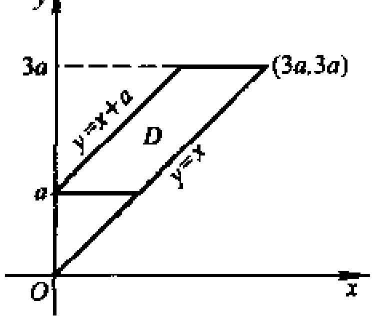


图 9－31

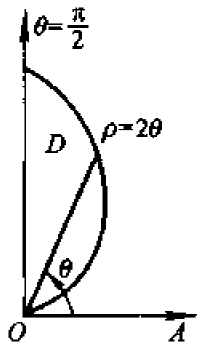


图 9－32

16. 设平面薄片所占的闭区域 D 由螺线 $\rho=2\theta$ 上一段弧 $\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 与直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围成,它的面密度为 $\mu(x,y)=x^2+y^2$. 求这薄片的质量.

解 薄片的质量为它的面密度在薄片所占区域 D 上的二重积分(图9-32),即

$$\begin{aligned}M&=\iint_D\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma\\&=\iint_D\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^4\mathrm{d}\theta=\frac{\pi^5}{40}.\end{aligned}$$

17. 求由平面 $y=0$, $y=kx(k>0)$, $z=0$ 以及球心在原点、半径为 R 的上半球面所围成的在第一卦限内的立体的体积.

解 如图 9-33,

$$\begin{aligned}V&=\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint_D\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\theta\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\alpha\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\mathrm{d}(R^2-\rho^2)\\&=\frac{\alpha R^3}{3}=\frac{R^3}{3}\arctan k.\end{aligned}$$

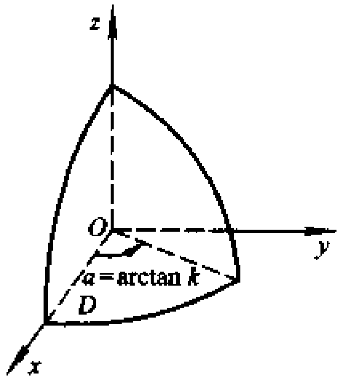


图 9-33

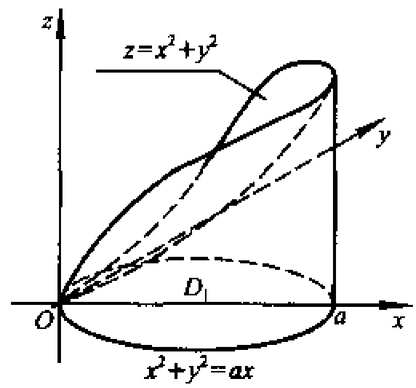


图 9-34

18. 计算以 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=ax$ 围成的闭区域为底,而以曲面 $z=x^2+y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

解 如图 9-34,

设 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\sqrt{ax-x^2},0\leqslant x\leqslant a\}$

$=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant a\cos\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$,

由于曲顶柱体关于 xOz 面对称，故

$$V=2\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint\limits_{D_1}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{a^4}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{32}\pi a^4.$$

注 在计算立体体积时，要注意充分利用图形的对称性，这样既能简化运算，也能减少可能发生的错误.

*19. 作适当的变换，计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D(x-y)^2\sin^2(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是平行四边形闭区域，它的四个顶点是$(\pi,0)$，$(2\pi,\pi)$，$(\pi,2\pi)$和$(0,\pi)$；

(2) $\iint\limits_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由两条双曲线 $xy=1$ 和 $xy=2$，直线 $y=x$ 和 $y=4x$ 所围成的在第Ⅰ象限内的闭区域；

(3) $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 x 轴、y 轴和直线 $x+y=1$ 所围成的闭区域；

(4) $\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$.

解 (1) 令 $u=x-y$，$v=x+y$，则 $x=\frac{u+v}{2}$，$y=\frac{v-u}{2}$. 在这变换下，D 的边界 $x-y=-\pi$，$x+y=\pi$，$x-y=\pi$，$x+y=3\pi$ 依次与 $u=-\pi$，$v=\pi$，$u=\pi$，$v=3\pi$ 对应. 后者构成 uOv 平面上与 D 对应的闭区域 D' 的边界. 于是

$$D'=\{(u,v)\mid-\pi\leqslant u\leqslant\pi,\pi\leqslant v\leqslant 3\pi\}\text{（图 9 - 35）}.$$

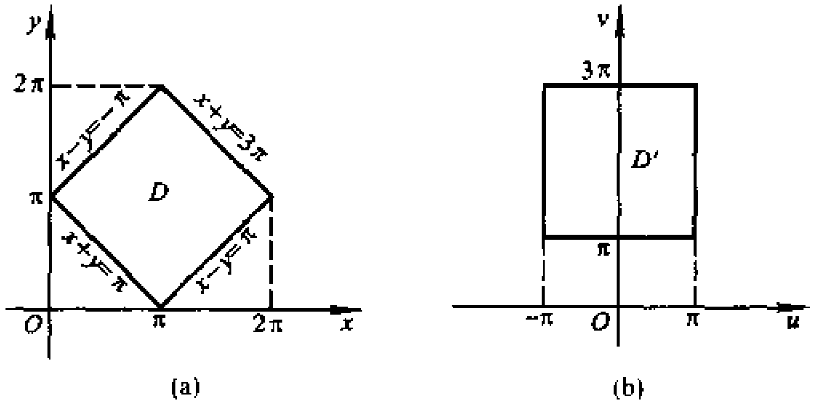


图 9 - 35

又
$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2},$$

因此

$$\iint_D (x-y)^2\sin^2(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} u^2\sin^2 v\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}u^2\mathrm{d}u\int_{\pi}^{3\pi}\sin^2 v\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}\cdot\left[\frac{v}{2}-\frac{\sin 2v}{4}\right]_{\pi}^{3\pi}$$
$$=\frac{\pi^4}{3}.$$

(2) 令 $u=xy,v=\frac{y}{x}$,则 $x=\sqrt{\frac{u}{v}},y=\sqrt{uv}$.在这变换下,$D$ 的边界 $xy=1$, $y=x,xy=2,y=4x$ 依次与 $u=1,v=1,u=2,v=4$ 对应,后者构成 uOv 平面上与 D 对应的闭区域 D' 的边界.于是 $D'=\{(u,v)\mid 1\leqslant u\leqslant 2,1\leqslant v\leqslant 4\}$(图 9-36).又 $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}}\\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{v}\right)=\frac{1}{2v}$.

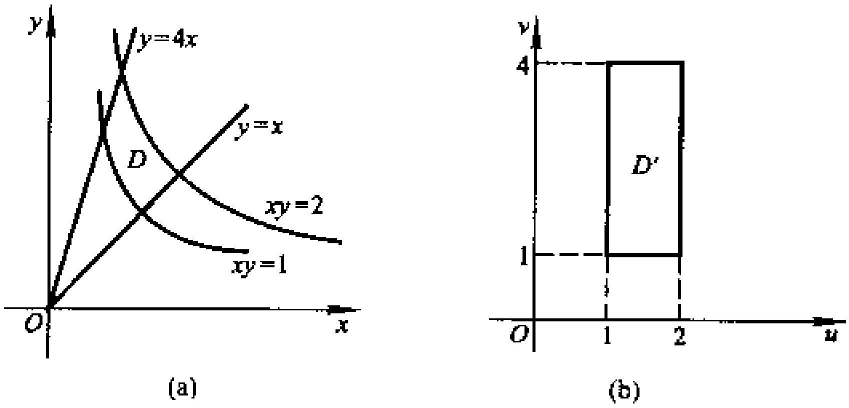


图 9-36

因此

$$\iint_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}u^2\cdot\frac{1}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_1^2 u^2\mathrm{d}u\int_1^4\frac{1}{v}\mathrm{d}v$$
$$=\frac{7}{3}\ln 2.$$

(3) 令 $u=x+y,v=y$,即 $x=u-v,y=v$,则在这变换下,D 的边界 $y=0$,

$x=0, x+y=1$依次与 $v=0, u=v, u=1$ 对应.后者构成 uOv 平面上与D 对应的闭区域 D'的边界,于是

$$D'=\{(u,v)\mid 0\leqslant v\leqslant u, 0\leqslant u\leqslant 1\}.$$

又
$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1.$$

因此
$$\iint_D e^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} e^{\frac{v}{u}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\int_0^1 \mathrm{d}u\int_0^u e^{\frac{v}{u}}\mathrm{d}v=\int_0^1 u(e-1)\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{2}(e-1).$$

(4) 作广义极坐标变换$\begin{cases}x=a\rho\cos\theta,\\ y=b\rho\sin\theta\end{cases}$$(a>0, b>0, \rho\geqslant 0, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$.在此变换下,与 D 对应的闭区域为$D'=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$.又雅可比式

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -a\rho\sin\theta\\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta\end{vmatrix}=ab\rho.$$

故
$$\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}\rho^2\cdot ab\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$
$$=ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}ab\pi.$$

*20. 求由下列曲线所围成的闭区域 D 的面积:

(1) D 是由曲线$xy=4, xy=8, xy^3=5, xy^3=15$ 所围成的第Ⅰ象限部分的闭区域;

(2) D 是由曲线$y=x^3, y=4x^3, x=y^3, x=4y^3$ 所围成的第Ⅰ象限部分的闭区域.

解 (1) 令 $u=xy, v=xy^3, (x\geqslant 0, y\geqslant 0)$,则 $x=\sqrt{\frac{u^3}{v}}, y=\sqrt{\frac{v}{u}}$.在这变换下,与 D 对应的uOv 平面上的闭区域为$D'=\{(u,v)\mid 4\leqslant u\leqslant 8, 5\leqslant v\leqslant 15\}$.

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{3}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u^3}{v^3}}\\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u^3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uv}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2v},$$

于是所求面积为

$$A=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}\frac{1}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_4^8\mathrm{d}u\int_5^{15}\frac{1}{v}\mathrm{d}v$$
$$=2\ln 3.$$

(2) 令 $u=\frac{y}{x^3}, v=\frac{x}{y^3}(x>0,y>0)$，则 $x=u^{-\frac{3}{8}}v^{-\frac{1}{8}}, y=u^{-\frac{1}{8}}v^{-\frac{3}{8}}$. 在这变换下，与 D 对应的 uOv 平面上的闭区域为 $D'=\{(u,v)\mid 1\leqslant u\leqslant 4, 1\leqslant v\leqslant 4\}$. 又雅可比式

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} -\frac{3}{8}u^{-\frac{11}{8}}v^{-\frac{1}{8}} & -\frac{1}{8}u^{-\frac{3}{8}}v^{-\frac{9}{8}} \\ -\frac{1}{8}u^{-\frac{9}{8}}v^{-\frac{3}{8}} & -\frac{3}{8}u^{-\frac{1}{8}}v^{-\frac{11}{8}} \end{vmatrix}=\frac{1}{8}u^{-\frac{3}{2}}v^{-\frac{3}{2}}.$$

于是所求面积为

$$A=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}\frac{1}{8}u^{-\frac{3}{2}}v^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{8}\int_1^4 u^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}u\int_1^4 v^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}v$$
$$=\frac{1}{8}([-2u^{-\frac{1}{2}}]_1^4)^2=\frac{1}{8}.$$

*21. 设闭区域 D 是由直线 $x+y=1, x=0, y=0$ 所围成，求证

$$\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\sin 1.$$

证 令 $u=x-y, v=x+y$，则 $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{v-u}{2}$，在此变换下，$D$ 的边界 $x+y=1, x=0, y=0$ 依次与 $v=1, u+v=0$ 和 $v-u=0$ 对应. 后者构成 uOv 平面上与 D 对应的闭区域 D' 的边界(图 9-37).

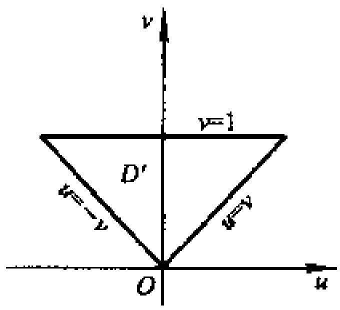


图 9-37

于是 $D'=\{(u,v)\mid -v\leqslant u\leqslant v, 0\leqslant v\leqslant 1\}$.

又雅可比式

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{2},$$

因此有

$$\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}\cos\frac{u}{v}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}\cos\frac{u}{v}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^1 v\left[\sin\frac{u}{v}\right]_{-v}^{v}\mathrm{d}v$$
$$=\int_0^1 v\sin 1\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\sin 1.$$ 证毕.

*22. 选取适当的变换，证明下列等式：

(1) $\iint_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u$，其中闭区域 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|$

$\leqslant 1\}$;

(2) $\iint\limits_D f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\mathrm{d}u$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，且 $a^2+b^2\neq 0$.

证 (1) 闭区域 D 的边界为 $x+y=-1$，$x+y=1$，$x-y=-1$，$x-y=1$，故令 $u=x+y$，$v=x-y$，即 $x=\dfrac{u+v}{2}$，$y=\dfrac{u-v}{2}$. 在此变换下，D 变为 uOv 平面上的闭区域

$$D'=\{(u,v)\mid -1\leqslant u\leqslant 1,\ -1\leqslant v\leqslant 1\}.$$

又，雅可比式

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},$$

于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D'} f(u)\left|-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v=\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$ 证毕.

(2) 比较等式的两端可知需作变换

$$u\sqrt{a^2+b^2}=ax+by，即\ u=\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

再考虑到 D 的边界曲线为 $x^2+y^2=1$，故令 $v=\dfrac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 这样就有 $u^2+v^2=1$，即 D 的边界曲线 $x^2+y^2=1$ 变为 uOv 平面上的圆 $u^2+v^2=1$. 于是与 D 对应的闭区域为 $D'=\{(u,v)\mid u^2+v^2\leqslant 1\}$.

又由 u、v 的表达式可解得

$$x=\frac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}},\ y=\frac{bu-av}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

因此雅可比式

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{vmatrix}=-1,$$

于是

$$\iint\limits_D f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\mid -1\mid \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_{-1}^{1} du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)dv$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)du.$$ 证毕.

习 题 9－3

1. 化三重积分 $I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ 为三次积分，其中积分区域 Ω 分别是：

(1) 由双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y-1=0$，$z=0$ 所围成的闭区域；

(2) 由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的闭区域；

(3) 由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域；

(4) 由曲面 $cz=xy(c>0)$，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$z=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域.

解 (1) Ω 的顶 $z=xy$ 和底面 $z=0$ 的交线为 x 轴和 y 轴，故 Ω 在 xOy 面上的投影区域由 x 轴，y 轴和直线 $x+y-1=0$ 所围成. 于是 Ω 可用不等式表示为：$0\leqslant z\leqslant xy$，$0\leqslant y\leqslant 1-x$，$0\leqslant x\leqslant 1$，因此

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{xy} f(x,y,z)dz.$$

(2) 由 $z=x^2+y^2$ 和 $z=1$ 得 $x^2+y^2=1$，所以 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $x^2+y^2\leqslant 1$（图 9－38）. Ω 可用不等式表示为：$x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1$，$-\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，

因此

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{1} f(x,y,z)dz.$$

(3) 由 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=2-x^2 \end{cases}$ 消去 z，得 $x^2+y^2=1$.

故 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $x^2+y^2\leqslant 1$（图 9－39）. 于是 Ω 可用不等式表示为

$$x^2+2y^2\leqslant z\leqslant 2-x^2,\ -\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},\ -1\leqslant x\leqslant 1,$$

因此

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x,y,z)dz$$

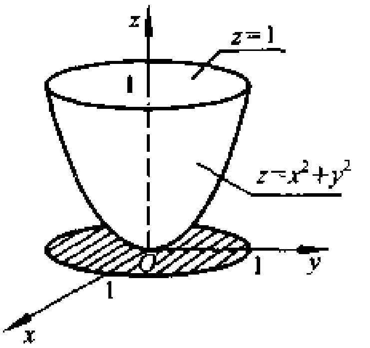


图 9-38

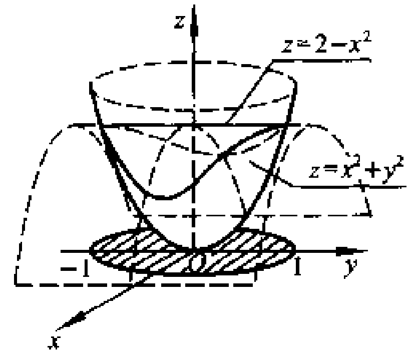


图 9 39

(4) 显然 Ω 在 xOy 面上的投影区域由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$和 x 轴、y 轴所围成，Ω 的顶为 $cz=xy$，底为 $z=0$(图 9-40).故 Ω 可用不等式表示为

$$0\leqslant z\leqslant\frac{xy}{c},0\leqslant y\leqslant b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},0\leqslant x\leqslant a,$$

因此

$$I=\int_0^a dx\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}dy\int_0^{\frac{xy}{c}}f(x,y,z)dz.$$

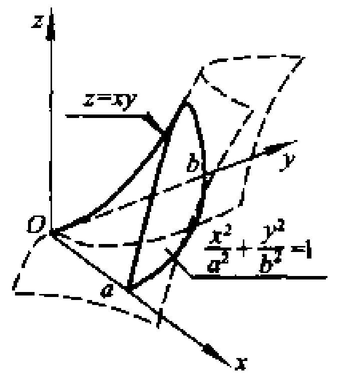


图 9-40

注 本题中的 4 个小题,除第 2 小题外,Ω 的图形都不易画出.但是,就确定三次积分的积分限而言,并非必须画出 Ω 的准确图形.重要的是要会求出 Ω 在坐标面上的投影区域,以及会定出 Ω 的顶和底面,而做到这点,只需掌握常见曲面的方程和图形特点,并具备一定的空间想像能力即可.本章题解中配了较多插图,请读者注意观察,这对培养空间想像能力是有好处的.

2. 设有一物体,占有空间闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1\}$,在点$(x,y,z)$处的密度为 $\rho(x,y,z)=x+y+z$,计算该物体的质量.

解
$$M=\iiint_\Omega\rho dxdydz=\int_0^1dx\int_0^1dy\int_0^1(x+y+z)dz$$
$$=\int_0^1dx\int_0^1\left(x+y+\frac{1}{2}\right)dy=\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)dx$$
$$=\frac{3}{2}.$$

3. 如果三重积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$ 的被积函数 $f(x,y,z)$是三个函数 $f_1(x)$、$f_2(y)$、$f_3(z)$的乘积,即 $f(x,y,z)=f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot f_3(z)$,积分区域

$\Omega=\{(x,y,z)\mid a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d, l\leqslant z\leqslant m\}$，证明这个三重积分等于三个单积分的乘积，即

$$\iiint_{\Omega} f_1(x)f_2(y)f_3(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z.$$

证 $\iiint_{\Omega} f_1(x)f_2(y)f_3(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b\left[\int_c^d\left(\int_l^m f_1(x)f_2(y)f_3(z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$

$$=\int_a^b\left[\int_c^d\left(f_1(x)f_2(y)\cdot\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\left[\left(\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z\right)\cdot\left(\int_c^d f_1(x)f_2(y)\mathrm{d}y\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\left(\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z\right)\cdot\int_a^b\left[f_1(x)\cdot\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z\cdot\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\cdot\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x=\text{右端}.$$

4. 计算 $\iiint_{\Omega} xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=xy$，与平面 $y=x$，$x=1$ 和 $z=0$ 所围成的闭区域.

解 如图 9－41，Ω 可用不等式表示为：

$$0\leqslant z\leqslant xy, 0\leqslant y\leqslant x, 0\leqslant x\leqslant 1,$$

因此

$$\iiint_{\Omega} xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x y^2\mathrm{d}y\int_0^{xy} z^3\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x x^4y^6\mathrm{d}y=\frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}\mathrm{d}x=\frac{1}{364}.$$

5. 计算 $\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$，其中 Ω 为平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成的四面体.

解 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant 1-x-y, 0\leqslant y\leqslant 1-x, 0\leqslant x\leqslant 1\}$（图 9－42），于是

$$\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left[\frac{-1}{2(1+x+y+z)^2}\right]_0^{1-x-y}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left[-\frac{1}{8}+\frac{1}{2(1+x+y)^2}\right]\mathrm{d}y$$

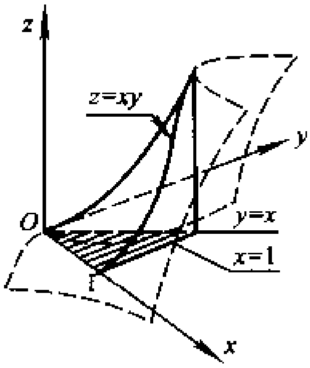


图 9－41

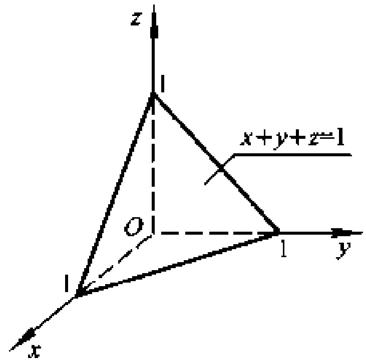


图 9　42

$$= \int_0^1 \left[-\frac{y}{8} - \frac{1}{2(1+x+y)} \right]_0^{1-x} dx$$

$$= -\int_0^1 \left[\frac{1-x}{8} + \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2(1+x)} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right).$$

6. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

解法一　利用直角坐标计算. 由于

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}, 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}, 0 \leqslant x \leqslant 1\},$$

故

$$\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 x\,dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz$$

$$= \int_0^1 x\,dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \cdot \frac{1-x^2-y^2}{2} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}(1-x^2) - \frac{y^4}{4} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2 dx = \frac{1}{48}.$$

解法二　利用球面坐标计算，由于

$$\Omega = \left\{ (r,\varphi,\theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \right\},$$

故

$$\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega} (r^3 \sin^2\varphi \cos\varphi \sin\theta \cos\theta) \cdot r^2 \sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r^5 \mathrm{d}r$$

$$= \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{\sin^3\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{48}.$$

注 比较本题的两种解法，显然用球面坐标计算要简便得多，这是由本题的积分区域 Ω 的形状所决定了的. 一般说来，凡是 Ω 由球面、圆锥面等曲面围成时，用球面坐标计算三重积分较为方便.

7. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由平面 $z=0$，$z=y$，$y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域.

解法一 容易看出，Ω 的顶为平面 $z=y$，底为平面 $z=0$，Ω 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 由 $y=1$ 和 $y=x^2$ 所围成. 故 Ω 可用不等式表示为

$$0\leqslant z\leqslant y, x^2\leqslant y\leqslant 1, -1\leqslant x\leqslant 1.$$

因此

$$\iiint\limits_{\Omega} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-1}^1 x\mathrm{d}x \int_{x^2}^1 \mathrm{d}y \int_0^y z\mathrm{d}z$$

$$= \int_{-1}^1 x\mathrm{d}x \int_{x^2}^1 \frac{y^2}{2}\mathrm{d}y = \frac{1}{6}\int_{-1}^1 x(1-x^6)\mathrm{d}x = 0.$$

解法二 由于积分区域 Ω 关于 yOz 面对称（即若点 $(x,y,z)\in\Omega$，则 $(-x,y,z)$ 也属于 Ω），且被积函数 xz，关于 x 是奇函数（即 $(-x)z=-(xz)$），因此

$$\iiint\limits_{\Omega} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

8. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由锥面 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h$ $(R>0, h>0)$ 所围成的闭区域.

解法一 由 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=h$ 消去 z，得

$$x^2+y^2=R^2,$$

故 Ω 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$（图 9－43），$\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant h,(x,y)\in D_{xy}\right\}$.

于是

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[h^2-\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\left[h^2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{h^2}{R^2}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$=\frac{h^2}{2}\cdot\pi R^2-\frac{h^2}{2R^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{1}{4}\pi R^2h^2.$$

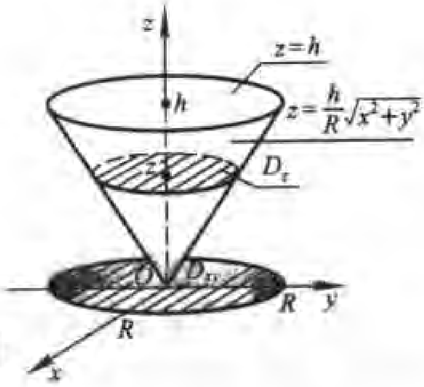


图 9－43

解法二 用过点$(0,0,z)$，平行于 xOy 面的平面截 Ω 得平面圆域 D_z，其半径为$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{Rz}{h}$，面积为$\frac{\pi R^2}{h^2}z^2$（图 9－43）．$\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z,0\leqslant z\leqslant h\}$．

于是

$$\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^h z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^h z\cdot\frac{\pi R^2}{h^2}z^2\mathrm{d}z=\frac{\pi R^2}{4h^2}\cdot h^4=\frac{1}{4}\pi R^2h^2.$$

注 解法二通俗地称为“先重后单”法，即先在 D_z 上作关于 x、y 的二重积分，然后再对 z 作定积分．如果被积函数与 x、y 无关，且 D_z 的面积容易表达为 z 的函数，则采用这种方法比较简便．

解法三 用球面坐标进行计算．在球面坐标系中，圆锥面 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 的方程为 $\varphi=\alpha\left(=\arctan\frac{R}{h}\right)$，平面 $z=h$ 的方程为 $r=h\sec\varphi$，因此 Ω 可表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\alpha,0\leqslant r\leqslant h\sec\varphi.$$

于是

$$\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\alpha\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{h\sec\varphi}r^3\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^\alpha\frac{h^4\sin\varphi}{4\cos^3\varphi}\mathrm{d}\varphi=-\frac{\pi h^4}{2}\int_0^\alpha\frac{\mathrm{d}(\cos\varphi)}{\cos^3\varphi}$$

$$=\frac{\pi h^4}{4}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)\quad\left(\text{代入 }\alpha=\arctan\frac{R}{h}\right)$$

$$=\frac{\pi h^4}{4}\left(\frac{R^2+h^2}{h^2}-1\right)=\frac{1}{4}\pi R^2h^2.$$

9. 利用柱面坐标计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=2z$ 及平面 $z=2$ 所围成的闭区域.

解 (1) 由 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 和 $z=x^2+y^2$ 消去 z，得

$(x^2+y^2)^2=2-(x^2+y^2)$，即 $x^2+y^2=1$. 从而知 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$（图 9－44）. 利用柱面坐标，$\Omega$ 可表示为

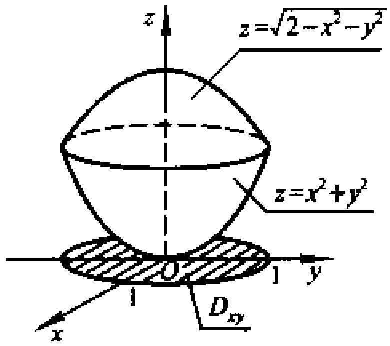


图 9－44

$$\rho^2\leqslant z\leqslant\sqrt{2-\rho^2},0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega} z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho(2-\rho^2-\rho^4)\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\left[\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1=\frac{7}{12}\pi.$$

(2) 由 $x^2+y^2=2z$ 及 $z=2$ 消去 z 得 $x^2+y^2=4$，从而知 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$. 利用柱面坐标，$\Omega$ 可表示为

$$\frac{\rho^2}{2}\leqslant z\leqslant 2,0\leqslant\rho\leqslant 2,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\left(2-\frac{\rho^2}{2}\right)\mathrm{d}\rho=2\pi\left[\frac{\rho^4}{2}-\frac{\rho^6}{12}\right]_0^2=\frac{16}{3}\pi.$$

10. 利用球面坐标计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域；

(2) $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$,其中闭区域 Ω 由不等式 $x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2$, $x^2+y^2\leqslant z^2$ 所确定.

解 (1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega} r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r$$

$$=2\pi[-\cos\varphi]_0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1=\frac{4}{5}\pi.$$

(2) 在球面坐标系中,不等式 $x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2$,即 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2az$,变为 $r^2\leqslant 2ar\cos\varphi$,即 $r\leqslant 2a\cos\varphi$; $x^2+y^2\leqslant z^2$ 变为 $r^2\sin^2\varphi\leqslant r^2\cos^2\varphi$,即 $\tan\varphi\leqslant 1$,亦即 $\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$.因此 Ω 可表示为

$$0\leqslant r\leqslant 2a\cos\varphi, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi(\text{图 } 9-45).$$

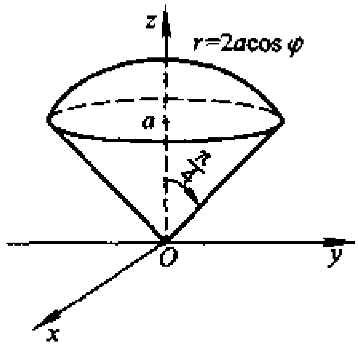


图 9 - 45

于是

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega} r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^3\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\cdot\frac{1}{4}(2a\cos\varphi)^4\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}4a^4\cos^5\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=8\pi a^4\left[-\frac{\cos^6\varphi}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{7}{6}\pi a^4.$$

11. 选用适当的坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}v$,其中 Ω 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=1, z=0, x=0, y=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域;

(2) $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v$,其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的闭区域;

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 及平面 $z=5$ 所围成的闭区域；

(4) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中闭区域 Ω 由不等式 $0<a\leqslant\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leqslant A$，$z\geqslant 0$ 所确定．

解 (1) 利用柱面坐标计算．Ω 可表示为

$$0\leqslant z\leqslant 1,0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho\int_0^1\mathrm{d}z$$

$$=\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1\left[z\right]_0^1=\frac{1}{8}.$$

(2) 在球面坐标系中，球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 的方程为 $r^2=r\cos\varphi$，即 $r=\cos\varphi$．Ω 可表示为

$$0\leqslant r\leqslant\cos\varphi,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi(\text{图 } 9-46).$$

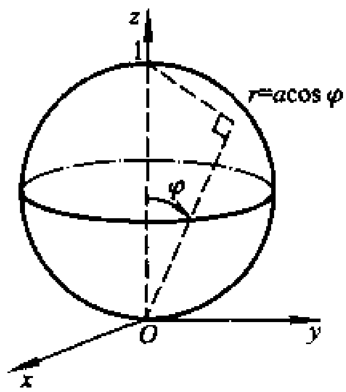


图 9-46

于是

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}r\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}r^3\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\frac{\cos^4\varphi}{4}\mathrm{d}\varphi$$

$$=-\frac{\pi}{2}\left[\frac{\cos^5\varphi}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{10}.$$

(3) 利用柱面坐标进行计算．Ω 可表示为

$$\frac{5}{2}\rho\leqslant z\leqslant 5,0\leqslant\rho\leqslant 2,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi(\text{图 } 9-47)\text{，于是}$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{\frac{5}{2}\rho}^5\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 \left(5 - \frac{5}{2}\rho\right) d\rho$$

$$= 2\pi \left[\frac{5}{4}\rho^4 - \frac{1}{2}\rho^5\right]_0^2 = 8\pi.$$

(4) 在球面坐标系中，Ω 可表示为

$$a \leqslant r \leqslant A, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

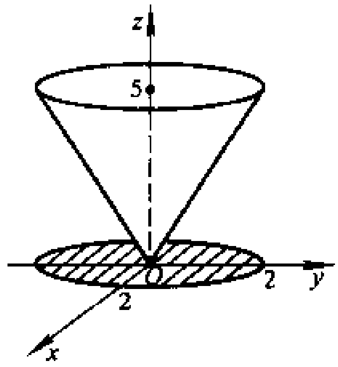


图 9－47

于是

$$\iiint_\Omega (x^2 + y^2) dv = \iiint_\Omega r^2 \sin^2 \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi \int_0^A r^4 dr$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{A^5 - a^5}{5}\right) = \frac{4\pi}{15}(A^5 - a^5).$$

12. 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积：

(1) $z = 6 - x^2 - y^2$ 及 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$；

(2) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az (a > 0)$ 及 $x^2 + y^2 = z^2$（含有 z 轴的部分）；

(3) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$；

(4) $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$ 及 $x^2 + y^2 = 4z$.

解 (1) 用直角坐标计算. 由 $z = 6 - x^2 - y^2$ 和 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 消去 z，解得 $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$，即 Ω 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2 + y^2 \leqslant 4$. 于是

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 6 - (x^2 + y^2), x^2 + y^2 \leqslant 4\}.$$

因此

$$V = \iiint_\Omega dv = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^{6-(x^2+y^2)} dz$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left[6 - (x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + y^2}\right] dx dy \text{（用极坐标）}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (6 - r^2 - r) r dr$$

$$= 2\pi \left[3r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3}\right]_0^2 = \frac{32}{3}\pi.$$

注 本题也可用“先重后单”的积分次序求解：

对固定的 z，当 $0 \leqslant z \leqslant 2$ 时，$D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant z^2\}$；当 $2 \leqslant z \leqslant 6$ 时，$D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 6 - z\}$（图 9－48）.

于是

$$V=V_1+V_2=\int_0^2 \mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_2^6 \mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2 \pi z^2\mathrm{d}z+\int_2^6 \pi(6-z)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{8}{3}\pi+8\pi=\frac{32}{3}\pi.$$

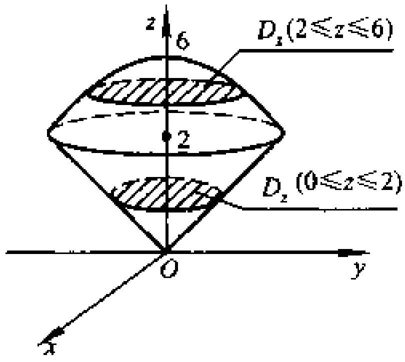


图 9－48

(2) 用球面坐标计算. 球面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 及圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的球面坐标方程分别为 $r=2a\cos\varphi$ 和 $\varphi=\frac{\pi}{4}$,故

$$\Omega=\{(r,\varphi,\theta)\,|\,0\leqslant r\leqslant 2a\cos\varphi,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}\text{(图 9－45)}.$$

于是

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{8a^3}{3}\sin\varphi\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{16\pi a^3}{3}\left[-\frac{1}{4}\cos^4\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi a^3.$$

注 本题若用"先重后单"的方法计算也很简便.

由 $x^2+y^2+z^2=2az$ 和 $x^2+y^2=z^2$ 解得 $z=a$. 对固定的 z,当 $0\leqslant z\leqslant a$ 时,$D_z=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant z^2\}$;当 $a\leqslant z\leqslant 2a$ 时,$D_z=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 2az-z^2\}$. 于是

$$V=V_1+V_2=\int_0^a \mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_a^{2a}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^a \pi z^2\mathrm{d}z+\int_a^{2a}\pi(2az-z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{3}\pi a^3+\frac{2}{3}\pi a^3=\pi a^3.$$

(3) 用柱面坐标计算. 曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=x^2+y^2$ 的柱面坐标方程分别为 $z=\rho$ 和 $z=\rho^2$. 消去 z,得 $\rho=1$,故它们所围的立体在 xOy 面上的投影区域为 $\rho\leqslant 1$(图 9－49). 因此

$$\Omega=\{(\rho,\theta,z)\,|\,\rho^2\leqslant z\leqslant\rho,0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}.$$

于是

$$V = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho \mathrm{d}\rho \int_{\rho^2}^{\rho} \mathrm{d}z$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho(\rho - \rho^2)\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{6}.$$

(本题也可用"先重后单"的方法方便地求得结果,读者可自己练习.)

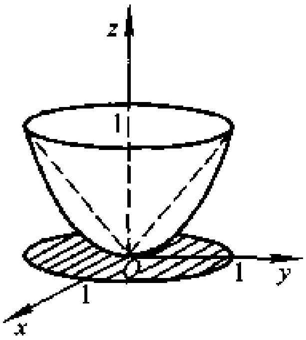


图 9 - 49

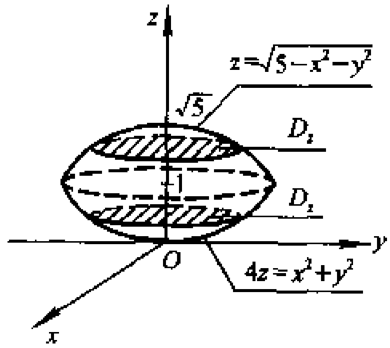


图 9 - 50

(4) 在直角坐标系中用"先重后单"的方法计算.由 $z = \sqrt{5-x^2-y^2}$ 和 $x^2 + y^2 = 4z$ 可解得 $z=1$.

对固定的 z,当 $0 \leqslant z \leqslant 1$ 时,$D_z = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 4z\}$;当 $1 \leqslant z \leqslant \sqrt{5}$时,$D_z = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 5-z^2\}$(图 9 - 50).
于是

$$V = V_1 + V_2 = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_1^{\sqrt{5}} \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \pi(4z)\mathrm{d}z + \int_1^{\sqrt{5}} \pi(5-z^2)\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi + \pi\left[5z - \frac{z^3}{3}\right]_1^{\sqrt{5}} - \frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-4).$$

(本题用柱面坐标计算也很方便,请读者自己练习.)

13. 球心在原点、半径为 R 的球体,在其上任意一点的密度的大小与这点到球心的距离成正比,求这球体的质量.

解 用球面坐标计算.Ω 为 $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$,即 $r \leqslant R$.按题设,密度函数 $\mu(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2} = kr(k>0)$.于是

$$M = \iiint_{\Omega} \mu(x,y,z)\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} kr \cdot r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^R r^3 \mathrm{d}r$$

$$= k \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^4}{4} = k\pi R^4.$$

习 题 9－4

1. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积.

解 如图 9－51，上半球面的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

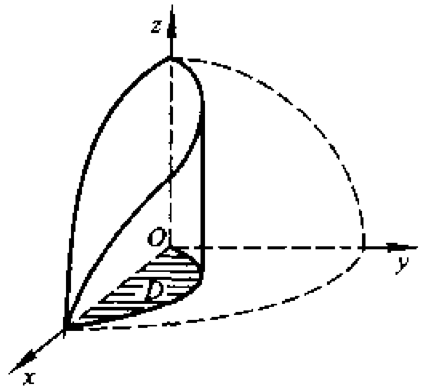


图 9－51

由曲面的对称性得所求面积为

$$A=4\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\iint\limits_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{(极坐标)}}4a\iint\limits_D\frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\mathrm{d}\theta=2a^2(\pi-2).$$

2. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积.

解 由 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z^2=2x \end{cases}$ 解得 $x^2+y^2=2x$，故曲面在 xOy 面上的投影区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$（图 9－52）.

被割曲面的方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2},$$

于是所求曲面的面积为

$$A=\iint\limits_D\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{(对称性)}}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \mathrm{d}\theta = 4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \sqrt{2}\pi.$$

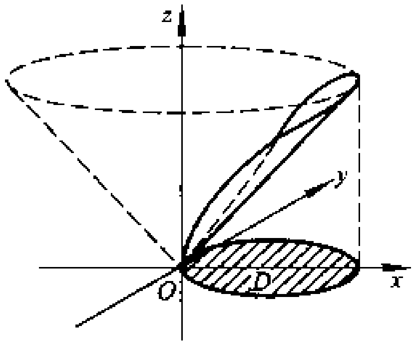


图 9－52

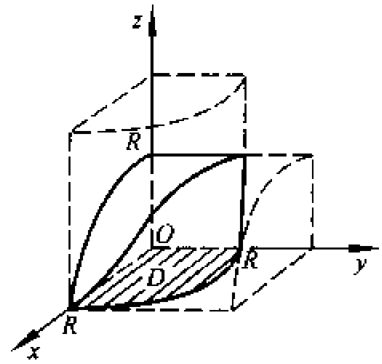


图 9－53

3. 求底圆半径相等的两个直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积.

解 如图 9－53,设第一卦限内的立体表面位于圆柱面 $x^2+z^2=R^2$ 上的那一部分的面积为 A,则由对称性知全部表面的面积为 $16A$.

$$A = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}+0}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = R\int_0^R \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y$$

$$= R\int_0^R \mathrm{d}x = R^2,$$

故全部表面积为 $16R^2$.

4. 设薄片所占的闭区域 D 如下,求均匀薄片的质心:

(1) D 由 $y=\sqrt{2px}$, $x=x_0$, $y=0$ 所围成;

(2) D 是半椭圆形闭区域 $\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1, y\geqslant 0\right.\right\}$;

(3) D 是介于两个圆 $r=a\cos\theta$, $r=b\cos\theta(0<a<b)$ 之间的闭区域.

解 (1) 设质心为$(\bar{x},\bar{y})$.

$$A = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y = \int_0^{x_0}\sqrt{2px}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2px_0^3};$$

$$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{x_0} x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y = \int_0^{x_0}\sqrt{2p}x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{2px_0^5};$$

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}} y\mathrm{d}y = \int_0^{x_0} px\mathrm{d}x$$

$$= \frac{px_0^2}{2},$$

于是 $\bar{x} = \frac{1}{A}\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{5}x_0, \bar{y} = \frac{1}{A}\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{8}\sqrt{2px_0} = \frac{3}{8}y_0$,

故所求质心为$\left(\frac{3}{5}x_0, \frac{3}{8}y_0\right)$.

(2) 因 D 对称于 y 轴,故质心$(\bar{x},\bar{y})$必位于 y 轴上,于是 $\bar{x}=0$.

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{A}\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{A}\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{2a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\pi ab}\cdot\frac{2}{3}ab^2 = \frac{4b}{3\pi}.$$

因此所求质心为$\left(0, \frac{4b}{3\pi}\right)$.

(3) 因 D 对称于 x 轴,故质心$(\bar{x},\bar{y})$位于 x 轴上,于是 $\bar{y}=0$(图 9-54).

$$A = \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(b^2-a^2),$$

$$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D r\cos\theta\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta} r^2\mathrm{d}r.$$

$$= \frac{2}{3}(b^3-a^3)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2}{3}(b^3-a^3)\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}(b^3-a^3),$$

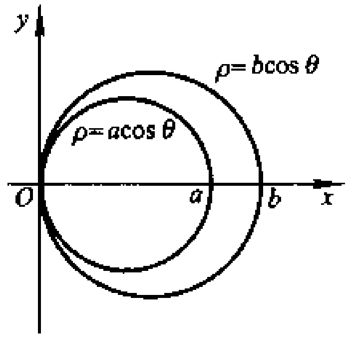


图 9-54

故
$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{a^2+ab+b^2}{2(a+b)}.$$

所求质心为$\left(\frac{a^2+ab+b^2}{2(a+b)}, 0\right)$.

5. 设平面薄片所占的闭区域 D 由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x$ 所围成，它在点(x,y)处的面密度 $\mu(x,y)=x^2y$，求该薄片的质心.

解 $M=\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} y\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1 \frac{1}{2}(x^4-x^6)\mathrm{d}x=\frac{1}{35};$$

$$M_x=\iint\limits_D y\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} y^2\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{3}(x^5-x^8)\mathrm{d}x=\frac{1}{54};$$

$$M_y=\iint\limits_D x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^3y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} y\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{2}(x^5-x^7)\mathrm{d}x=\frac{1}{48},$$

于是 $\bar{x}=\dfrac{M_y}{M}=\dfrac{35}{48}$；　　$\bar{y}=\dfrac{35}{54}$.

所求质心为$\left(\dfrac{35}{48},\dfrac{35}{54}\right)$.

6. 设有一等腰直角三角形薄片，腰长为 a，各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离的平方，求这薄片的质心.

解 如图 9-55，按题设，面密度 $\mu(x,y)=x^2+y^2$. 由对称性知 $\bar{x}=\bar{y}$.

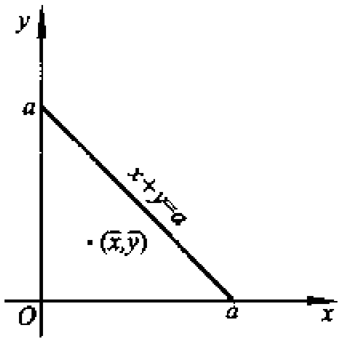


图 9-55

$$M=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{a-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^a\left[x^2(a-x)+\frac{(a-x)^3}{3}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{6}a^4;$$

$$M_y=\iint\limits_D x(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a x\mathrm{d}x\int_0^{a-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^a\left[x^3(a-x)+\frac{x(a-x)^3}{3}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^a \left(-\frac{4}{3}x^4 + 2ax^3 - a^2x^2 + \frac{a^3}{3}x \right)\mathrm{d}x = \frac{1}{15}a^5$$

因此 $$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2}{5}a, \overline{y} = \overline{x} = \frac{2}{5}a.$$

所求质心为$\left(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a\right)$.

7. 利用三重积分计算下列由曲面所围立体的质心(设密度 $\rho = 1$):

(1) $z^2 = x^2 + y^2, z = 1$;

(2) $z = \sqrt{A^2 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}(A > a > 0), z = 0$;

(3) $z = x^2 + y^2, x + y = a, x = 0, y = 0, z = 0$.

解 (1) 曲面所围立体为圆锥体,其顶点在原点,并关于 z 轴对称,又由于它是匀质的,因此它的质心位于 z 轴上,即有 $\overline{x} = \overline{y} = 0$. 立体的体积为 $V = \frac{1}{3}\pi$.

$$\overline{z} = \frac{1}{V}\iiint_\Omega z\mathrm{d}v = \frac{1}{V}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 z\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{V}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{1}{2}(1-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{3}{\pi}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4},$$

故所求质心为$\left(0, 0, \frac{3}{4}\right)$.

(2) 立体由两个同心的上半球面和 xOy 面所围成,关于 z 轴对称,又由于它是匀质的,故其质心位于 z 轴上,即有 $\overline{x} = \overline{y} = 0$. 立体的体积为 $V = \frac{2}{3}\pi(A^3 - a^3)$.

$$\overline{z} = \frac{1}{V}\iiint_\Omega z\mathrm{d}v = \frac{1}{V}\iiint_\Omega r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_a^A r^3\mathrm{d}r$$

$$= \frac{3}{2\pi(A^3 - a^3)}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{A^4 - a^4}{4}$$

$$\frac{3(A^4-a^4)}{8(A^3-a^3)},$$

故立体质心为$\left(0,0,\dfrac{3(A^4-a^4)}{8(A^3-a^3)}\right)$.

(3) 如图 9 - 56, $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a-x,0\leqslant z\leqslant x^2+y^2\}$.

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^a\left[x^2(a-x)+\frac{1}{3}(a-x)^3\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^a\left[ax^2-x^3+\frac{1}{3}(a-x)^3\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{6}a^4;$$

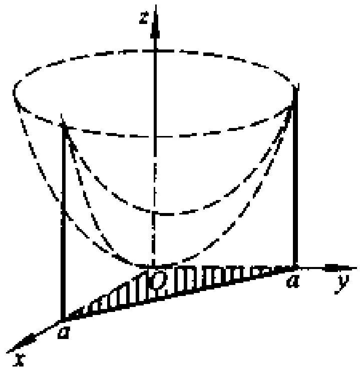


图 9 - 56

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=\frac{1}{V}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\frac{1}{2}(x^4+2x^2y^2+y^4)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2V}\int_0^a\left[x^4(a-x)+\frac{2}{3}x^2(a-x)^3+\frac{1}{5}(a-x)^5\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{a^4}\cdot\frac{7a^6}{90}=\frac{7}{30}a^2;$$

$$\bar{x}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v=\frac{1}{V}\int_0^a x\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^a x\left[x^2(a-x)+\frac{1}{3}(a-x)^3\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{6}{a^4}\cdot\frac{a^5}{15}=\frac{2}{5}a,$$

由于立体匀质且关于平面 $y=x$ 对称,故 $\bar{y}=\bar{x}=\dfrac{2}{5}a$.

所求质心为$\left(\dfrac{2}{5}a,\dfrac{2}{5}a,\dfrac{7}{30}a^2\right)$.

8. 设球体占有闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz\}$,它在内部各点处的密度的大小等于该点到坐标原点的距离的平方. 试求这球体的质心.

解 在球面坐标系中, Ω 可表示为

$$0\leqslant r\leqslant 2R\cos\varphi,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

球体内任意一点(x,y,z)处的密度大小为

$$\rho = x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

由于球体的几何形状及质量分布均关于 z 轴对称，故可知其质心位于 z 轴上，因此 $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$M = \iiint_{\Omega} \rho \mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^2 \cdot r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{32}{5} R^5 \cos^5\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{32}{15}\pi R^5;$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} \rho z \mathrm{d}v = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^2 \cdot r\cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r$$

$$= \frac{2\pi}{M} \int_0^{2\pi} \frac{64}{6} R^6 \cos^7\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{5}{4} R.$$

故球体的质心为 $\left(0, 0, \frac{5}{4}R\right)$.

注 从以上两题的题解可看出，在计算立体的质心时，要注意利用对称性来减少运算量. 对匀质立体来说，只要考虑立体几何形状的对称性(如第 7 题)；但对非匀质立体来说，除了立体几何形状的对称性外，还需注意立体的质量分布是否也具有相应的对称性(如第 8 题).

9. 设均匀薄片(面密度为常数 1)所占闭区域 D 如下，求指定的转动惯量：

(1) $D = \left\{(x, y) \middle| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$，求 I_y；

(2) D 由抛物线 $y^2 = \frac{9}{2}x$ 与直线 $x = 2$ 所围成，求 I_x 和 I_y；

(3) D 为矩形闭区域 $\{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b\}$，求 I_x 和 I_y.

解 (1) $I_y = \iint_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-a}^{a} x^2 \mathrm{d}x \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} \mathrm{d}y$

$$= \frac{2b}{a} \int_{-a}^{a} x^2 \sqrt{a^2 - x^2} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{4b}{a} \int_0^{a} x^2 \sqrt{a^2 - x^2} \mathrm{d}x$$

令 $x = a\sin t$ 换元，则

上式 $= \frac{4b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \sin^2 t \cos t \cdot a\cos t \mathrm{d}t$

$$= 4a^3 b \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \mathrm{d}t\right]$$

$$= 4a^3 b \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}\pi a^3 b.$$

(2) 如图 9－57，$D=\left\{(x,y)\mid -3\sqrt{\frac{x}{2}}\leqslant y\leqslant 3\sqrt{\frac{x}{2}},0\leqslant x\leqslant 2\right\}$.

$$I_x=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{对称性}}2\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{3\sqrt{\frac{x}{2}}}y^2\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^2\frac{27}{2\sqrt{2}}x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{72}{5};$$

$$I_y=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{对称性}}2\int_0^2 x^2\mathrm{d}x\int_0^{3\sqrt{\frac{x}{2}}}\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^2\frac{3}{\sqrt{2}}x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x=\frac{96}{7}.$$

(3) $I_x=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b y^2\mathrm{d}y=\dfrac{ab^3}{3}$;

$I_y=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a x^2\mathrm{d}x\int_0^b\mathrm{d}y=\dfrac{a^3b}{3}$.

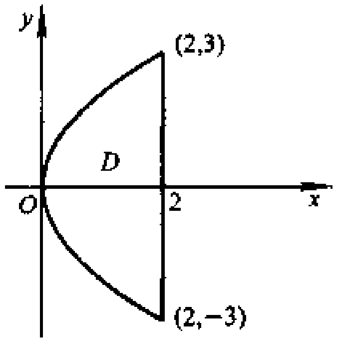


图 9－57

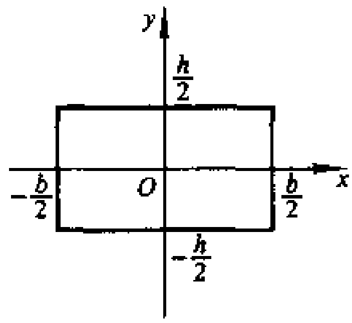


图 9－58

10. 已知均匀矩形板(面密度为常量 μ)的长和宽分别为 b 和 h，计算此矩形板对于通过其形心且分别与一边平行的两轴的转动惯量.

解 建立如图 9－58 的坐标系，使原点 O 为矩形板的形心，x 轴和 y 轴分别平行于矩形的两边，则所求的转动惯量为

$$I_x=\iint\limits_D y^2\mu\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mu\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{12}\mu bh^3;$$

$$I_y=\iint\limits_D x^2\mu\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mu\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}x^2\mathrm{d}x\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{12}\mu hb^3.$$

11. 一均匀物体(密度 ρ 为常量)占有的闭区域 Ω 由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=0,|x|=a,|y|=a$ 所围成，

(1) 求物体的体积；

(2) 求物体的质心；

(3) 求物体关于 z 轴的转动惯量.

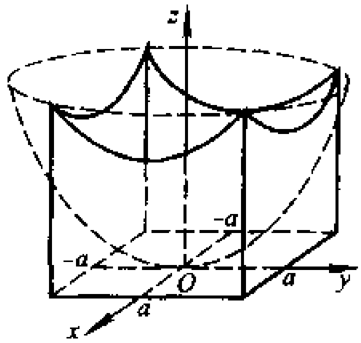


图 9－59

解 (1) 如图 9－59，由 Ω 的对称性可知

$$V=4\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z$$

$$=4\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a (x^2+y^2)\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^a\left(ax^2+\frac{a^3}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}a^4.$$

(2) 由对称性可知，质心位于 z 轴上，故 $\overline{x}=\overline{y}=0$.

$$\overline{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}\rho z\,\mathrm{d}v\xlongequal{\text{对称性}}\frac{4}{V}\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2} z\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4}{V}\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a \frac{1}{2}(x^4+2x^2y^2+y^4)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{V}\int_0^a\left(ax^4+\frac{2}{3}a^3x^2+\frac{1}{5}a^5\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{15}a^2.$$

(3) $$I_z=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x^2+y^2)\mathrm{d}v\xlongequal{\text{对称性}}4\rho\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

$$=4\rho\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a (x^4+2x^2y^2+y^4)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{112}{45}\rho a^6.$$

12. 求半径为 a、高为 h 的均匀圆柱体对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量(设密度 $\rho=1$).

解 建立空间直角坐标系，使原点位于圆柱体的中心，z 轴平行于母线，则圆柱体所占的空间闭区域

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant a^2,-\frac{h}{2}\leqslant z\leqslant\frac{h}{2}\right\}$$

$$\xlongequal{\text{柱面坐标}}\left\{(\rho,\theta,z)\,\middle|\,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\rho\leqslant a,-\frac{h}{2}\leqslant z\leqslant\frac{h}{2}\right\}.$$

于是所求的转动惯量为

$$I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\cdot\frac{a^4}{4}\cdot h=\frac{1}{2}\pi h a^4.$$

13. 设面密度为常量 μ 的匀质半圆环形薄片占有闭区域 $D=\{(x,y,0)\mid R_1\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant R_2, x\geqslant 0\}$，求它对位于 z 轴上点 $M_0(0,0,a)(a>0)$ 处单位质量的质点的引力 F.

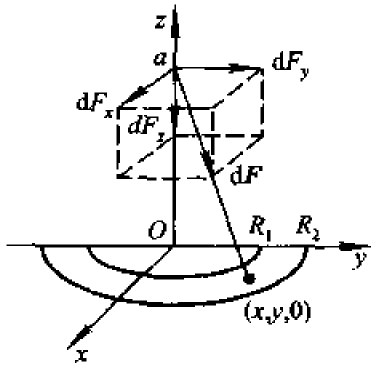


图 9－60

解 如图 9－60，引力元素 d$\boldsymbol{F}$ 在 x 轴和 z 轴上的分量分别为

$$\mathrm{d}F_x=G\frac{\mu x}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma$$

和
$$\mathrm{d}F_z=G\frac{\mu(-a)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma.$$

于是
$$F_x=G\mu\iint_D\frac{x}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}G\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho\cos\theta}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=G\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho$$

$$=2G\mu\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho\text{（令 }\rho=a\tan t\text{ 换元）}$$

$$=2G\mu\int_{\arctan\frac{R_1}{a}}^{\arctan\frac{R_2}{a}}\frac{a^2\tan^2 t}{a^3\sec^3 t}\cdot a\sec^2 t\mathrm{d}t$$

$$=2G\mu\int_{\arctan\frac{R_1}{a}}^{\arctan\frac{R_2}{a}}(\sec t-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=2G\mu\left[\ln(\sec t+\tan t)-\sin t\right]_{\arctan\frac{R_1}{a}}^{\arctan\frac{R_2}{a}}$$

$$=2G\mu\left(\ln\frac{\sqrt{R_2^2+a^2}+R_2}{\sqrt{R_1^2+a^2}+R_1}-\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+a^2}}+\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right);$$

$$F_z=-Ga\mu\iint_D\frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}-Ga\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho$$

$$=\pi Ga\mu\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+a^2}}\right]_{R_1}^{R_2}$$

$$=\pi G a\mu\left(\frac{1}{\sqrt{R_2^2+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right),$$

由于 D 关于 x 轴对称，且质量均匀分布，故 $F_y=0$.

因此引力 $\boldsymbol{F}=\left\{2G\mu\left[\ln\frac{\sqrt{R_2^2+a^2}+R_2}{\sqrt{R_1^2+a^2}+R_1}-\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+a^2}}+\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right],0,\right.$

$$\left.\pi G a\mu\left(\frac{1}{\sqrt{R_2^2+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right)\right\}.$$

14. 设均匀柱体密度为 ρ，占有闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant R^2,0\leqslant z\leqslant h\}$，求它对于位于点 $M_0(0,0,a)(a>h)$ 处的单位质量的质点的引力.

解 由柱体的对称性和质量分布的均匀性知 $F_x=F_y=0$. 引力沿 z 轴的分量

$$\begin{aligned}F_z&=\iiint_\Omega G\rho\frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v\\&=G\rho\int_0^h(z-a)\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}\\&\xlongequal{\text{柱面坐标}}G\rho\int_0^h(z-a)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{[r^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}\\&=2\pi G\rho\int_0^h(z-a)\left[\frac{1}{a-z}-\frac{1}{\sqrt{R^2+(z-a)^2}}\right]\mathrm{d}z\\&=2\pi G\rho\int_0^h\left[-1-\frac{z-a}{\sqrt{R^2+(z-a)^2}}\right]\mathrm{d}z\\&=-2\pi G\rho\left[h+\sqrt{R^2+(h-a)^2}-\sqrt{R^2+a^2}\right].\end{aligned}$$

*习 题 9－5

1. 求下列含参变量的积分所确定的函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\int_x^{1+x}\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\int_0^2 y^2\cos(xy)\mathrm{d}y$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\int_x^{1+x}\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}=\int_0^{1+0}\frac{\mathrm{d}y}{1+0+y^2}$

$$=[\arctan y]_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,dy=\int_{-1}^{1}|y|\,dy=2\int_{0}^{1}y\,dy=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\int_{0}^{2}y^2\cos(xy)\,dy=\int_{0}^{2}y^2(\cos 0)\,dy=\dfrac{8}{3}$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $\varphi(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}(y^2\sin x-y^3)\,dy$； (2) $\varphi(x)=\int_{0}^{x}\dfrac{\ln(1+xy)}{y}\,dy$；

(3) $\varphi(x)=\int_{x^2}^{x^3}\arctan\dfrac{y}{x}\,dy$； (4) $\varphi(x)=\int_{x}^{x^2}e^{-xy^2}\,dy$.

解(1) $\varphi'(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}y^2\cos x\,dy+(\cos^2 x\sin x-\cos^3 x)(\cos x)'$

$$-(\sin^2 x\sin x-\sin^3 x)(\sin x)'$$

$$=\frac{1}{3}\cos x(\cos^3 x-\sin^3 x)+(\cos x-\sin x)\sin x\cos^2 x$$

$$=\frac{1}{3}\cos x(\cos x-\sin x)(1+2\sin 2x).$$

(2) $\varphi'(x)=\int_{0}^{x}\dfrac{1}{1+xy}\,dy+\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$

$$=\frac{1}{x}[\ln(1+xy)]_0^x+\frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

$$=\frac{2}{x}\ln(1+x^2).$$

(3) $\varphi'(x)=\int_{x^2}^{x^3}\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)dy+\arctan x^2\cdot 3x^2-\arctan x\cdot 2x$

$$=-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|_{x^2}^{x^3}+3x^2\arctan x^2-2x\arctan x$$

$$=\ln\sqrt{\frac{1+x^2}{1+x^4}}+3x^2\arctan x^2-2x\arctan x.$$

(4) $\varphi'(x)=\int_{x}^{x^2}e^{-xy^2}(-y^2)\,dy+e^{-x^5}\cdot 2x-e^{-x^3}\cdot 1$

$$=2xe^{-x^5}-e^{-x^3}-\int_{x}^{x^2}y^2e^{-xy^2}\,dy.$$

3. 设 $F(x)=\int_{0}^{x}(x+y)f(y)\,dy$，其中 $f(y)$ 为可微分的函数，求 $F''(x)$.

解 $F'(x)=\int_{0}^{x}f(y)\,dy+2xf(x)$；

$$F''(x)=f(x)+2f(x)+2xf'(x)=3f(x)+2xf'(x).$$

4. 应用对参数的微分法,计算下列积分:

(1) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}\quad(|a|<1)$;

(2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2 x+a^2\sin^2 x)\mathrm{d}x\quad(a>0)$.

解 (1) 设 $\varphi(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$,

则 $\varphi(0)=0,\varphi(a)=I$.由于

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{2}{1-\alpha^2\cos^2 x},$$

故

$$\varphi'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{1-\alpha^2\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\mathrm{d}\tan x}{\sec^2 x-\alpha^2}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\tan x}{(1-\alpha^2)+\tan^2 x}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left[\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

于是

$$I=\varphi(a)-\varphi(0)=\int_0^a\varphi'(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int_0^a\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\mathrm{d}\alpha$$

$$=\pi\arcsin a.$$

(2) 设 $\varphi(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2 x+\alpha^2\sin^2 x)\mathrm{d}x$,

则 $\varphi(1)=0,\varphi(a)=I$.由于

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[\ln(\cos^2 x+\alpha^2\sin^2 x)]=\frac{2\alpha\sin^2 x}{\cos^2 x+\alpha^2\sin^2 x},$$

故

$$\varphi'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\alpha\sin^2 x}{\cos^2 x+\alpha^2\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{u=\tan x}2\alpha\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+\alpha^2u^2}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

$$=\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+\alpha^2u^2}\right](\alpha\neq1)$$

$$=\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\alpha}\right)=\frac{\pi}{\alpha+1};$$

又当 $\alpha=1$ 时，$\varphi'(1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，

因此 $\varphi'(\alpha)$在 $x=1$ 处连续. 从而对任一 $a>0$，$\varphi'(\alpha)$在区间$[1,a]$(或$[a,1]$)上连续. 于是

$$I=\varphi(a)-\varphi(1)=\int_1^a\varphi'(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int_1^a\frac{\pi}{\alpha+1}\mathrm{d}\alpha$$

$$=\pi\ln\frac{a+1}{2}.$$

5. 计算下列积分：

(1) $\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$；

(2) $\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x\ (0<a<b)$.

解 (1) 因为$\frac{\arctan x}{x}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}$，

故 $$\text{原式}=\int_0^1\left[\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}\right]\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\qquad\text{(交换积分次序)}$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\right]\mathrm{d}y,$$

由于 $$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+y^2\sin^2 t}$$

$$\xlongequal{u=\tan t}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+(1+y^2)u^2}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\left[\arctan(\sqrt{1+y^2}\,u)\right]_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}},$$

因此 $$\text{原式}=\int_0^1\frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}\left[\ln(y+\sqrt{1+y^2})\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

(2) 因为 $$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y\mathrm{d}y,$$

故 $$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\int_a^b x^y\mathrm{d}y\qquad\text{(交换积分次序)}$$

$$=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\mathrm{d}x.$$

由于 $$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\mathrm{d}x \xlongequal{x=\mathrm{e}^{-t}} \int_{+\infty}^0 \sin t\cdot\mathrm{e}^{-yt}(-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}\sin t\cdot\mathrm{e}^{-(y+1)t}\mathrm{d}t \qquad \text{（分部积分）}$$

$$=\frac{1}{1+(y+1)^2}\mathrm{e}^{-(y+1)t}[\cos t-(y+1)\sin t]\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{1+(y+1)^2},$$

因此 $$\text{原式}=\int_a^b\frac{1}{1+(y+1)^2}\mathrm{d}y=[\arctan(y+1)]_a^b$$

$$=\arctan(b+1)-\arctan(a+1).$$

总习题九

1．选择以下各题中给出的四个结论中一个正确的结论：

(1) 设有空间闭区域 $\Omega_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0\}$，$\Omega_2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$，则有__________.

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1}x\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}x\mathrm{d}v$.　　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1}y\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}y\mathrm{d}v$.

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}z\mathrm{d}v$.　　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1}xyz\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}xyz\mathrm{d}v$.

(2) 设有平面闭区域 $D=\{(x,y)\mid -a\leqslant x\leqslant a,x\leqslant y\leqslant a\}$，$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a,x\leqslant y\leqslant a\}$．则 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________.

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　(B) $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(D) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　(D) 0.

解 (1) 先说明(A)不正确．由于 Ω_1 关于 yOz 面对称，而被积函数 x 关于 x 是奇函数，故 $\iiint\limits_{\Omega_1}x\mathrm{d}v=0$，而 $\iiint\limits_{\Omega_2}x\mathrm{d}v\neq 0$，故(A)不正确．类似可说明(B)和(D)不正确．再说明(C)是正确的．设 $\Omega_3=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0,$

$x\geqslant 0\}$. 由于被积函数 z 关于 x 是偶函数，而 Ω_3 与 $\Omega_1\setminus\Omega_3$[①] 关于 yOz 面对称，故 $\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}v=2\iiint\limits_{\Omega_3} z\mathrm{d}v$. 又由于被积函数 z 关于 y 也是偶函数，且 Ω_2 与 $\Omega_3\setminus\Omega_2$ 关于 xOz 面对称，故 $\iiint\limits_{\Omega_3} z\mathrm{d}v=2\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}v$[②]. 因此应选 (C).

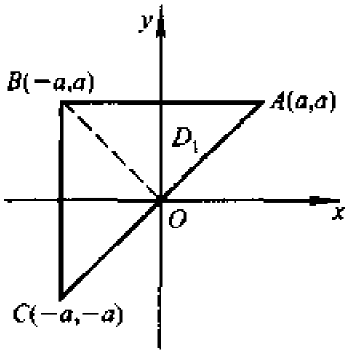


图 9-61

(2) 记 D 的三个顶点为 $A(a,a)$, $B(-a,a)$, $C(-a,-a)$(图 9-61). 连结 O、B, 则 D 为 $\triangle COB$ 和 $\triangle BOA$ 之并. 由于 $\triangle COB$ 关于 x 轴对称，$\triangle AOB$ 关于 y 轴对称，而函数 xy 关于 y 和 x 均是奇函数，从而有

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\triangle AOB} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\triangle COB} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+0=0;$$

又由于函数 $\cos x\sin y$ 关于 y 是奇函数，关于 x 是偶函数，从而有

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{\triangle COB}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\triangle AOB}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=0+2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

因此应选(A).

2. 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D (1+x)\sin y\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是顶点分别为 $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$ 和 $(0,1)$ 的梯形闭区域；

(2) $\iint\limits_D (x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\sin x, 0\leqslant x\leqslant\pi\}$;

(3) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是圆周 $x^2+y^2=Rx$ 所围成的闭区域；

(4) $\iint\limits_D (y^2+3x-6y+9)\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$.

解 (1) D 可表示为 $0\leqslant y\leqslant 1+x$, $0\leqslant x\leqslant 1$, 于是

$$\iint\limits_D (1+x)\sin y\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1+x}(1+x)\sin y\mathrm{d}y$$

---

① $\Omega_1\setminus\Omega_3=\{(x,y,z)\mid(x,y,z)\in\Omega_1$ 且 $(x,y,z)\notin\Omega_3\}$, 称为 Ω_1 与 Ω_3 的差集.

② 关于三重积分中如何利用对称性的问题，请读者参阅本书习题 9-1 第 2 题题解的注 1、2，得出有关结论.

$$= \int_0^1 [(1+x)-(1+x)\cos(1+x)]\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{t=1+x} \int_1^2 (t - t\cos t)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} - t\sin t - \cos t\right]_1^2$$

$$= \frac{3}{2} + \sin 1 + \cos 1 - 2\sin 2 - \cos 2.$$

(2) 由于
$$\iint_D x^2 \mathrm{d}\sigma = \int_0^\pi x^2\mathrm{d}x \int_0^{\sin x} \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^\pi x^2 \sin x\mathrm{d}x = -[x^2\cos x]_0^\pi + 2\int_0^\pi x\cos x\mathrm{d}x$$

$$= \pi^2 + 2\left(x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x\right) = \pi^2 - 4;$$

$$\iint_D y^2\mathrm{d}\sigma = \int_0^\pi \mathrm{d}x\int_0^{\sin x} y^2\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^\pi \sin^3 x\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\mathrm{d}x^{①}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9},$$

故
$$\iint_D (x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma = \iint_D x^2\mathrm{d}\sigma - \iint_D y^2\mathrm{d}\sigma = (\pi^2-4) - \frac{4}{9}$$

$$= \pi^2 - \frac{40}{9}.$$

(3) 利用极坐标计算. 在极坐标系中,

$$D = \left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\rho\leqslant R\cos\theta, -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

于是

$$\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D \sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}[(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}]_0^{R\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3}{3}(1-|\sin^3\theta|)\mathrm{d}\theta$$

---

① 一般有: $\int_0^\pi \sin^n x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x$, 参阅上册习题 5－3 第 8 题

$$= \frac{2}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right) = \frac{R^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right).$$

注 如果忽略 $\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上非正，而按 $(R^2-R^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} = R^3\sin^3\theta$ 计算，将导致错误．这是一类常见错误，要注意避免．

(4) 利用对称性可知 $\iint\limits_D 3x\mathrm{d}\sigma = 0$，$\iint\limits_D 6y\mathrm{d}\sigma = 0$，

又
$$\iint\limits_D 9\mathrm{d}\sigma = 9\times(D\text{ 的面积}) = 9\pi R^2,$$

$$\iint\limits_D y^2\mathrm{d}\sigma \xlongequal{\text{极坐标}} \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \rho^2\sin^2\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^R\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$= \pi\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{4}R^4,$$

因此
$$\text{原式} = \frac{\pi}{4}R^4 + 9\pi R^2.$$

3．交换下列二次积分的次序：

(1) $\int_0^4\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)}f(x,y)\mathrm{d}x$；

(2) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{2y}f(x,y)\mathrm{d}x + \int_1^3\mathrm{d}y\int_0^{3-y}f(x,y)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

解 (1) 所给的二次积分等于闭区域 D 上的二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D = \left\{(x,y)\,\middle|\, -\sqrt{4-y}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}(y-4), 0\leqslant y\leqslant 4\right\}$（图9－62），将 D 表达为 $2x+4\leqslant y\leqslant 4-x^2$，$-2\leqslant x\leqslant 0$，则得

$$\int_0^4\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\frac{1}{2}(y-4)}f(x,y)\mathrm{d}x = \int_{-2}^0\mathrm{d}x\int_{2x+4}^{4-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(2) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D = D_1\cup D_2$，$D_1 = \{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2y, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，$D_2 = \{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 3-y, 1\leqslant y\leqslant 3\}$（图9－63）．

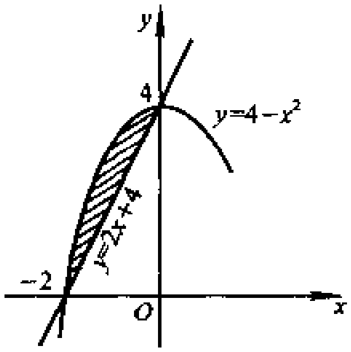


图 9－62

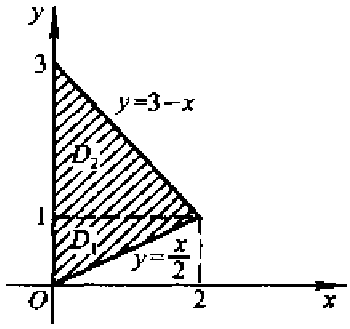


图 9－63

D 可表达为 $\left\{(x,y)\left|\frac{x}{2}\leqslant y\leqslant 3-x,0\leqslant x\leqslant 2\right.\right\}$，于是

$$原式=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{3-x}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(3) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)|\sqrt{x}\leqslant y\leqslant 1+\sqrt{1-x^2},0\leqslant x\leqslant 1\}$（图 9－64）. 将 D 表达为 $D_1\cup D_2$，其中 $D_1=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant y^2,0\leqslant y\leqslant 1\}$；$D_2=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant\sqrt{2y-y^2},1\leqslant y\leqslant 2\}$，于是

$$原式=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{y^2}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

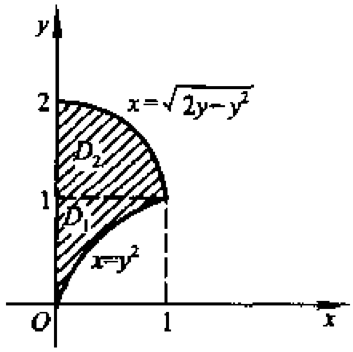


图 9－64

4. 证明：

$$\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^y e^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a(a-x)e^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x.$$

证 上式左端的二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D e^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant y,0\leqslant y\leqslant a\}=\{(x,y)|x\leqslant y\leqslant a,0\leqslant x\leqslant a\}$.

于是交换积分次序即得

$$\begin{aligned}\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^y e^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^a\mathrm{d}x\int_x^a e^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}y\\&=\int_0^a(a-x)e^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

5. 把积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表为极坐标形式的二次积分，其中积分区域 $D=\{(x,y)|x^2\leqslant y\leqslant 1,-1\leqslant x\leqslant 1\}$.

解　积分域 D 如图 9－65 所示. 抛物线 $y=x^2$ 的极坐标方程为 $\rho=\sec\theta\tan\theta$; 直线 $y=1$ 的极坐标方程为 $\rho=\csc\theta$. 用射线 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 和 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 将 D 分成 D_1、D_2、D_3 三部分:

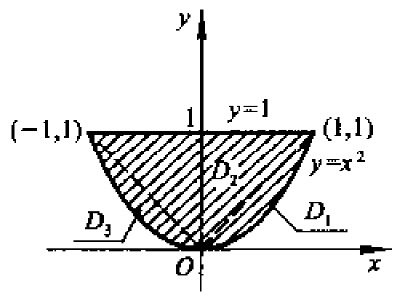


图 9－65

$D_1: 0\leqslant\rho\leqslant\sec\theta\tan\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$;

$D_2: 0\leqslant\rho\leqslant\csc\theta, \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}$;

$D_3: 0\leqslant\rho\leqslant\sec\theta\tan\theta, \frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\pi$.

因此

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=&\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta\tan\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\\&+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\csc\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\\&+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta\tan\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.\end{aligned}$$

6. 把积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 化为三次积分, 其中积分区域 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$, $y=x^2$ 及平面 $y=1$, $z=0$ 所围成的闭区域.

解　Ω 为一曲顶柱体, 其顶为 $z=x^2+y^2$, 底位于 xOy 面上, 其侧面由抛物柱面 $y=x^2$ 及平面 $y=1$ 所组成. 由此可知 Ω 在 xOy 面上的投影区域

$$D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2\leqslant y\leqslant 1, -1\leqslant x\leqslant 1\}.$$

因此

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z\\&=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

7. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是两个球: $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz(R>0)$ 的公共部分;

(2) $\iiint_\Omega \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}v$, 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域;

(3) $\iiint_\Omega (y^2+z^2)\mathrm{d}v$, 其中 Ω 是由 xOy 平面上曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成

的曲面与平面 $x=5$ 所围成的闭区域.

解 (1) **解法一** 利用直角坐标,采用"先重后单"的积分次序.

由$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x^2+y^2+z^2=2Rz\end{cases}$解得 $z=\dfrac{R}{2}$,于是用平面 $z=\dfrac{R}{2}$把 Ω 分成Ω_1 和 Ω_2 两部分,其中

$$\Omega_1=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant 2Rz-z^2,0\leqslant z\leqslant\frac{R}{2}\right\};$$

$$\Omega_2=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant R^2-z^2,\frac{R}{2}\leqslant z\leqslant R\right\}(\text{图 }9-66).$$

于是

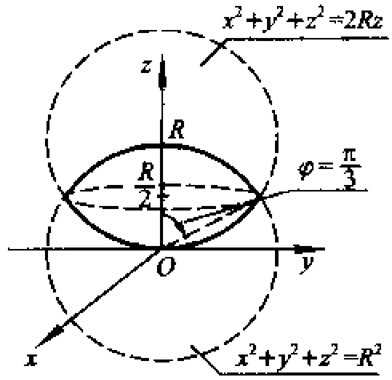


图 9-66

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\iiint\limits_{\Omega_1}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\Omega_2}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\int_0^{\frac{R}{2}}z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2Rz-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad+\int_{\frac{R}{2}}^{R}z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{R}{2}}\pi(2Rz-z^2)\cdot z^2\mathrm{d}z\\&\quad+\int_{\frac{R}{2}}^{R}\pi(R^2-z^2)\cdot z^2\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{40}\pi R^5+\frac{47}{480}\pi R^5=\frac{59}{480}\pi R^5.\end{aligned}$$

解法二 利用球面坐标计算.作圆锥面 $\varphi=\arccos\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$,将 Ω 分成Ω'_1 和 Ω'_2 两部分:

$$\Omega'_1=\left\{(r,\varphi,\theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant R,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{3},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right\};$$

$$\Omega'_2=\left\{(r,\varphi,\theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant 2R\cos\varphi,\frac{\pi}{3}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right\}.$$

于是

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\iiint\limits_{\Omega'_1}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\Omega'_2}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}r^4\mathrm{d}r\\&\quad+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^4\mathrm{d}r\end{aligned}$$

$$= \frac{7}{60}\pi R^5 + \frac{1}{160}\pi R^5 = \frac{59}{480}\pi R^5 .$$

(2) 由于积分区域 Ω 关于 xOy 面对称，而被积函数关于 z 是奇函数，故所求积分等于零.

(3) 积分区域 Ω 由旋转抛物面 $y^2 + z^2 = 2x$ 和平面 $x = 5$ 所围成，Ω 在 yOz 面上的投影区域

$$D_{yz} = \{(y, z) \mid y^2 + z^2 \leqslant 10\}.$$

因此 Ω 可表示为：

$$\frac{1}{2}(y^2 + z^2) \leqslant x \leqslant 5, \qquad 0 \leqslant y^2 + z^2 \leqslant 10.$$

于是

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2)\mathrm{d}v &= \iint_{D_{yz}} (y^2 + z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \int_{\frac{y^2+z^2}{2}}^{5} \mathrm{d}x \\
&= \iint_{D_{yz}} (y^2 + z^2)\left(5 - \frac{y^2 + z^2}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&\xlongequal{\text{极坐标}} \iint_{D_{yz}} \rho^2\left(5 - \frac{\rho^2}{2}\right)\rho\mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{10}} \rho^3\left(5 - \frac{\rho^2}{2}\right)\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{250}{3}\pi.
\end{aligned}$$

注 根据本题的积分区域 Ω 的特点，应将 Ω 向 yOz 面投影，即采用先对 x、后对 y 和 z 的积分次序较宜.

8. 求平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 被三坐标面所割出的有限部分的面积.

解 平面方程为 $z = c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y$，它被三坐标面割出的有限部分在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为由 x 轴、y 轴和直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 所围成的三角形区域. 于是所求面积为

$$\begin{aligned}
A &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{ab}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{ab}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\cdot\frac{1}{2}ab$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

9. 在均匀的半径为 R 的半圆形薄片的直径上,要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片,为了使整个均匀薄片的质心恰好落在圆心上,问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少?

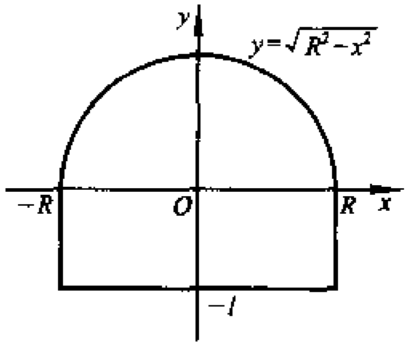


图 9-67

解 建立如图 9-67 所示的坐标系. 设矩形另一边的长度为 l,则质心的纵标

$$\bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma}{A}=\frac{\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-l}^{\sqrt{R^2-x^2}}y\mathrm{d}y}{A}$$

$$=\frac{\int_{-R}^{R}(R^2-x^2-l^2)\mathrm{d}x}{2A}=\frac{\frac{2}{3}R^3-l^2R}{A},$$

由题设 $\bar{y}=0$ 即可算得

$$l=\sqrt{\frac{2}{3}}R.$$

10. 求由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=1$ 所围成的均匀薄片(面密度为常数 μ)对于直线 $y=-1$ 的转动惯量.

解 闭区域 $D=\{(x,y)\mid-\sqrt{y}\leqslant x\leqslant\sqrt{y},0\leqslant y\leqslant 1\}$,所求的转动惯量为

$$I=\iint\limits_D\mu(y+1)^2\mathrm{d}\sigma=\mu\int_0^1(y+1)^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x$$

$$=2\mu\int_0^1\sqrt{y}(y+1)^2\mathrm{d}y$$

$$=2\mu\int_0^1(y^{\frac{5}{2}}+2y^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}y$$

$$=\frac{368}{105}\mu.$$

11. 设在 xOy 面上有一质量为 M 的匀质半圆形薄片,占有平面闭区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2,y\geqslant 0\}$,过圆心 O 垂直于薄片的直线上有一质量为 m 的质点 P,$OP=a$. 求半圆形薄片对质点 P 的引力.

解 求解本题时,所有的分析和计算过程均与习题 9-4 的第 13 题雷同,故这里略去详细的计算步骤.

积分区域 $D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant R,0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$.

由于 D 关于 y 轴对称，且质量均匀分布，故 $F_x=0$. 又薄片的面密度 $\mu=\dfrac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2}=\dfrac{2M}{\pi R^2}$，于是

$$
\begin{aligned}
F_y &= Gm\mu\iint\limits_D \frac{y}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma \\
&\xlongequal{\text{极坐标}} Gm\mu\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \frac{\rho\sin\theta}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho \\
&= 2Gm\mu\int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{4GmM}{\pi R^2}\left(\ln\frac{\sqrt{R^2+a^2}+R}{a}-\frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\right);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_z &= -Gam\mu\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -Gam\mu\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \frac{\rho}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho \\
&= -\frac{2GamM}{R^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}\right) \\
&= -\frac{2GmM}{R^2}\left(1-\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\right),
\end{aligned}
$$

所求引力为 $\boldsymbol{F}=(0,F_y,F_z)$.

第十章 曲线积分与曲面积分

习 题 10－1

1. 设在 xOy 面内有一分布着质量的曲线弧 L，在点 (x,y) 处它的线密度为 $\mu(x,y)$. 用对弧长的曲线积分分别表达：

(1) 这曲线弧对 x 轴、对 y 轴的转动惯量 I_x、I_y；

(2) 这曲线弧的质心坐标 $\bar{x}$、$\bar{y}$.

解 (1) 设想将 L 分成 n 个小弧段，取出其中任意一段记作 ds（其长度也记作 ds），(x,y) 为 ds 上一点，则 ds 对 x 轴和对 y 轴的转动惯量的近似值分别为

$$dI_x = y^2\mu(x,y)ds;\qquad dI_y = x^2\mu(x,y)ds.$$

以此作为转动惯量元素并积分，即得 L 对 x 轴、对 y 轴的转动惯量：

$$I_x = \int_L y^2\mu(x,y)ds;\qquad I_y = \int_L x^2\mu(x,y)ds.$$

(2) ds 对 x 轴和对 y 轴的静矩的近似值分别为

$$dM_x = y\mu(x,y)ds;\qquad dM_y = x\mu(x,y)ds.$$

以此作为静矩元素并积分，即得 L 对 x 轴、对 y 轴的静矩：

$$M_x = \int_L y\mu(x,y)ds;\qquad M_y = \int_L x\mu(x,y)ds.$$

从面 L 的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_L x\mu(x,y)ds}{\int_L \mu(x,y)ds};\qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_L y\mu(x,y)ds}{\int_L \mu(x,y)ds}.$$

2. 利用对弧长的曲线积分的定义证明性质 2.

证 由于 $f(x,y)$ 在曲线弧段 L 上可积，故不论把 L 怎样分割，积分和的极限总是不变的. 因此在分割 L 时，可以使 L_1 和 L_2 的分界点永远作为一个分点. 这样 $f(x,y)$ 在 $L=L_1+L_2$ 上的积分和就等于 L_1 上的积分和加 L_2 上的积分和，记为

$$\sum_{L_1+L_2} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i = \sum_{L_1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i + \sum_{L_2} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i.$$

令 $\lambda=\max|\Delta S_i|\longrightarrow 0$,上式两端同时取极限,即得

$$\int_{L_1+L_2} f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s+\int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s.$$

3. 计算下列对弧长的曲线积分:

(1) $\oint_L (x^2+y^2)^n\mathrm{d}s$,其中 L 为圆周 $x=a\cos t,y=a\sin t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(2) $\int_L (x+y)\mathrm{d}s$,其中 L 为连接(1,0)及(0,1)两点的直线段;

(3) $\oint_L x\mathrm{d}s$,其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界;

(4) $\oint_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$,其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$,直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界;

(5) $\int_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$,其中 Γ 为曲线 $x=\mathrm{e}^t\cos t,y=\mathrm{e}^t\sin t,z=\mathrm{e}^t$ 上相应于 t 从 0 变到 2 的这段弧;

(6) $\int_\Gamma x^2yz\mathrm{d}s$,其中 Γ 为折线 $ABCD$,这里 A、B、C、D 依次为点(0,0,0)、(0,0,2)、(1,0,2)、(1,3,2);

(7) $\int_L y^2\mathrm{d}s$,其中 L 为摆线的一拱 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(8) $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$,其中 L 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t),y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

解 (1)
$$\begin{aligned}&\oint_L (x^2+y^2)^n\mathrm{d}s\\&=\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t)^n\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}a^{2n+1}\mathrm{d}t=2\pi a^{2n+1}.\end{aligned}$$

(2) 直线 L 的方程为 $y=1-x(0\leqslant x\leqslant 1)$.

$$\int_L (x+y)\mathrm{d}s=\int_0^1[x+(1-x)]\sqrt{1+(-1)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{2}\mathrm{d}x=\sqrt{2}.$$

(3) L 由 L_1 和 L_2 两段组成,其中 $L_1:y=x(0\leqslant x\leqslant 1)$;$L_2:y=x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$. 于是

$$\oint_L x\mathrm{d}s = \int_{L_1} x\mathrm{d}s + \int_{L_2} x\mathrm{d}s = \int_0^1 x\sqrt{1+1^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 x\sqrt{1+(2x)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \sqrt{2}x\mathrm{d}x + \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{12}(5\sqrt{5}+6\sqrt{2}-1).$$

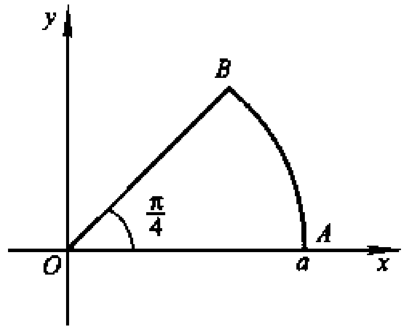


图 10-1

(4) L 由线段 $OA: y=0(0\leqslant x\leqslant a)$，圆弧 $\overset{\frown}{AB}$：$x=a\cos t, y=a\sin t\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 和线段 $OB: y=x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 组成(图 10-1).

$$\int_{OA} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s = \int_0^a e^x\mathrm{d}x = e^a - 1;$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} ae^a\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}ae^a;$$

$$\int_{OB} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}x}\sqrt{1+(1)^2}\mathrm{d}x$$

$$= e^a - 1,$$

于是 $$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s = e^a - 1 + \frac{\pi}{4}ae^a + e^a - 1 = e^a\left(2+\frac{\pi a}{4}\right) - 2.$$

(5) $$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{(e^t\cos t - e^t\sin t)^2 + (e^t\sin t + e^t\cos t)^2 + (e^t)^2}\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{3}e^t\mathrm{d}t,$$

$$\int_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s = \int_0^2 \frac{1}{e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\sin^2 t + e^{2t}}\cdot\sqrt{3}e^t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^2 e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2}).$$

(6) Γ 由直线段 AB、BC 和 CD 组成，其中 $AB: x=0, y=0, z=t(0\leqslant t\leqslant 2)$；$BC: x=t, y=0, z=2(0\leqslant t\leqslant 1)$；$CD: x=1, y=t, z=2(0\leqslant t\leqslant 3)$.

于是 $$\int_\Gamma x^2yz\mathrm{d}s = \int_{AB} x^2yz\mathrm{d}s + \int_{BC} x^2yz\mathrm{d}s + \int_{CD} x^2yz\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^2 0\mathrm{d}t + \int_0^1 0\mathrm{d}t + \int_0^3 2t\mathrm{d}t = 9.$$

(7) $\mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t$

$$= \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_L y^2\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 \cdot \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}t = \sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{u=\frac{t}{2}} 16a^3\int_0^{\pi}\sin^5 u\,\mathrm{d}u$$

$$= 32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 u\,\mathrm{d}u \overset{①}{=} 32a^3 \cdot \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{256}{15}a^3.$$

(8) $\mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t$

$$= \sqrt{(at\cos t)^2 + (at\sin t)^2}\,\mathrm{d}t = at\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi}[a^2(\cos t + t\sin t)^2 + a^2(\sin t - t\cos t)^2]\cdot at\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} a^3(1+t^2)t\,\mathrm{d}t = 2\pi^2a^3(1+2\pi^2).$$

4．求半径为 a、中心角为 2φ 的均匀圆弧(线密度 $\mu=1$)的质心．

解 取坐标系如图 10－2 所示，则由对称性知 $\bar{y}=0$．

又 $M = \int_L \mu\mathrm{d}s = \int_L \mathrm{d}s = 2\varphi a$(也可由圆弧的弧长公式直接得出)，

故 $$\bar{x} = \frac{\int_L x\mu\mathrm{d}s}{M} = \frac{\int_{-\varphi}^{\varphi} a\cos t\cdot a\mathrm{d}t}{2\varphi a} = \frac{2a^2\sin\varphi}{2\varphi a} = \frac{a\sin\varphi}{\varphi},$$

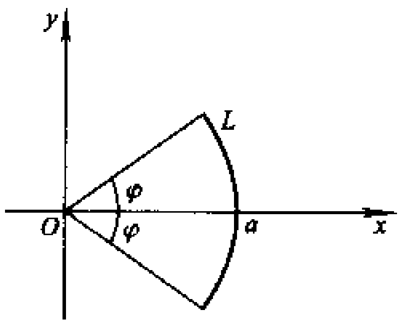


图 10－2

所求圆弧的质心的位置为 $\left(\frac{a\sin\varphi}{\varphi}, 0\right)$．

5．设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=kt$，其中 $0\leqslant t\leqslant$

---

① 参阅上册习题 5－3 第 8 题．

2π，它的线密度 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，求：

(1) 它关于 z 轴的转动惯量 I_z；

(2) 它的质心.

解 (1) $I_z=\int_L(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_L(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$

$$=\int_0^{2\pi}a^2(a^2+k^2t^2)\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=a^2\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{3}\pi a^2\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2).$$

(2) 设质心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.

$$M=\int_L\rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2),$$

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_L x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\frac{1}{M}\int_L x(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}a\cos t(a^2+k^2t^2)\cdot\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a\sqrt{a^2+k^2}}{M}\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\cos t\,\mathrm{d}t,$$

由于 $$\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\cos t\,\mathrm{d}t=[(a^2+k^2t^2)\sin t]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin t\cdot 2k^2t\,\mathrm{d}t$$

$$=[2k^2t\cos t]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}2k^2\cos t\,\mathrm{d}t=4\pi k^2,$$

因此 $$\bar{x}=\frac{a\sqrt{a^2+k^2}\cdot 4\pi k^2}{\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2)}=\frac{6ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2}.$$

类似地， $$\bar{y}=\frac{1}{M}\int_L y(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{a\sqrt{a^2+k^2}}{M}\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a\sqrt{a^2+k^2}\cdot(-4\pi^2k^2)}{M}=\frac{-6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2}.$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\int_L z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{k\sqrt{a^2+k^2}}{M}\int_0^{2\pi}t(a^2+k^2t^2)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{k\sqrt{a^2+k^2}(2a^2\pi^2+4k^2\pi^4)}{M}=\frac{3\pi k(a^2+2\pi^2k^2)}{3a^2+4\pi^2k^2}.$$

习 题 10-2

1. 设 L 为 xOy 面内直线 $x=a$ 上的一段，证明：

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=0.$$

证 将 L 的方程表达为如下的参数形式：

$$\begin{cases}x=a,\\ y=t,\end{cases}\quad t\text{ 从 }\alpha\text{ 变到 }\beta.$$

于是由第二类曲线积分的计算公式，得

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta P(a,t)\cdot 0\mathrm{d}t=0.$$

注 本题给出了第二类曲线积分的一个重要性质：

如果 L 为垂直于 x 轴的有向线段，则 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=0$；如果 L 为垂直于 y 轴的有向线段，则 $\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=0$. 这一性质常被用来简化第二类曲线积分的计算.

2. 设 L 为 xOy 面内 x 轴上从点 $(a,0)$ 到点 $(b,0)$ 的一段直线，证明：

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b P(x,0)\mathrm{d}x.$$

证 将 L 的方程表达为如下的参数形式：

$$\begin{cases}x=x,\\ y=0,\end{cases}\quad x\text{ 从 }a\text{ 变到 }b,$$

于是

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b P(x,0)\mathrm{d}x.$$

3. 计算下列对坐标的曲线积分：

(1) $\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧；

(2) $\oint_L xy\mathrm{d}x$，其中 L 为圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2\ (a>0)$ 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界(按逆时针方向绕行)；

(3) $\int_L y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，其中 L 为圆周 $x=R\cos t,y=R\sin t$ 上对应 t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$

的一段弧；

(4) $\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$（按逆时针方向绕行）；

(5) $\int_\Gamma x^2\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z$，其中 Γ 为曲线 $x=k\theta, y=a\cos\theta, z=a\sin\theta$ 上对应 θ 从 0 到 π 的一段弧；

(6) $\int_\Gamma x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(x+y-1)\mathrm{d}z$，其中 Γ 是从点(1,1,1)到点(2,3,4)的一段直线；

(7) $\oint_\Gamma \mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z$，其中 Γ 为有向闭折线 $ABCA$，这里的 A、B、C 依次为点(1,0,0)、(0,1,0)、(0,0,1)；

(8) $\int_L (x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点(-1,1)到点(1,1)的一段弧.

解 (1) $\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x=\int_0^2(x^2-x^4)\mathrm{d}x=-\frac{56}{15}$.

(2) 如图 10-3，L 由 L_1 和 L_2 所组成，其中 L_1 为有向半圆弧：

$$\begin{cases} x=a+a\cos t, \\ y=a\sin t, \end{cases} \quad t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } \pi;$$

L_2 为有向线段 $y=0$（x 从 0 变到 $2a$）. 于是

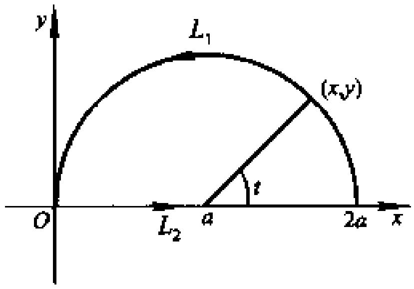


图 10-3

$$\begin{aligned}\oint_L xy\mathrm{d}x &= \int_{L_1} xy\mathrm{d}x+\int_{L_2} xy\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi a(1+\cos t)\cdot a\sin t\cdot(-a\sin t)\mathrm{d}t+0 \\ &= -a^3\left(\int_0^\pi \sin^2 t\mathrm{d}t+\int_0^\pi \sin^2 t\cos t\mathrm{d}t\right) \\ &= -a^3\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=-\frac{\pi}{2}a^3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3)\ \int_L y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}[R\sin t\cdot(-R\sin t)+R\cos t\cdot R\cos t]\mathrm{d}t \\ &= R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\mathrm{d}t=0.\end{aligned}$$

(4) L 的参数方程为 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，t 从 0 变到 2π. 于是

$$\text{原式}=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[a(\cos t+\sin t)\cdot(-a\sin t)-a(\cos t-\sin t)\cdot a\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}(-a^2)\mathrm{d}t=-2\pi.$$

(5) $\int_\Gamma x^2\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z$

$$=\int_0^\pi[k^2\theta^2\cdot k+a\cos\theta\cdot(-a\sin\theta)-a\cos\theta\cdot(a\cos\theta)]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^\pi(k^3\theta^2-a^2)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}k^3\pi^3-a^2\pi.$$

(6) 直线 Γ 的参数方程为：$x=1+t,y=1+2t,z=1+3t,t$ 从 0 变到 1.

于是 $$\text{原式}=\int_0^1[(1+t)\cdot1+(1+2t)\cdot2+(1+t+1+2t-1)\cdot3]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1(6+14t)\mathrm{d}t=13.$$

(7) Γ 由有向线段 AB、BC、CA 依次连结而成，其中

AB：$x=1-t,y=t,z=0,t$ 从 0 变到 1；

BC：$x=0,y=1-t,z=t,t$ 从 0 变到 1；

CA：$x=t,y=0,z=1-t,t$ 从 0 变到 1.

$$\int_{AB}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\int_0^1[(-1)-1+0]\mathrm{d}t=-2;$$

$$\int_{BC}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\int_0^1[0-(-1)+(1-t)\cdot1]\mathrm{d}t=\int_0^1(2-t)\mathrm{d}t=\frac{3}{2};$$

$$\int_{CA}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\int_0^1(1-0+0)\mathrm{d}t=1,$$

因此 $$\oint_\Gamma\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=-2+\frac{3}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

(8) $\int_L(x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$

$$=\int_{-1}^1[(x^2-2x\cdot x^2)+(x^4-2x\cdot x^2)\cdot2x]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^1(2x^5-4x^4-2x^3+x^2)\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^1(-4x^4+x^2)\mathrm{d}x=-\frac{14}{15}.$$

4．计算 $\int_L(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$，其中 L 是：

(1) 抛物线 $y^2=x$ 上从点(1,1)到点(4,2)的一段弧；

(2) 从点(1,1)到点(4,2)的直线段；

(3) 先沿直线从点(1,1)到点(1,2),然后再沿直线到点(4,2)的折线;

(4) 曲线 $x=2t^2+t+1, y=t^2+1$ 上从点(1,1)到点(4,2)的一段弧.

解 (1) 化为对 y 的定积分. $L: x=y^2$, y 从 1 变到 2,

$$原式=\int_1^2[(y^2+y)\cdot 2y+(y-y^2)\cdot 1]dy$$

$$=\int_1^2(2y^3+y^2+y)dy=\frac{34}{3}.$$

(2) L 的方程为 $y-1=\frac{2-1}{4-1}(x-1)$,即 $x=3y-2$, y 从 1 变到 2. 化为对 y 的定积分计算,有

$$原式=\int_1^2[(3y-2+y)\cdot 3+(y-3y+2)\cdot 1]dy$$

$$=\int_1^2(10y-4)dy=11.$$

(3) 记 L_1 为从点(1,1)到点(1,2)的有向线段, L_2 为从点(1,2)到点(4,2)的有向线段. 则 $L_1: x=1$, y 从 1 变到 2; $L_2: y=2$, x 从 1 变到 4. 在 L_1 上, $dx=0$;在 L_2 上, $dy=0$.

于是 $$\int_{L_1}(x+y)dx+(y-x)dy=\int_1^2(y-1)dy=\frac{1}{2};$$

$$\int_{L_2}(x+y)dx+(y-x)dy=\int_1^4(x+2)dx=\frac{27}{2},$$

因此 $$原式=\frac{1}{2}+\frac{27}{2}=14.$$

(4) 由 $\begin{cases}2t^2+t+1=1,\\ t^2+1=1\end{cases}$ 可得 $t=0$;

由 $\begin{cases}2t^2+t+1=4,\\ t^2+1=2\end{cases}$ 可得 $t=1$. 因此

$$原式=\int_0^1[(2t^2+t+1+t^2+1)\cdot(4t+1)+(t^2+1-2t^2-t-1)\cdot 2t]dt$$

$$=\int_0^1(10t^3+5t^2+9t+2)dt=\frac{32}{3}.$$

5. 一力场由沿横轴正方向的常力 $\boldsymbol{F}$ 所构成. 试求当一质量为 m 的质点沿圆周 $x^2+y^2=R^2$ 按逆时针方向移过位于第一象限的那一段弧时场力所作的功.

解 依题意, $\boldsymbol{F}=(|\boldsymbol{F}|,0)$, $L: x=R\cos t, y=R\sin t$, t 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$,

因此
$$W = \int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_L |\boldsymbol{F}|\mathrm{d}x + 0\mathrm{d}y$$
$$= |\boldsymbol{F}|\int_0^{\frac{\pi}{2}} -R\sin t\,\mathrm{d}t = -|\boldsymbol{F}|R.$$

6. 设 z 轴与重力的方向一致,求质量为 m 的质点从位置 (x_1,y_1,z_1) 沿直线移到 (x_2,y_2,z_2) 时重力所作的功.

解 重力 $\boldsymbol{F}=(0,0,mg)$,质点移动的直线路径 L 的方程为
$$\begin{cases} x = x_1+(x_2-x_1)t, \\ y = y_1+(y_2-y_1)t, \quad t\text{ 从 }0\text{ 变到 }1. \\ z = z_1+(z_2-z_1)t, \end{cases}$$
于是
$$W = \int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_L 0\mathrm{d}x + 0\mathrm{d}y + mg\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^1 mg(z_2-z_1)\mathrm{d}t = mg(z_2-z_1).$$

7. 把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化成对弧长的曲线积分,其中 L 为:

(1) 在 xOy 面内沿直线从点(0,0)到点(1,1);

(2) 沿抛物线 $y=x^2$ 从点(0,0)到点(1,1);

(3) 沿上半圆周 $x^2+y^2=2x$ 从点(0,0)到点(1,1).

解 (1) L 为从点(0,0)到(1,1)的有向线段,其方向余弦为 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,于是
$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s$$
$$= \int_L \frac{P(x,y)+Q(x,y)}{\sqrt{2}}\mathrm{d}s.$$

(2) L 由如下的参数方程给出:$x=x$,$y=x^2$,x 从 0 变到 1,故 L 的切向量的方向余弦为
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}},\cos\beta = \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}} = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}},$$
于是
$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_L \frac{P(x,y)+2xQ(x,y)}{\sqrt{1+4x^2}}\mathrm{d}s.$$

(3) L 由如下的参数方程给出:$x=x$,$y=\sqrt{2x-x^2}$,x 从 0 变到 1,故 L 的切向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}}=\sqrt{2x-x^2};$$

$$\cos\beta=\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\cdot\sqrt{2x-x^2}=1-x,$$

于是

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L[\sqrt{2x-x^2}P(x,y)+(1-x)Q(x,y)]\mathrm{d}s.$$

8. 设 Γ 为曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的曲线弧. 把对坐标的曲线积分 $\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 化成对弧长的曲线积分.

解 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2t=2x,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=3t^2=3y$,注意到参数 t 由小变到大,因此 Γ 的切向量的方向余弦为:

$$\cos\alpha=\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}};$$

$$\cos\beta=\frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}};$$

$$\cos\gamma=\frac{z'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}=\frac{3y}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}.$$

从而 $$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_\Gamma\frac{P+2xQ+3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}\mathrm{d}s.$$

习 题 10-3

1. 计算下列曲线积分,并验证格林公式的正确性:

(1) $\oint_L(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y$,其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $y^2=x$ 所围成的区域的正向边界曲线;

(2) $\oint_L(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$,其中 L 是四个顶点分别为(0,0)、(2,0)、(2,2)和(0,2)的正方形区域的正向边界.

解 (1) 先按曲线积分的计算公式直接计算. 记 $L_1:y=x^2$,x 从 0 变到 1;$L_2:x=y^2$,y 从 1 变到 0(图 10-4). 于是

$$原式=\int_{L_1}(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y+\int_{L_2}(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 [(2x^3 - x^2) + (x + x^4)\cdot 2x]\mathrm{d}x + \int_1^0 [(2y^3 - y^4)\cdot 2y + (y^2 + y^2)]\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 (2x^5 + 2x^3 + x^2)\mathrm{d}x + \int_1^0 (-2y^5 + 4y^4 + 2y^2)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}.$$

又，$P = 2xy - x^2$，$Q = x + y^2$，$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1$，

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (1 - 2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 (1 - 2x)\mathrm{d}x \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y = \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} - x^2 + 2x^3)\mathrm{d}x = \frac{1}{30}.$$

可见
$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

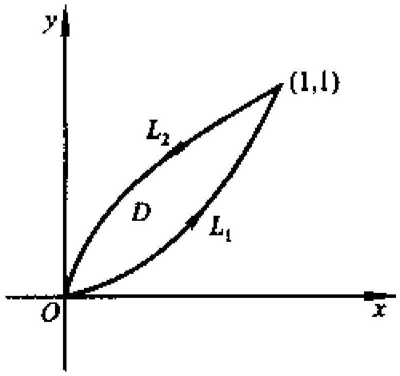


图 10－4

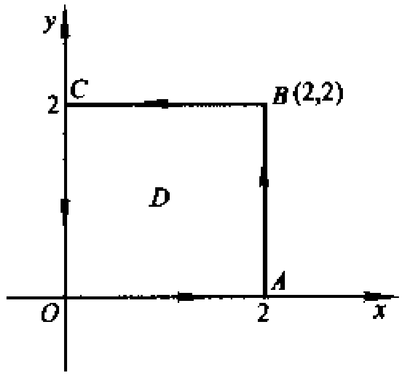


图 10－5

(2) 如图 10－5．L 由有向线段 OA、AB、BC 和 CO 组成．

$$\int_{OA} (x^2 - xy^3)\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\mathrm{d}y = \int_0^2 x^2\mathrm{d}x = \frac{8}{3};$$

$$\int_{AB} (x^2 - xy^3)\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\mathrm{d}y = \int_0^2 (y^2 - 4y)\mathrm{d}y = \frac{8}{3} - 8;$$

$$\int_{BC} (x^2 - xy^3)\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\mathrm{d}y = \int_2^0 (x^2 - 8x)\mathrm{d}x = 16 - \frac{8}{3};$$

$$\int_{CO} (x^2 - xy^3)\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\mathrm{d}y = \int_2^0 y^2\mathrm{d}y = -\frac{8}{3},$$

于是
$$\text{原式} = \frac{8}{3} + \left(\frac{8}{3} - 8\right) + \left(16 - \frac{8}{3}\right) + \left(-\frac{8}{3}\right) = 8.$$

又
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2y,\ \frac{\partial P}{\partial y}=-3xy^2,$$
$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(-2y+3xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2(-2y+3xy^2)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^2(8x-4)\mathrm{d}x=8,$$
可见
$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. 利用曲线积分,求下列曲线所围成的图形的面积:

(1) 星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$;

(2) 椭圆 $9x^2+16y^2=144$;

(3) 圆 $x^2+y^2=2ax$.

解 (1)
$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos^3 t(3a\sin^2 t\cos t)-a\sin^3 t(3a\cos^2 t)(-\sin t)]\mathrm{d}t$$
$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{8}(1-\cos 4t)\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

(2) 正向椭圆 $9x^2+16y^2=144$ 的参数方程为
$$x=4\cos t, y=3\sin t, t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 2\pi.$$
$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[4\cos t\cdot 3\cos t-3\sin t(-4\sin t)]\mathrm{d}t$$
$$=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=12\pi.$$

(3) 正向圆周 $x^2+y^2=2ax$,即 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 的参数方程为
$$x=a+a\cos t, y=a\sin t, t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 2\pi.$$
$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(a+a\cos t)a\cos t-a\sin t(-a\sin t)]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos t)\mathrm{d}t = \pi a^2.$$

3. 计算曲线积分 $\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$，其中 L 为圆周 $(x-1)^2+y^2=2$，L 的方向为逆时针方向.

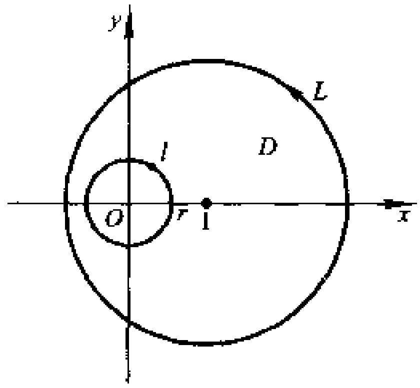


图 10－6

解 在 L 所围的区域内的点 $(0,0)$ 处，函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 均无意义．现取 r 为适当小的正数，使圆周 l（取逆时针向）：$x=r\cos t$，$y=r\sin t$（t 从 0 变到 2π）位于 L 所围的区域内，则在由 L 和 l^- 所围成的复连通区域 D 上（图 10－6），可应用格林公式.在 D 上，

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

于是由格林公式得

$$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)} + \oint_{l^-} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

从而

$$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)} = \oint_l \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-r^2\sin^2 t - r^2\cos^2 t}{2r^2}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = -\pi.$$

4. 证明下列曲线积分在整个 xOy 面内与路径无关，并计算积分值：

(1) $\int_{(1,1)}^{(2,3)} (x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$；

(2) $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2-y^3)\mathrm{d}x + (6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y$；

(3) $\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy-y^4+3)\mathrm{d}x + (x^2-4xy^3)\mathrm{d}y$.

解 (1) 函数 $P=x+y$，$Q=x-y$ 在整个 xOy 面这个单连通区域内，具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在 xOy 面内与路径无关.取折线积分路径 MRN，其中 M 为 $(1,1)$，R 为 $(2,1)$，N 为 $(2,3)$，则有

$$\text{原式} = \int_1^2 (x+1)\mathrm{d}x + \int_1^3 (2-y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{5}{2}+0=\frac{5}{2}.$$

(2) 函数 $P=6xy^2-y^3$, $Q=6x^2y-3xy^2$ 在 xOy 面这个单连通域内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=12xy-3y^2=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在 xOy 面内与路径无关. 取折线积分路径 MRN，其中 M 为(1,2)，R 为(3,2)，N 为(3,4)，则有

$$\begin{aligned}原式&=\int_1^3(24x-8)\mathrm{d}x+\int_2^4(54y-9y^2)\mathrm{d}y\\&=80+156=236.\end{aligned}$$

(3) 函数 $P=2xy-y^4+3$, $Q=x^2-4xy^3$ 在 xOy 面这个单连通域内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-4y^3=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在 xOy 面内与路径无关. 取折线积分路径 MRN，其中 M 为(1,0)，R 为(2,0)，N 为(2,1)，则

$$\begin{aligned}原式&=\int_1^2 3\mathrm{d}x+\int_0^1(4-8y^3)\mathrm{d}y\\&=3+2=5.\end{aligned}$$

5. 利用格林公式，计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L(2x-y+4)\mathrm{d}x+(5y+3x-6)\mathrm{d}y$，其中 L 为三顶点分别为(0,0)、(3,0)和(3,2)的三角形正向边界；

(2) $\oint_L(x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x)\mathrm{d}x+(x^2\sin x-2ye^x)\mathrm{d}y$，其中 L 为正向星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$；

(3) $\int_L(2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 为在抛物线 $2x=\pi y^2$ 上由点(0,0)到$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$的一段弧；

(4) $\int_L(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2y)\mathrm{d}y$，其中 L 是在圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点(0,0)到点(1,1)的一段弧.

解 (1) 设 D 为 L 所围的三角形闭区域，则由格林公式，

$$\oint_L(2x-y+4)\mathrm{d}x+(5y+3x-6)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D[3-(-1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=4\times(D\text{ 的面积})=4\times3=12.$$

(2) 由于 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x\sin x+x^2\cos x-2ye^x$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x^2\cos x+2x\sin x-2ye^x,$$

故由格林公式得

$$\text{原式}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D 0\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

(3) 由于 $P=2xy^3-y^2\cos x$, $Q=1-2y\sin x+3x^2y^2$ 在 xOy 面内具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\cos x+6xy^2=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给曲线积分与路径无关.于是将原积分路径 L 改变为折线路径 ORN,其中 O 为(0,0),R 为$\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$,$N$ 为$\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$(图 10-7),得

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}0\cdot\mathrm{d}x+\int_0^1\left(1-2y\sin\frac{\pi}{2}+3\cdot\frac{\pi^2}{4}y^2\right)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\left(1-2y+\frac{3}{4}\pi^2y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{4}.$$

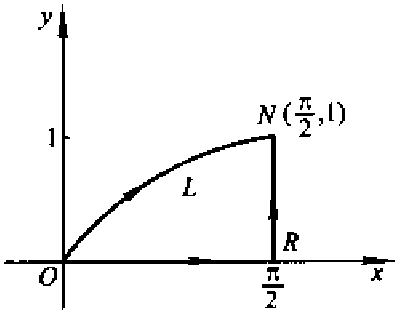


图 10-7

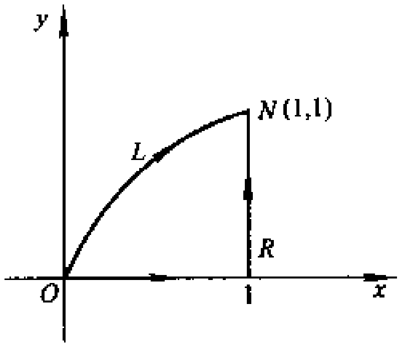


图 10-8

(4) 由于 $P=x^2-y$, $Q=-(x+\sin^2y)$ 在 xOy 面内具有一阶连续偏导数,且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1=\dfrac{\partial P}{\partial y}$,故所给曲线积分与路径无关.于是将原积分路径 L 改为折线路径 ORN,其中 O 为(0,0),R 为(1,0),N 为(1,1)(图 10-8),得

$$\text{原式}=\int_0^1x^2\mathrm{d}x-\int_0^1(1+\sin^2y)\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{3}-1-\int_0^1\frac{1-\cos 2y}{2}\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sin 2=-\frac{7}{6}+\frac{1}{4}\sin 2.$$

6. 验证下列 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分,并求这样的一个 $u(x,y)$:

(1) $(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$;

(2) $2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$;

(3) $4\sin x\sin 3y\cos x\mathrm{d}x-3\cos 3y\cos 2x\mathrm{d}y$;

(4) $(3x^2y+8xy^2)\mathrm{d}x+(x^3+8x^2y+12ye^y)\mathrm{d}y$;

(5) $(2x\cos y+y^2\cos x)\mathrm{d}x+(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$.

解 (1) 在整个 xOy 面内,函数 $P=x+2y$、$Q=2x+y$ 具有一阶连续偏导数,且$\frac{\partial Q}{\partial x}=2=\frac{\partial P}{\partial y}$,因此所给表达式是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分. 取 $(x_0,y_0)=(0,0)$,则有

$$u(x,y)=\int_0^x x\mathrm{d}x+\int_0^y(2x+y)\mathrm{d}y$$
$$=\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{y^2}{2}.$$

(2) 在整个 xOy 面内,函数 $P=2xy$ 和 $Q=x^2$ 具有一阶连续偏导数,且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x=\frac{\partial P}{\partial y}$,故所给表达式是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分. 取 $(x_0,y_0)=(0,0)$,则有

$$u(x,y)=\int_0^x 2x\cdot 0\mathrm{d}x+\int_0^y x^2\mathrm{d}y=x^2y.$$

(3) 在整个 xOy 面内,$P=4\sin x\sin 3y\cos x$ 和 $Q=-3\cos 3y\cos 2x$ 具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=6\cos 3y\sin 2x=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分. 取 $(x_0,y_0)=(0,0)$,则有

$$u(x,y)=\int_0^x 0\cdot\mathrm{d}x+\int_0^y(-3\cos 3y\cos 2x)\mathrm{d}y$$
$$=[-\sin 3y\cos 2x]_0^y$$
$$=-\cos 2x\sin 3y.$$

(4) 在整个 xOy 面内,函数 $P=3x^2y+8xy^2$ 和 $Q=x^3+8x^2y+12ye^y$ 具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+16xy=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分. 取 $(x_0,y_0)=(0,0)$,则有

$$u(x,y)=\int_0^x 0\cdot dx+\int_0^y (x^3+8x^2y+12ye^y)dy$$
$$=x^3y+4x^2y^2+12(ye^y-e^y).$$

(5) **方法一** 在整个 xOy 面内，$P=2x\cos y+y^2\cos x$ 和 $Q=2y\sin x-x^2\sin y$ 具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2y\cos x-2x\sin y=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分. 取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则有

$$u(x,y)=\int_0^x 2x\,dx+\int_0^y (2y\sin x-x^2\sin y)dy$$
$$=y^2\sin x+x^2\cos y.$$

注 在已经证明了所给表达式 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分后，为了求 $u(x,y)$，除了采用上面题解中的曲线积分方法外，还可用以下两种方法：

方法二(偏积分法) 因函数 $u(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=2x\cos y+y^2\cos x,$$

故
$$u(x,y)=\int(2x\cos y+y^2\cos x)dx$$
$$=x^2\cos y+y^2\sin x+\varphi(y),$$

其中 $\varphi(y)$ 是 y 的某个可导函数.

由此得
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-x^2\sin y+2y\sin x+\varphi'(y).$$

又 $u(x,y)$ 必需满足

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=2y\sin x-x^2\sin y,$$

从而得 $\varphi'(y)=0,\varphi(y)=C$ （C 为任意常数).

因此
$$u(x,y)=x^2\cos y+y^2\sin x+C,$$

取 $C=0$，就得到满足要求的一个 $u(x,y)$.

方法三 利用微分运算法则直接凑出 $u(x,y)$.

原式 $=(2x\cos y\,dx-x^2\sin y\,dy)+(y^2\cos x\,dx+2y\sin x\,dy)$

$=(\cos y\,dx^2+x^2d\cos y)+(y^2d\sin x+\sin x\,dy^2)$

$=d(x^2\cdot\cos y)+d(y^2\cdot\sin x)$

$=d(x^2\cos y+y^2\sin x).$

因此可取 $u(x,y)=x^2\cos y+y^2\sin x$.

7. 设有一变力在坐标轴上的投影为 $X=x+y^2$，$Y=2xy-8$，这变力确定了一个力场. 证明质点在此场内移动时，场力所作的功与路径无关.

证 场力所作的功

$$W = \int_L X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y = \int_L (x^2 + y^2)\mathrm{d}x + (2xy - 8)\mathrm{d}y,$$

由于 $P = x^2 + y^2$ 和 $Q = 2xy - 8$ 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y = \frac{\partial P}{\partial y}$，故曲线积分在 xOy 面内与路径无关，即场力所作的功与路径无关.

习 题 10－4

1. 设有一分布着质量的曲面 Σ，在点 (x,y,z) 处它的面密度为 $\mu(x,y,z)$，用对面积的曲面积分表示这曲面对于 x 轴的转动惯量.

解 设想将 Σ 分成 n 小块，取出其中任意一块记作 $\mathrm{d}S$（其面积也记作 $\mathrm{d}S$），(x,y,z) 为 $\mathrm{d}S$ 上一点，则 $\mathrm{d}S$ 对 x 轴的转动惯量近似等于

$$\mathrm{d}I_x = (y^2 + z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

以此作为转动惯量元素并积分，即得 Σ 对 x 轴的转动惯量为

$$I_x = \iint_\Sigma (y^2 + z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

2. 按对面积的曲面积分的定义证明公式

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

其中 Σ 是由 Σ_1 和 Σ_2 组成的.

证 由于 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上可积，故不论把 Σ 如何分割，积分和的极限总是不变的. 因此在分割 Σ 时，可以使 Σ_1 和 Σ_2 的公共边界曲线永远作为一条分割线. 这样，$f(x,y,z)$ 在 $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ 上的积分和等于 Σ_1 上的积分和加上 Σ_2 上的积分和，记为

$$\sum_{(\Sigma_1+\Sigma_2)} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i = \sum_{(\Sigma_1)} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i + \sum_{(\Sigma_2)} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

令 $\lambda = \max\{\Delta S_i \text{ 的直径}\} \to 0$，上式两端同时取极限，即得

$$\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

3. 当 Σ 是 xOy 面内的一个闭区域时，曲面积分 $\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 与二重积分有什么关系？

解 当 Σ 为 xOy 面内的一个闭区域时，Σ 的方程为 $z = 0$，因此在 Σ 上取

值的 $f(x,y,z)$ 恒为 $f(x,y,0)$，且 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
又 Σ 在 xOy 面上的投影区域即为 Σ 自身，因此有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma} f(x,y,0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

4. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为抛物面 $z=2-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分，$f(x,y,z)$ 分别如下：

(1) $f(x,y,z)=1$;

(2) $f(x,y,z)=x^2+y^2$;

(3) $f(x,y,z)=3z$.

解 抛物面 Σ 与 xOy 面的交线为 $x^2+y^2=2$，故 Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$. 又

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是，

$$(1)\ \iint_{\Sigma} 1\cdot\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+4\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{12}(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{6}\pi.$$

$$(2)\ \iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\iint_{D_{xy}}\rho^2\sqrt{1+4\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{1+4\rho^2}\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{\rho=\frac{1}{2}\tan t}2\pi\cdot\frac{1}{16}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^3 t\cdot\tan^3 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{8}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^2 t(\sec^2 t-1)\mathrm{d}\sec t=\frac{\pi}{8}\cdot\frac{596}{15}=\frac{149}{30}\pi.$$

$$(3)\ \iint_{\Sigma}3z\mathrm{d}S=3\iint_{D_{xy}}[2-(x^2+y^2)]\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}3\iint_{D_{xy}}(2-\rho^2)\sqrt{1+4\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2 - \rho^2)\sqrt{1 + 4\rho^2}\,\rho d\rho$$

$$\xlongequal{\rho = \frac{1}{2}\tan t} 6\pi\left[\frac{1}{2}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} \sec^3 t \cdot \tan t\, dt - \frac{1}{16}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} \sec^3 t \cdot \tan^3 t\, dt\right]$$

$$= 6\pi\left[\frac{1}{2}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} \sec^2 t\, d\sec t - \frac{1}{16}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} \sec^2 t(\sec^2 t - 1)\, d\sec t\right]$$

$$= 6\pi\left(\frac{13}{3} - \frac{149}{60}\right) = \frac{111}{10}\pi.$$

5. 计算$\iint\limits_{\Sigma}(x^2 + y^2)dS$，其中 Σ 是：

(1) 锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 1$ 所围成的区域的整个边界曲面；

(2) 锥面 $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ 被平面 $z = 0$ 和 $z = 3$ 所截得的部分.

解 (1) Σ 由 Σ_1 和 Σ_2 组成，其中 Σ_1 为平面 $z = 1$ 上被圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 所围的部分；Σ_2 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 \leqslant z \leqslant 1)$.

在 Σ_1 上，$dS = dxdy$；

在 Σ_2 上，$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy = \sqrt{2}dxdy$.

Σ_1 和 Σ_2 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 均为 $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

因此
$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2 + y^2)dS = \iint\limits_{\Sigma_1}(x^2 + y^2)dS + \iint\limits_{\Sigma_2}(x^2 + y^2)dS$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}}(x^2 + y^2)dxdy + \iint\limits_{D_{xy}}(x^2 + y^2)\sqrt{2}dxdy$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho + \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}\pi.$$

(2) 由题设，Σ 的方程为 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$，$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy = \sqrt{1 + \frac{9x^2}{3(x^2 + y^2)} + \frac{9y^2}{3(x^2 + y^2)}}dxdy = 2dxdy$.

又由 $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ 和 $z = 3$ 消去 z 得 $x^2 + y^2 = 3$，故 Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2 + y^2 \leqslant 3$. 于是

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2 + y^2)dS = \iint\limits_{D_{xy}}(x^2 + y^2) \cdot 2dxdy$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho^2 \cdot \rho d\rho = 9\pi.$$

6. 计算下列对面积的曲面积分：

(1) $\iint\limits_{\Sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分；

(2) $\iint\limits_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $2x+2y+z=6$ 在第一卦限中的部分；

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\geqslant h(0<h<a)$ 的部分；

(4) $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的有限部分.

解 (1) 在 Σ 上，$z=4-2x-\frac{4}{3}y$. Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为由 x 轴、y 轴和直线 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 所围成的三角形闭区域. 因此

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\left(4-2x-\frac{4}{3}y\right)+2x+\frac{4}{3}y\right]\sqrt{1+(-2)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}4\cdot\frac{\sqrt{61}}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4\sqrt{61}}{3}\cdot(D_{xy}\text{ 的面积})$$

$$=\frac{4\sqrt{61}}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\right)=4\sqrt{61}.$$

(2) 在 Σ 上，$z=6-2x-2y$. Σ 在 xOy 面上的投影区域为由 x 轴、y 轴和直线 $x+y=3$ 所围成的三角形闭区域. 因此

$$\iint\limits_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}[2xy-2x^2-x+(6-2x-2y)]\sqrt{1+(-2)^2+(-2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^3\mathrm{d}x\int_0^{3-x}(6-3x-2x^2+2xy-2y)\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^3[(6-3x-2x^2)(3-x)+x(3-x)^2-(3-x)^2]\mathrm{d}x$$

$$= 3\int_0^3 (3x^3 - 10x^2 + 9)\mathrm{d}x = -\frac{27}{4}.$$

(3) 在 Σ 上，$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant a^2 - h^2\}$.

由于积分曲面 Σ 关于 yOz 面和 xOz 面均对称，故有

$$\iint_\Sigma x\mathrm{d}S = 0,\ \iint_\Sigma y\mathrm{d}S = 0.$$

于是

$$\iint_\Sigma (x + y + z)\mathrm{d}S = \iint_\Sigma z\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= a\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = a\pi(a^2 - h^2).$$

(4) Σ 如图 10 - 9 所示，Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为圆域 $x^2 + y^2 \leqslant 2ax$. 由于 Σ 关于 xOz 面对称，而函数 xy 和 yz 关于 y 均为奇函数，故

$$\iint_\Sigma xy\mathrm{d}S = 0,\ \iint_\Sigma yz\mathrm{d}S = 0.$$

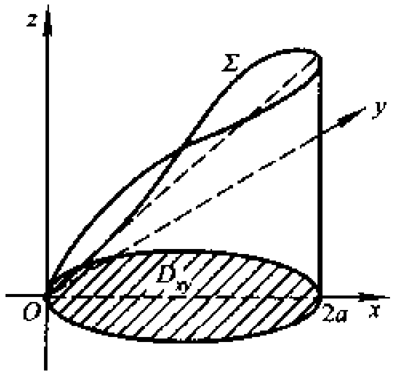


图 10 - 9

于是

$$\iint_\Sigma (xy + yz + zx)\mathrm{d}S = \iint_\Sigma zx\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} x\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sqrt{2}\iint_{D_{xy}} x\sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho\cos\theta \cdot \rho \cdot \rho\mathrm{d}\rho$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= 8\sqrt{2}a^4 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

7. 求抛物面壳 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)(0 \leqslant z \leqslant 1)$ 的质量，此壳的面密度为 $\mu = z$.

解 $\Sigma: z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\leqslant z\leqslant 1)$ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$. $z_x=x, z_y=y$. 故 $dS=\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$. 因此

$$M=\iint_{\Sigma} z dS=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\rho^2\sqrt{1+\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{1+\rho^2}d\rho$$

$$\xlongequal{t=\rho^2}\frac{\pi}{2}\int_0^2 t\sqrt{1+t}dt\text{(请与本习题 4(2) 中采用的换元作比较)}$$

$$\xlongequal{\text{分部法}}\frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{3}t(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2-\frac{2}{3}\int_0^2(1+t)^{\frac{3}{2}}dt\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{4}{3}\cdot 3^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}(3^{\frac{5}{2}}-1)\right]=\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1).$$

8. 求面密度为 μ_0 的均匀半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$ 对于 z 轴的转动惯量.

解 $$I_z=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mu_0 dS$$

$$=\mu_0\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\mu_0\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\mu_0\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{a\rho^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho$$

$$\xlongequal{\rho=a\sin t}2\pi a\mu_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3\sin^3 t}{a\cos t}\cdot a\cos t dt$$

$$=2\pi a^4\mu_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t dt=2\pi a^4\mu_0\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\pi a^4\mu_0.$$

习 题 10－5

1. 按对坐标的曲面积分的定义证明公式

$$\iint_{\Sigma}[P_1(x,y,z)\pm P_2(x,y,z)]dydz$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} P_1(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \pm \iint\limits_{\Sigma} P_2(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

证 把 Σ 任意分成 n 块小曲面 ΔS_i（其面积也记为 ΔS_i），ΔS_i 在 yOz 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{yz}$. 在 ΔS_i 上任意取定一点 (ξ_i,η_i,ζ_i). 设 λ 是各小块曲面的直径的最大值，则

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma}[P_1(x,y,z) \pm P_2(x,y,z)]\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P_1(\xi_i,\eta_i,\zeta_i) \pm P_2(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)](\Delta S_i)_{yz} \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P_1(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P_2(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} \\
&= \iint\limits_{\Sigma}P_1(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \pm \iint\limits_{\Sigma}P_2(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

2. 当 Σ 为 xOy 面内的一个闭区域时，曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与二重积分有什么关系？

解 此时 Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 就是 Σ 自身（但不定侧），且在 Σ 上，$z=0$，因此

$$\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

当 Σ 取上侧时为正号，取下侧时为负号.

3. 计算下列对坐标的曲面积分：

(1) $\iint\limits_{\Sigma}x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部分的下侧；

(2) $\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的在第一卦限内的部分的前侧；

(3) $\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z + [2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x + [f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧；

(4) $\oiint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 是平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

解 (1) Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2+y^2 \leqslant R^2$，在 Σ 上，$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. 因 Σ 取下侧，故

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2 y^2 z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{D_{xy}} x^2 y^2\left(-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} \iint\limits_{D_{xy}} \rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^R \rho^5\sqrt{R^2-\rho^2}\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{\rho = R\sin t} \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^5\sin^5 t\cdot R\cos t\cdot R\cos t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{4}R^7\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 t - \sin^7 t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{4}R^7\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} - \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{105}\pi R^7.$$

(2) 由于柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 在 xOy 面上的投影为零,因此$\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$. 又,$D_{yz} = \{(y,z)\mid 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 3\}$,$D_{zx} = \{(x,z)\mid 0\leqslant z\leqslant 3, 0\leqslant x\leqslant 1\}$(图 10 - 10),因 Σ 取前侧,所以

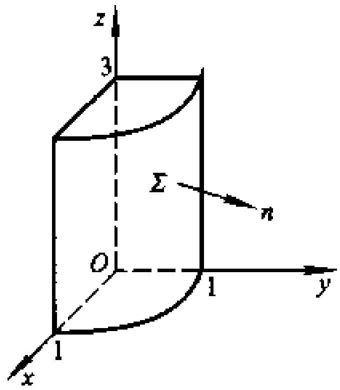


图 10 - 10

$$\text{原式} = \iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$= \iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^3\mathrm{d}z\int_0^1\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y + \int_0^3\mathrm{d}z\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$= 2\cdot 3\left[\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}\arcsin y\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{2}\pi.$$

(3) 在 Σ 上,$z = 1 - x + y$. 由于 Σ 取上侧,故 Σ 在任一点处的单位法向量为

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}(-z_x, -z_y, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1).$$

由两类曲面积分之间的联系,可得

$$\text{原式} = \iint\limits_{\Sigma}[(f+x)\cos\alpha + (2f+y)\cos\beta + (f+z)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}[(f+x) - (2f+y) + (f+z)]\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x - y + z)\mathrm{d}S = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\Sigma\text{ 的面积}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}.$$

(4) 在面 $x = 0$、$y = 0$ 和 $z = 0$ 上，积分值均为零，因此只需计算在 Σ': $x + y + z = 1$（取上侧）上的积分值（图 10 − 11）. 下面用两种方法计算.

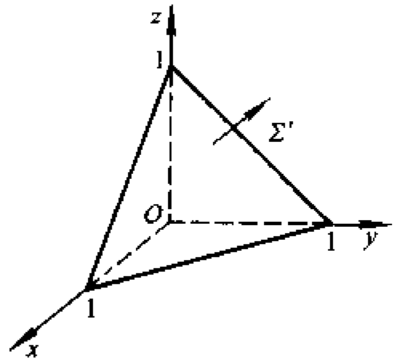


图 10 − 11

方法一 $\displaystyle\iint_{\Sigma'} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} x(1 - x - y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1 - x - y)\mathrm{d}y = \frac{1}{24},$$

由被积函数和积分曲面关于积分变量的对称性，可得

$$\iint_{\Sigma'} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma'} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{\Sigma'} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{24}.$$

因此 $\displaystyle\oiint_{\Sigma} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 3 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$

方法二 利用两类曲面积分的联系，将 $\displaystyle\iint_{\Sigma'} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 和 $\displaystyle\iint_{\Sigma'} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 均化为关于坐标 x 和 y 的曲面积分计算.

由于 Σ': $x + y + z = 1$ 取上侧，故 Σ' 在任一点处的单位法向量 $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

于是 $\displaystyle\iint_{\Sigma'} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma'} xy\cos\alpha\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma'} xy\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma'} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

$$\iint_{\Sigma'} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{\Sigma'} yz\cos\beta\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma'} yz\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma'} yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因此 $\displaystyle\iint_{\Sigma'} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

$$= \iint_{\Sigma'}(xz + xy + yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}}[x(1 - x - y) + xy + y(1 - x - y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}(-x^2 - y^2 - xy + x + y)\mathrm{d}y = \frac{1}{8}.$$

于是原式 $=\frac{1}{8}$.

注 计算本题最方便的方法是利用下节的高斯公式:

$$\oiint_{\Sigma} xz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iiint_{\Omega}(y+z+x)\,\mathrm{d}v$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} 3\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}v = 3\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y} z\,\mathrm{d}z$$

$$= 3\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{(1-x-y)^2}{2}\mathrm{d}y$$

$$= 3\int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6}\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$$

4. 把对坐标的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化成对面积的曲面积分,其中:

(1) Σ 是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限的部分的上侧;

(2) Σ 是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分的上侧.

解 (1) 由于 $\Sigma: 3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 取上侧,故 Σ 在任一点处的单位法向量为

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma) = \frac{1}{\sqrt{3^2+2^2+(2\sqrt{3})^2}}(3,2,2\sqrt{3})$$

$$= \left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{2\sqrt{3}}{5}\right),$$

于是 $$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{\Sigma}\left(\frac{3}{5}P + \frac{2}{5}Q + \frac{2\sqrt{3}}{5}R\right)\mathrm{d}S.$$

(2) 由于 $\Sigma: z=8-(x^2+y^2)$ 取上侧,故 Σ 在其上任一点 (x,y,z) 处的单位法向量为

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x,-z_y,1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}}(2x,2y,1),$$

于是 $$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{2xP+2yQ+R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}S.$$

习 题 10 - 6

1. 利用高斯公式计算曲面积分：

(1) $\oiint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为平面 $x=0, y=0, z=0, x=a, y=a, z=a$ 所围成的立体的表面的外侧；

(2) $\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧；

(3) $\oiint\limits_{\Sigma}xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-z^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为上半球体 $x^2+y^2\leqslant a^2, 0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的表面外侧；

(4) $\oiint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是界于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的圆柱体 $x^2+y^2\leqslant 9$ 的整个表面的外侧；

(5) $\oiint\limits_{\Sigma}4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是平面 $x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, z=1$ 所围成的立方体的全表面的外侧.

解 (1) 原式 $=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$

$$=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v$$

$$\xlongequal{\text{对称性}}6\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=6\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a z\mathrm{d}z$$

$$=6\cdot a\cdot a\cdot\frac{a^2}{2}=3a^4.$$

(2) 原式 $=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$

$$\xlongequal{\text{球面坐标}}3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=3\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{a^5}{5}=\frac{12}{5}\pi a^5.$$

(3) 原式 $=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(z^2+x^2+y^2)dv$$

$$\xlongequal{\text{球面坐标}}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=2\pi\cdot1\cdot\frac{a^5}{5}=\frac{2}{5}\pi a^5.$$

(4) 原式 $=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)dv=3\iiint\limits_{\Omega}dv$$

$$=3\cdot\pi\cdot3^2\cdot3=81\pi.$$

(5) 原式 $=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(4z-2y+y)dv$$

$$=\int_0^1dx\int_0^1dy\int_0^1(4z-y)dz$$

$$=\int_0^1dx\int_0^1(2-y)dy=\frac{3}{2}.$$

注 在计算上面的积分 $\iiint\limits_{\Omega}(4z-2y+y)dv$ 时，如果利用被积函数和积分区域关于积分变量的对称性，可知 $\iiint\limits_{\Omega}zdv=\iiint\limits_{\Omega}ydv$，于是

$$\iiint\limits_{\Omega}(4z-2y+y)dv=\iiint\limits_{\Omega}3zdv=3\int_0^1dx\int_0^1dy\int_0^1zdz=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

从而可简化运算.

2. 求下列向量 $\boldsymbol{A}$ 穿过曲面 Σ 流向指定侧的通量：

(1) $\boldsymbol{A}=yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为圆柱 $x^2+y^2\leqslant a^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 的全表面，流向外侧；

(2) $\boldsymbol{A}=(2x-z)\boldsymbol{i}+x^2y\boldsymbol{j}-xz^2\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为立方体 $0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a,0\leqslant z\leqslant a$ 的全表面，流向外侧；

(3) $\boldsymbol{A}=(2x+3z)\boldsymbol{i}-(xz+y)\boldsymbol{j}+(y^2+2z)\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 是以点 $(3,-1,2)$ 为球心，半径 $R=3$ 的球面，流向外侧.

解 (1) 通量 $\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial(yz)}{\partial x}+\frac{\partial(xz)}{\partial y}+\frac{\partial(xy)}{\partial z}\right]\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}0\,\mathrm{d}v=0.$$

(2) 通量 $\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}v$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial(2x-z)}{\partial x}+\frac{\partial(x^2y)}{\partial y}+\frac{\partial(-xz^2)}{\partial z}\right]\mathrm{d}v$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(2+x^2-2xz)\,\mathrm{d}v$$

$$=2a^3+\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a(x^2-2xz)\,\mathrm{d}z$$

$$=2a^3-\frac{a^5}{6}=a^3\left(2-\frac{a^2}{6}\right).$$

(3) 通量 $\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}v$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial(2x+3z)}{\partial x}+\frac{\partial(-xz-y)}{\partial y}+\frac{\partial(y^2+2z)}{\partial z}\right]\mathrm{d}v$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(2-1+2)\,\mathrm{d}v=3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$$

$$=3\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3=108\pi.$$

3. 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度：

(1) $\boldsymbol{A}=(x^2+yz)\boldsymbol{i}+(y^2+xz)\boldsymbol{j}+(z^2+xy)\boldsymbol{k}$；

(2) $\boldsymbol{A}=\mathrm{e}^{xy}\boldsymbol{i}+\cos(xy)\boldsymbol{j}+\cos(xz^2)\boldsymbol{k}$；

(3) $\boldsymbol{A}=y^2\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$.

解 (1) $P=x^2+yz,Q=y^2+xz,R=z^2+xy$,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2x+2y+2z.$$

(2) $P=\mathrm{e}^{xy},Q=\cos(xy),R=\cos(xz^2)$,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=y\mathrm{e}^{xy}-x\sin(xy)-2xz\sin(xz^2).$$

(3) $P=y^2,Q=xy,R=xz$,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0+x+x=2x.$$

4. 设 $u(x,y,z)$、$v(x,y,z)$是两个定义在闭区域 Ω 上的具有二阶连续偏导数的函数，$\dfrac{\partial u}{\partial n}$、$\dfrac{\partial v}{\partial n}$依次表示 $u(x,y,z)$、$v(x,y,z)$沿 Σ 的外法线方向的方向导数.证明

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S,$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的整个边界曲面.这个公式叫做**格林第二公式**.

证 由教材本节例 3 证明的格林第一公式知：

$$\iiint_{\Omega}u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

在此公式中将函数 u 和 v 交换位置，得

$$\iiint_{\Omega}v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

将上面两个式子相减即得

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S.$$

5. 利用高斯公式推证阿基米德原理：浸没在液体中的物体所受液体的压力的合力(即浮力)的方向铅直向上、其大小等于这物体所排开的液体的重力.

证 取液面为 xOy 面，z 轴铅直向上.设液体的密度为 ρ.在物体表面 Σ 上取面积元素 $\mathrm{d}S$，$M(x,y,z)$为 $\mathrm{d}S$ 上的一点($z\leqslant 0$)，Σ 在点 M 处的外法线向量的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，则 $\mathrm{d}S$ 所受液体的压力在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量分别为

$$\rho z\cos\alpha\mathrm{d}S,\rho z\cos\beta\mathrm{d}S,\rho z\cos\gamma\mathrm{d}S.$$

Σ 所受的液体的总压力在各坐标轴上的分量等于上列各分量元素在 Σ 上的积分.由高斯公式可算得

$$F_x=\oiint_{\Sigma}\rho z\cos\alpha\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\frac{\partial(\rho z)}{\partial x}\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}0\mathrm{d}v=0;$$

$$F_y=\oiint_{\Sigma}\rho z\cos\beta\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\frac{\partial(\rho z)}{\partial y}\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}0\mathrm{d}v=0;$$

$$F_z=\oiint_{\Sigma}\rho z\cos\gamma\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\frac{\partial(\rho z)}{\partial z}\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}\rho\mathrm{d}v=\rho V,$$

(V 为 Ω 的体积)，故合力

$$\boldsymbol{F}=\rho V\boldsymbol{k},$$

此力的方向铅直向上，大小等于被物体排开的液体的重力.

习 题 10－7

1. 利用斯托克斯公式,计算下列曲线积分:

(1) $\oint_{\Gamma} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$,其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$,若从 x 轴的正向看去,这圆周是取逆时针方向;

(2) $\oint_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$,其中 Γ 为椭圆 $x^2+y^2=a^2$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1(a>0,b>0)$. 若从 x 轴正向看去,这椭圆是取逆时针方向;

(3) $\oint_{\Gamma} 3y\mathrm{d}x - xz\mathrm{d}y + yz^2\mathrm{d}z$,其中 Γ 是圆周 $x^2+y^2=2z, z=2$,若从 z 轴正向看去,这圆周是取逆时针方向;

(4) $\oint_{\Gamma} 2y\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}y - z^2\mathrm{d}z$,其中 Γ 是圆周 $x^2+y^2+z^2=9, z=0$,若从 z 轴正向看去,这圆周是取逆时针方向.

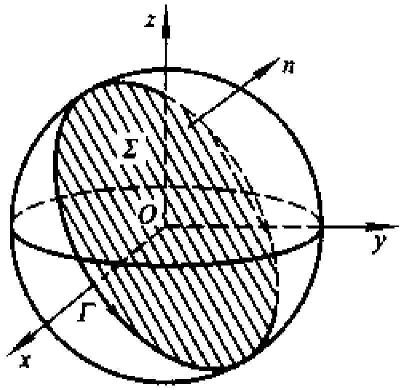


图 10－12

解 (1) 取 Σ 为平面 $x+y+z=0$ 的上侧被 Γ 所围成的部分,则 Σ 的面积为 πa^2, Σ 的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(\text{图 } 10-12).$$

由斯托克斯公式,

$$\oint_{\Gamma} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}S=-\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

(2) 如图 10－13，取 Σ 为平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1$ 的上侧被 Γ 所围成的部分，Σ 的单位法向量 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},0,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. 由斯托克斯公式

$$\oint_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S,(*)$$

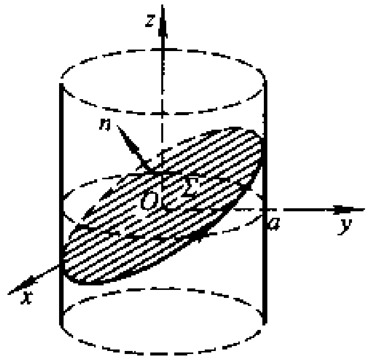


图 10－13

现用两种方法来求 $\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$.

方法一 由于 $\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\Sigma$ 的面积 A，而 $A\cdot\cos\gamma=A\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\Sigma$ 在 xOy 面上的投影区域的面积 $=\pi a^2$，

故 $\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\pi a^2/\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pi a\sqrt{a^2+b^2}$.

方法二 用曲面积分计算法

由于在 Σ 上，$z=b-\frac{b}{a}x$，$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，又 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$，

故 $\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\cdot\pi a^2$

$=\pi a\sqrt{a^2+b^2}$.

将所求得的 $\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$ 代入 $(*)$ 式，得

$$原式=\frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\pi a\sqrt{a^2+b^2}=-2\pi a(a+b).$$

(3) 取 Σ 为平面 $z=2$ 的上侧被 Γ 所围成的部分，则 Σ 的单位法向量为 $\boldsymbol{n}=$

$(0,0,1)$，Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2+y^2\leqslant 4$. 于是由斯托克斯公式，

$$\oint_{\Gamma} 3y\mathrm{d}x - xz\mathrm{d}y + yz^2\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$= -\iint_{\Sigma}(z+3)\mathrm{d}S = -\iint_{D_{xy}}(2+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -5\cdot\pi\cdot 2^2$$

$$= -20\pi.$$

(4) Γ 即为 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=9$，取 Σ 为圆域 $x^2+y^2\leqslant 9$ 的上侧，则由斯托克斯公式

$$\oint_{\Gamma} 2y\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}y - z^2\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \iint_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 9\pi.$$

2. 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度：

(1) $\boldsymbol{A} = (2z-3y)\boldsymbol{i} + (3x-z)\boldsymbol{j} + (y-2x)\boldsymbol{k}$；

(2) $\boldsymbol{A} = (z+\sin y)\boldsymbol{i} - (z-x\cos y)\boldsymbol{j}$；

(3) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}x^2\sin y + \boldsymbol{j}y^2\sin(xz) + \boldsymbol{k}xy\sin(\cos z)$.

解 (1) $$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2z-3y & 3x-z & y-2x \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}.$$

(2) $$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z+\sin y & -(z-x\cos y) & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+(\cos y-\cos y)\boldsymbol{k}$$

$$= \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}.$$

(3) $$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2\sin y & y^2\sin(xz) & xy\sin(\cos z) \end{vmatrix}$$

$$= [x\sin(\cos z) - xy^2\cos(xz)]\boldsymbol{i} - y\sin(\cos z)\boldsymbol{j} + [y^2z\cos(xz) - x^2\cos y]\boldsymbol{k}.$$

3. 利用斯托克斯公式把曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$化为曲线积分,并计算积分值,其中$\boldsymbol{A}$、$\Sigma$及$\boldsymbol{n}$分别如下:

(1) $\boldsymbol{A}=y^2\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$,$\Sigma$为上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的上侧,$\boldsymbol{n}$是$\Sigma$的单位法向量;

(2) $\boldsymbol{A}=(y-z)\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}-xz\boldsymbol{k}$,$\Sigma$为立方体$\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2,0\leqslant z\leqslant 2\}$的表面外侧去掉$xOy$面上的那个底面,$\boldsymbol{n}$是$\Sigma$的单位法向量.

解 (1) Σ的正向边界曲线Γ为xOy面上的圆周$x^2+y^2=1$,从z轴正向看去Γ取逆时针向,Γ的参数方程为$x=\cos t,y=\sin t,z=0,t$从0变到2π.

由斯托克斯公式,

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S&=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\\&=\oint_{\Gamma}y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}[\sin^2t\cdot(-\sin t)+\cos t\cdot\sin t\cdot\cos t]\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}(1-2\cos^2t)\mathrm{d}\cos t=0.\end{aligned}$$

(2) Σ的边界曲线Γ为xOy面上由直线$x=0,y=0,x=2,y=2$所围成的正方形的边界,从z轴正向看去取逆时针向.由斯托克斯公式,

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S&=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\\&=\oint_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}y-xz\mathrm{d}z\quad(\text{代入 }z=0)\\&=\oint_{\Gamma}y\mathrm{d}x=\int_2^0 2\mathrm{d}x=-4.\end{aligned}$$

4. 求下列向量场$\boldsymbol{A}$沿闭曲线Γ(从z轴正向看Γ依逆时针方向)的环流量:

(1) $\boldsymbol{A}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$($c$为常量),$\Gamma$为圆周$x^2+y^2=1,z=0$;

(2) $\boldsymbol{A}=(x-z)\boldsymbol{i}+(x^3+yz)\boldsymbol{j}-3xy^2\boldsymbol{k}$,其中$\Gamma$为圆周$z=2-\sqrt{x^2+y^2},z=0$.

解 (1) Γ的参数方程为$x=\cos t,y=\sin t,z=0,t$从0变到2π,于是所求环流量为

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s&=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\\&=\oint_{\Gamma}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}[(-\sin t)(-\sin t)+\cos t(\cos t)]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi.$$

(2) Γ 是 xOy 面上的圆周 $x^2 + y^2 = 4$(从 z 轴正向看 Γ 依逆时针方向),它的参数方程为 $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 0, t$ 从 0 变到 2π. 于是所求的环流量为

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\tau} \mathrm{d}s = \oint_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

$$= \oint_\Gamma (x - z)\mathrm{d}x + (x^3 + yz)\mathrm{d}y - 3xy^2\mathrm{d}z \text{ (代入 } z = 0)$$

$$= \oint_\Gamma x\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} [2\cos t \cdot (-2\sin t) + 8\cos^3 t \cdot 2\cos t]\mathrm{d}t$$

$$= -4\int_0^{2\pi} \sin t\cos t\mathrm{d}t + 16\int_0^{2\pi} \cos^4 t\mathrm{d}t$$

$$= 0 + 64\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\mathrm{d}t^*$$

$$= 64 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 12\pi.$$

注* $\int_0^{2\pi} \cos^4 t\mathrm{d}t \xlongequal{\text{周期性}} 2\int_0^{\pi} \cos^4 t\mathrm{d}t = 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 t\mathrm{d}t\right]$, 由于 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 t\mathrm{d}t \xlongequal{u = \pi - t} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^4 u\mathrm{d}u$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 u\mathrm{d}u$, 故得 $\int_0^{2\pi} \cos^4 t\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\mathrm{d}t$.

5. 证明 $\mathbf{rot}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \mathbf{rot}\, \boldsymbol{a} + \mathbf{rot}\, \boldsymbol{b}$.

证 设 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$,

$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$,

其中 $a_x, a_y, a_z; b_x, b_y, b_z$ 均为 x, y, z 的函数,则

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \mathbf{rot}((a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k})$$

$$= \left[\frac{\partial(a_z + b_z)}{\partial y} - \frac{\partial(a_y + b_y)}{\partial z}\right]\boldsymbol{i} + \left[\frac{\partial(a_x + b_x)}{\partial z} - \frac{\partial(a_z + b_z)}{\partial x}\right]\boldsymbol{j} + \left[\frac{\partial(a_y + b_y)}{\partial x} - \frac{\partial(a_x + b_x)}{\partial y}\right]\boldsymbol{k}$$

$$= \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]$$

$$+\left[\left(\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial b_x}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial b_y}{\partial x}-\frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]$$

$$=\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a}+\mathbf{rot}\ \boldsymbol{b}.$$

6. 设 $u=u(x,y,z)$ 具有二阶连续偏导数,求 $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\ u)$.

解 $\mathbf{grad}\ u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\ u)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\boldsymbol{j}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{k}\ \text{(由于各二阶偏导数连续)}$$

$$=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}=\mathbf{0}.$$

*7. 证明

(1) $\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$;

(2) $\Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u+2\nabla u\cdot\nabla v$;

(3) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$;

(4) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$.

证 (1) 左式 $=\nabla(uv)=\frac{\partial(uv)}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial(uv)}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial(uv)}{\partial z}\boldsymbol{k}$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}v+u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}v+u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}v+u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)+v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

$$=u\nabla v+v\Delta u=\text{右式}.$$

(2) 左式 $=\nabla(uv)=\frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(uv)}{\partial z^2}$,

而 $$\frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(uv)}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}v+u\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}v+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2};$$

类似可得 $$\frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}v+2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^2(uv)}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}v+2\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

代入左式得

$$\Delta(uv) = u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) +$$
$$2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$= u\Delta v + v\Delta u + 2\nabla u \cdot \nabla v = \text{右式}.$$

(3) 设 $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$，

$$\text{左式} = \nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(A_yB_z - B_yA_z) + \frac{\partial}{\partial y}(A_zB_x - B_zA_x) +$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(A_xB_y - B_xA_y)$$
$$= B_z\frac{\partial A_y}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_z}{\partial x} - B_y\frac{\partial A_z}{\partial x} - A_z\frac{\partial B_y}{\partial x} +$$
$$B_x\frac{\partial A_z}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_x}{\partial y} - B_z\frac{\partial A_x}{\partial y} - A_x\frac{\partial B_z}{\partial y} +$$
$$B_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + A_x\frac{\partial B_y}{\partial z} - B_x\frac{\partial A_y}{\partial z} - A_y\frac{\partial B_x}{\partial z}$$
$$= \left[B_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + B_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + B_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right] -$$
$$\left[A_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) + A_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) + A_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\right]$$
$$= \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times A) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times B) = \text{右式}.$$

(4) 设 $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$，因为

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$
$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k},$$

所以

$$\text{左式} = \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} & \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

$$= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{i} +$$

$$\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial x}\right)\boldsymbol{j} +$$

$$\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{i} - \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{i} +$$

$$\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{j} - \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{j} +$$

$$\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{k} - \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{k}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} - \nabla^2 A_x\boldsymbol{i} +$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{j} - \nabla^2 A_y\boldsymbol{j} +$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{k} - \nabla^2 A_z\boldsymbol{k}$$

$$= \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} = \text{右式}.$$

总习题十

1. 填空

(1) 第二类曲线积分$\int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$化成第一类曲线积分是________,其中$\alpha$、$\beta$、$\gamma$为有向曲线弧$\Gamma$在点$(x,y,z)$处的________的方向角;

(2) 第二类曲面积分$\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$化成第一类曲面积分是________,其中$\alpha$、$\beta$、$\gamma$为有向曲面$\Sigma$在点$(x,y,z)$处的________的方向角.

解 (1) 由教材本章第二节的公式(3),可知第一个空格应填:$\int_\Gamma(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$;第二个空格应填:切向量.

(2) 由教材本章第五节的公式(9),可知第一个空格应填$\iint_\Sigma(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$;第二个空格应填:法向量.

2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设曲面Σ是上半球面:$x^2+y^2+z^2=R^2(z\geqslant 0)$,曲面$\Sigma_1$是曲面$\Sigma$在第

一卦限中的部分，则有____.

(A) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$.　　(B) $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$.

(C) $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$.　　(D) $\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}S$.

解　应选(C).先说明(A)不对.由于 Σ 关于 yOz 面对称，被积函数 x 关于 x 是奇函数，所以 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S = 0$.但在 Σ_1 上，被积函数 x 连续且大于零，所以 $\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S > 0$.因此 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S \neq 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$.类似可说明(B)和(D)不对.再说明(C)正确.由于 Σ 关于 yOz 面和 zOx 面均对称，被积函数 z 关于 x 和 y 均为偶函数，故 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} z\mathrm{d}S$；而在 Σ_1 上，字母 x、y、z 是对称的.故 $\iint\limits_{\Sigma_1} z\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$，因此有 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$.

3. 计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=ax$；

(2) $\int_\Gamma z\,\mathrm{d}s$，其中 Γ 为曲线 $x=t\cos t, y=t\sin t, z=t\,(0\leqslant t\leqslant t_0)$；

(3) $\int_L (2a-y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$，其中 L 为摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 上对应 t 从 0 到 2π 的一段弧；

(4) $\int_\Gamma (y^2-z^2)\mathrm{d}x + 2yz\mathrm{d}y - x^2\mathrm{d}z$，其中 Γ 是曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上由 $t_1=0$ 到 $t_2=1$ 的一段弧；

(5) $\int_\Gamma (\mathrm{e}^x\sin y-2y)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y-2)\mathrm{d}y$，其中 L 为上半圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2, y\geqslant 0$，沿逆时针方向；

(6) $\oint_\Gamma xyz\mathrm{d}z$，其中 Γ 是用平面 $y=z$ 截球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所得的截痕，从 z 轴的正向看去，沿逆时针方向.

解　(1) **解法一**　L 的方程即为 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$，故可取 L 的参数方程为 $x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t, y=\frac{a}{2}\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.于是.

$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}a}{2}\sqrt{1+\cos t}\cdot\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\sin t\right)^2+\left(\frac{a}{2}\cos t\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sqrt{2}a^2}{4}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}a^2}{4}\cdot\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\,\mathrm{d}\frac{t}{2} = 2a^2.$$

解法二 L 的极坐标方程为 $\rho = a\cos\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,

$$\mathrm{d}S = \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,\mathrm{d}\theta = a\,\mathrm{d}\theta,$$

因此 $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta\cdot a\,\mathrm{d}\theta = 2a^2.$

(2) $$\int_\Gamma z\,\mathrm{d}s = \int_0^{t_0} t\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{t_0} t\sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{t_0}\sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}(2+t^2)$$

$$= \frac{1}{3}(2+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{t_0} = \frac{1}{3}\left[(2+t_0)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}\right].$$

(3) $$\int_L (2a-y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[(2a-a+a\cos t)\cdot a(1-\cos t)+a(t-\sin t)\cdot a\sin t\right]\mathrm{d}t$$

$$= a^2\int_0^{2\pi} t\sin t\,\mathrm{d}t = a^2\left[-t\cos t\right]_0^{2\pi} + a^2\int_0^{2\pi}\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= -2\pi a^2 + 0 = -2\pi a^2.$$

(4) $$\int_\Gamma (y^2-z^2)\,\mathrm{d}x + 2yz\,\mathrm{d}y - x^2\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1\left[(t^4-t^6)\cdot 1 + 2t^2\cdot t^3\cdot 2t - t^2\cdot 3t^2\right]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 (3t^6-2t^4)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{35}.$$

(5) 如图 10 − 14,添加有向线段 $OA: y = 0$, x 从 0 变到 $2a$,则在由 L 与 OA 所围成的闭区域 D 上应用格林公式可得

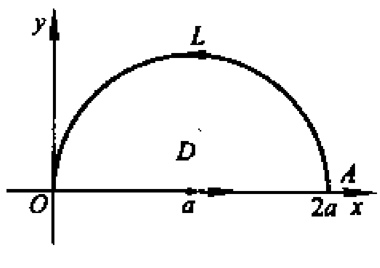


图 10 − 14

$$\int_{L+OA} (\mathrm{e}^x\sin y - 2y)\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - 2)\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D (e^x\cos y - e^x\cos y + 2)\,dx\,dy$$

$$= 2\iint_D dx\,dy = \pi a^2,$$

于是
$$\int_L (e^x\sin y - 2y)dx + (e^x\cos y - 2)dy$$

$$= \pi a^2 - \int_{OA} (e^x\sin y - 2y)dx + (e^x\cos y - 2)dy$$

$$= \pi a^2 - \int_0^{2a} (e^x\sin 0 - 2\cdot 0)dx = \pi a^2.$$

注　本题通过添加辅助路径并利用格林公式，将难以直接计算的曲线积分化为一个易于计算的二重积分和曲线积分，从而方便地求得结果．这是格林公式的用处之一，值得注意．

(6) 由 Γ 的一般方程$\begin{cases} y = z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$可得 $x^2 + 2y^2 = 1$.

从而可令 $x = \cos t, y = \dfrac{\sin t}{\sqrt{2}}, z = \dfrac{\sin t}{\sqrt{2}}$，$t$ 从 0 变到 2π.

于是

$$\oint_\Gamma xyz\,dz = \int_0^{2\pi} \cos t\left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{\cos t}{\sqrt{2}}dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,dt$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)dt$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2}dt = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{16}.$$

4．计算下列曲面积分：

(1) $\displaystyle\iint_\Sigma \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2}$，其中 Σ 是界于平面 $z = 0$ 及 $z = H$ 之间的圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$；

(2) $\displaystyle\iint_\Sigma (y^2 - z)dydz + (z^2 - x)dzdx + (x^2 - y)dxdy$，其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$ 的外侧；

(3) $\displaystyle\iint_\Sigma xdydz + ydzdx + zdxdy$，其中 Σ 为半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧；

(4) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$，其中 Σ 为曲面 $1-\dfrac{z}{5}=\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{9}(z\geqslant 0)$ 的上侧；

(5) $\iint\limits_{\Sigma}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 的外侧.

解 (1) 将 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 两片，Σ_1 为 $y=\sqrt{R^2-x^2}$，Σ_2 为 $y=-\sqrt{R^2-x^2}$，Σ_1 和 Σ_2 在 zOx 面上的投影区域均为

$$D_{zx}=\{(x,z)\mid 0\leqslant z\leqslant H,-R\leqslant x\leqslant R\}.$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}&=\iint\limits_{D_{zx}}\frac{1}{R^2+z^2}\sqrt{1+\frac{(-x)^2}{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\&=\int_0^H\frac{1}{R^2+z^2}\mathrm{d}z\cdot\int_{-R}^{R}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\\&=\left[\frac{1}{R}\arctan\frac{z}{R}\right]_0^H\cdot\left[R\arcsin\frac{x}{R}\right]_{-R}^{R}\\&=\pi\arctan\frac{H}{R}\end{aligned}$$

又由于被积函数关于 y 是偶函数，积分曲面 Σ_1 和 Σ_2 关于 zOx 面对称，故 $\iint\limits_{\Sigma_2}\dfrac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{\Sigma_1}\dfrac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=\pi\arctan\dfrac{H}{R}$. 由此得

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=2\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

(2) 添加辅助曲面 $\Sigma_1=\{(x,y,z)\mid z=h,x^2+y^2\leqslant h^2\}$，取上侧，则在由 Σ 和 Σ_1 所包围的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式得

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial(y^2-z)}{\partial x}+\frac{\partial(z^2-x)}{\partial y}+\frac{\partial(x^2-y)}{\partial z}\right]\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}0\cdot\mathrm{d}v=0,\end{aligned}$$

于是 $$\begin{aligned}\text{原式}&=-\iint\limits_{\Sigma_1}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant h^2\}$.

在计算 $\iint\limits_{D_{xy}}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 时，由对称性易知 $\iint\limits_{D_{xy}}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，又 $\iint\limits_{D_{xy}}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，故 $\iint\limits_{D_{xy}}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{极坐标}}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho$ $=\frac{\pi}{4}h^4$.

从而得
$$\text{原式}=-\frac{\pi}{4}h^4.$$

注 本题若用第二类曲面积分的计算公式直接计算，则运算将十分繁复.现在通过添加辅助曲面并利用高斯公式，就将原积分化为辅助曲面上的一个十分容易计算的曲面积分，从而达到了化繁为简、化难为易的目的.这种做法与前面第3(5)题利用格林公式化简曲线积分的做法是非常类似的，请读者注意比较，并思考这样的问题：要使这种做法可行，所给的曲线积分(曲面积分)应具备什么条件?

(3) 添加辅助曲而 $\Sigma_1=\{(x,y,z)\mid z=0,x^2+y^2\leqslant R^2\}$，取下侧，则在由 Σ 和 Σ_1 所围成的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式得

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$
$$=3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=3\cdot\frac{2\pi R^3}{3}=2\pi R^3,$$

于是

$$\text{原式}=2\pi R^3-\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=2\pi R^3-0=2\pi R^3.$$

(4) 记 $r=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，则 $P=\frac{x}{r^3},Q=\frac{y}{r^3},R=\frac{z}{r^3}$.

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{r^3}-3\frac{x}{r^4}\cdot\frac{x}{r}=\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5},\quad\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{r^3}-\frac{3y^2}{r^5},$$
$$\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5},$$

得
$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{3}{r^3}-\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0.$$

由此可知本题也可通过添加辅助曲面并利用高斯公式来计算.但由于在原点(0,0,0)处，P、Q、R 的分母为零，故所取的辅助曲面不能过原点.为此设 $\Sigma_1=\Sigma_2$

$+\Sigma_3$，其中 $\Sigma_2=\left\{(x,y,z)\mid z=0, x^2+y^2\geqslant a^2\right.$ 且 $\left.\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}\leqslant 1\right\}$，$\Sigma_3=\{(x,y,z)\mid z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\}$，均取下侧，常数 a 为足够小的正数，使上半球面 Σ_3 与积分曲面 Σ 不相交(图 10－15)。

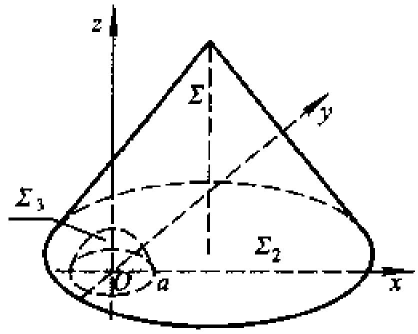


图 10－15

于是在由 Σ 和 Σ_1 所围成的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式

得 $$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=0.$$

因此 $$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}=-\iint\limits_{\Sigma_1(\Sigma_2+\Sigma_3)}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}.$$

由于在 Σ_2 上，$z=0$，故 $\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}=0$，

从面得

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}=-\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}.$$

在 Σ_3 上，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=a$，

因此上式右端 $=-\frac{1}{a^3}\iint\limits_{\Sigma_3}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

采用与第(3)小题完全相同的计算方法，可算得

$$\iint\limits_{\Sigma_3}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi a^3\quad(\text{注意 }\Sigma_3\text{ 取下侧}),$$

从而 $$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}=-\frac{1}{a^3}\iint\limits_{\Sigma_3}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{a^3}(-2\pi a^3)=2\pi.$$

(5) **解法一** 将 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 两片，其中 $\Sigma_1: z=\sqrt{1-x^2-y^2}\,(x\geqslant 0, y\geqslant 0)$，取上侧；$\Sigma_2: z=-\sqrt{1-x^2-y^2}\,(x\geqslant 0, y\geqslant 0)$，取下侧. Σ_1 和 Σ_2 在 xOy 面上的投影区域均为 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$(图 10－16).

于是 $\displaystyle\iint_{\Sigma_1} xyz\,dx\,dy = \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \cdot \int_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho$$

$$\xlongequal{\rho=\sin t} \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cdot\cos^2 t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t - \sin^5 t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{15};$$

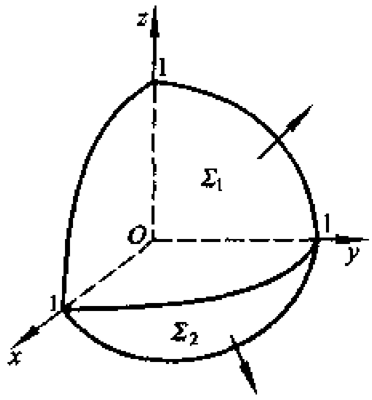


图 10-16

$$\iint_{\Sigma_2} xyz\,dx\,dy = -\iint_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})\,dx\,dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \frac{1}{15},$$

因而
$$\iint_{\Sigma} xyz\,dx\,dy = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15}.$$

解法二 应用高斯公式计算.

添加辅助曲面 $\Sigma_3: x=0$(取后侧); $\Sigma_4: y=0$(取左侧),则有 $\displaystyle\iint_{\Sigma_3} xyz\,dx\,dy = \iint_{\Sigma_4} xyz\,dx\,dy = 0$.

在由 Σ、Σ_3 和 Σ_4 所围成的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式,得

$$\iint_{\Sigma} xyz\,dx\,dy = \iint_{\Sigma+\Sigma_3+\Sigma_4} xyz\,dx\,dy = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(xyz)}{\partial z}\,dv$$

$$= \iiint_{\Omega} xy\,dv = \iint_{D_{xy}} xy\,dx\,dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \frac{2}{15}.$$

5. 证明:$\dfrac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$在整个 xOy 平面除去 y 的负半轴及原点的区域 G 内是某个二元函数的全微分,并求出一个这样的二元函数.

证 G 为平面单连通域,在 G 内 $P=\dfrac{x}{x^2+y^2}$,$Q=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ 具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故 $\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 在 G 内是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分.

取折线积分路径 $(0,1)\to(x,1)\to(x,y)$（图 10－17），则

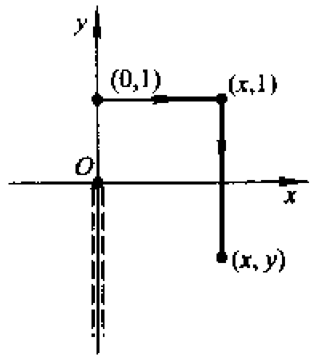


图 10－17

$$u(x,y)=\int_0^x\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1}+\int_1^y\frac{y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$
$$=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}[\ln(x^2+y^2)]_1^y$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$

6. 设在半平面 $x>0$ 内有力 $\boldsymbol{F}=-\frac{k}{\rho^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$ 构成力场，其中 k 为常数，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. 证明在此力场中场力所作的功与所取的路径无关.

证 半平面 $x>0$ 是单连通域. 在此区域内，$P=-\frac{kx}{\rho^3}$、$Q=-\frac{ky}{\rho^3}$ 具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{3kxy}{\rho^5}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故在此区域内，场力 $\boldsymbol{F}$ 沿曲线 L 所作的功，即

$$\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-k\int_L\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\rho^3}$$

与路径无关.

7. 求均匀曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的质心的坐标.

解 设质心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. 由对称性可知质心位于 z 轴上，故 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$.

由于 $$\iint_\Sigma z\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=a\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\cdot\pi a^2=\pi a^3,$$

又 $$\Sigma\text{ 的面积 }A=2\pi a^2,$$

故
$$\bar{z}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S}{A}=\frac{\pi a^3}{2\pi a^2}=\frac{a}{2},$$
所求的质心为$\left(0,0,\frac{a}{2}\right)$.

8. 设 $u(x,y)$、$v(x,y)$在闭区域 D 上都具有二阶连续偏导数，分段光滑的曲线 L 为D 的正向边界曲线. 证明：

(1) $\iint\limits_{D}v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D}(\mathbf{grad}\ u\cdot\mathbf{grad}\ v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{L}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$；

(2) $\iint\limits_{D}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{L}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s$,

其中$\frac{\partial u}{\partial n}$、$\frac{\partial v}{\partial n}$分别是 u、v 沿 L 的外法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数，符号 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$称二维拉普拉斯算子.

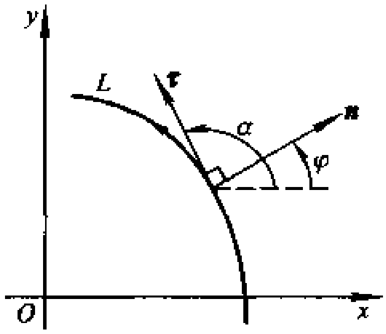


图 10－18

证 (1) 如图 10－18，$\boldsymbol{n}$ 为有向曲线L 的外法线向量，τ 为 L 的切线向量. 设 x 轴到 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 的转角分别为φ 和α，则 $\alpha=\varphi+\frac{\pi}{2}$，且 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为 $\cos\varphi,\sin\varphi$；$\boldsymbol{\tau}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha,\sin\alpha$.

于是
$$\oint_{L}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\oint_{L}v(u_x\cos\varphi+u_y\sin\varphi)\mathrm{d}s$$
$$=\oint_{L}v(u_x\sin\alpha-u_y\cos\alpha)\mathrm{d}s(\cos\alpha\mathrm{d}s=\mathrm{d}x,\sin\alpha\mathrm{d}s=\mathrm{d}y)$$
$$=\oint_{L}vu_x\mathrm{d}y-vu_y\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{\text{格林公式}}\iint\limits_{D}\left[\frac{\partial(vu_x)}{\partial x}-\frac{\partial(-vu_y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{D}[(u_xv_x+vu_{xx})+(u_yv_y+vu_{yy})]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{D}v(u_{xx}+u_{yy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D}(u_xv_x+u_yv_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{D}v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D}(\mathbf{grad}\ u\cdot\mathbf{grad}\ v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
把上式右端第二个积分移到左端即得所要证明的等式.

(2) 在(1)证得的等式中交换 u、v 的位置，可得

$$\iint_D u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D(\mathbf{grad}\ v\cdot\mathbf{grad}\ u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_L u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s,$$

在此式的两端分别减去(1)中等式的两端,即得所需证明的等式.

9. 求向量 $\boldsymbol{A}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 通过闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1\}$ 的边界曲面流向外侧的通量.

解 通量 $\Phi=\oiint_\Sigma \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\oiint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\xlongequal{\text{高斯公式}}\iiint_\Omega\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$

$$=\iiint_\Omega(1+1+1)\mathrm{d}v=3\iiint_\Omega\mathrm{d}v=3\cdot 1=3.$$

10. 求力 $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$ 沿有向闭曲线 Γ 所作的功,其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界,从 z 轴正向看去,沿顺时针方向.

解 $W=\oint_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z.$

下面用两种方法来计算上面这个积分.

方法一 化为定积分直接计算.如图 10-19,Γ 由 AB、BC、CA 三条有向线段组成,

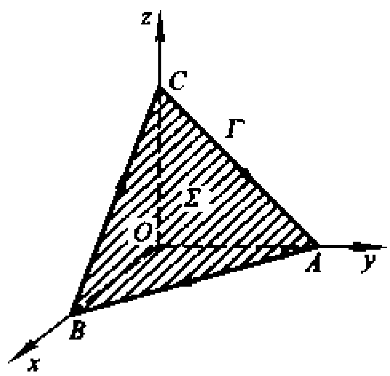


图 10-19

AB: $z=0,x=t,y=1-t,t$ 从 0 变到 1;

BC: $y=0,x=t,z=1-t,t$ 从 1 变到 0;

CA: $x=0,y=t,z=1-t,t$ 从 0 变到 1.

于是

$$\int_{AB}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_{AB}y\mathrm{d}x=\int_0^1(1-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2};$$

$$\int_{BC}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_{BC}x\mathrm{d}z=\int_1^0 t\cdot(-1)\mathrm{d}t=\frac{1}{2};$$

$$\int_{CA}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_{CA}z\mathrm{d}y=\int_0^1(1-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.$$

因此 $$W=\oint_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}=\frac{3}{2}.$$

方法二 利用斯托克斯公式计算.取 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 的下侧被 Γ 所围的部分,则 Σ 在任一点处的单位法向量为 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,由斯托克斯公式得

$$\oint_{\Gamma} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

$$= \iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}S = \sqrt{3}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$= \sqrt{3} \cdot (\Sigma \text{ 的面积}) = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.$$

第十一章　无穷级数

习　题　11－1

1．写出下列级数的前五项：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot2n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^n}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

解　(1) $\frac{1+1}{1+1^2}+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\frac{1+4}{1+4^2}+\frac{1+5}{1+5^2}+\cdots$.

(2) $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}+\cdots$.

(3) $\frac{1}{5}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^5}-\cdots$.

(4) $\frac{1!}{1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\frac{5!}{5^5}+\cdots$.

2．写出下列级数的一般项：

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$；

(2) $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}-\cdots$；

(3) $\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{x}{2\cdot4}+\frac{x\sqrt{x}}{2\cdot4\cdot6}+\frac{x^2}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots$；

(4) $\frac{a^2}{3}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{7}-\frac{a^5}{9}+\cdots$.

解　设 u_n 为级数的一般项，通过观察，不难看出：

(1) $u_n=\frac{1}{2n-1}$.

(2) $u_n=(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$.

(3) $u_n=\frac{x^{\frac{n}{2}}}{2\cdot4\cdot6\cdot(2n)}$.

(4) $u_n=(-1)^{n-1}\frac{a^{n+1}}{2n+1}$.

3. 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(2) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$;

(3) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$.

解 设级数的部分和为 S_n.

(1) 因为

$$\begin{aligned}S_n&=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\&=\sqrt{n+1}-1,\\ \lim_{n\to\infty}S_n&=\infty,\end{aligned}$$

所以根据定义可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$发散.

(2) 由于 $u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$,从而

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2n+1}\right],\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2},$$

所以根据定义可知级数收敛.

(3) 由于 $u_n=\sin\frac{n\pi}{6}=\frac{2\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{n\pi}{6}}{2\sin\frac{\pi}{12}}=\frac{\cos\frac{2n-1}{12}\pi-\cos\frac{2n+1}{12}\pi}{2\sin\frac{\pi}{12}}$,

从而

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left[\left(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{3\pi}{12}\right)+\left(\cos\frac{3\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}\right)+\cdots+\right.\\&\qquad\left.\left(\cos\frac{2n-1}{12}\pi-\cos\frac{2n+1}{12}\pi\right)\right]\\&=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{2n+1}{12}\pi\right),\end{aligned}$$

因为当 $n\to\infty$ 时，$\cos\dfrac{2n+1}{12}\pi$ 的极限不存在，所以 S_n 的极限不存在，即级数发散.

4. 判定下列级数的收敛性：

(1) $-\dfrac{8}{9}+\dfrac{8^2}{9^2}-\dfrac{8^3}{9^3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{8^n}{9^n}+\cdots$;

(2) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3n}+\cdots$;

(3) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$;

(4) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3^2}{2^2}+\dfrac{3^3}{2^3}+\cdots+\dfrac{3^n}{2^n}+\cdots$;

(5) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\left(\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+\cdots$.

解 (1) 此级数为公比 $q=-\dfrac{8}{9}$ 的等比级数，因 $|q|<1$，故该级数收敛.

(2) 此级数的部分和

$$S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)=+\infty$，故

$$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty,$$

即该级数发散.

(3) 此级数的一般项 $u_n=\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}}=1$，不满足级数收敛的必要条件，故该级数发散.

(4) 此级数为公比 $q=\dfrac{3}{2}$ 的等比级数，因 $|q|>1$，故该级数发散.

(5) 此级数的一般项 $u_n=\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}$，注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 分别是公比 $q=\dfrac{1}{2}$ 与 $q=\dfrac{1}{3}$ 的等比级数，而 $|q|<1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 均收敛. 根据收敛级数的性质可知，原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)$ 收敛.

*5. 利用柯西审敛原理判定下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$;

(2) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$;

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}\right)$.

解 (1)
$$\begin{aligned}|S_{n+p}-S_n| &= |u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\cdots+u_{n+p}|\\ &=\left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}+\frac{(-1)^{n+3}}{n+2}+\frac{(-1)^{n+4}}{n+3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+p+1}}{n+p}\right|\\ &=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right|\end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\cdots+\begin{cases}\frac{1}{n+p}, & p\text{ 为奇数},\\ \frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}, & p\text{ 为偶数}.\end{cases}$

故
$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}>0,\ \forall p\in\mathbf{N}^*.$$

于是,当 p 为奇数时,
$$|S_{n+p}-S_n|=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)<\frac{1}{n+1};$$

当 p 为偶数时,
$$|S_{n+p}-S_n|=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}\right)-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n+1}.$$

因此,对任意给定的正数 ε,取正整数 $N\geqslant\frac{1}{\varepsilon}$,则当 $n>N$ 时,对任何正整数 p,都有
$$|S_{n+p}-S_n|<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

根据柯西收敛原理知,级数收敛.

(2) 当 n 是 3 的倍数时,如果取 $p=3n$,则必有
$$\begin{aligned}|S_{n+p}-S_n| &=\left|\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\frac{1}{n+4}+\left(\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}\right)+\cdots+\frac{1}{4n-2}+\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right)\right|\\ &>\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{4n-2}>\underbrace{\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}+\cdots+\frac{1}{4n}}_{n\text{ 个}}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

于是对 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$,不论 N 为何正整数,当 $n>N$ 并 n 是 3 的倍数,且当 $p=$

$3n$ 时，就有

$$|S_{n+p}-S_n|>\varepsilon_0,$$

根据柯西收敛原理知，级数发散.

注 柯西收敛原理是这样叙述的：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件为“对任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，对任意的正整数 p，都有 $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$.”

因此按柯西收敛原理，判别级数发散的充要条件就是对上述条件的否定，即“对某个正数 ε_0，不论 N 取什么正整数，至少有一个 $n(>N)$ 且至少有一个 $p\in\mathbf{N}^*$，使得 $|S_{n+p}-S_n|\geqslant\varepsilon_0$.”

(3) $$\begin{aligned}|S_{n+p}-S_n| &= |u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|\\ &=\left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right|\\ &\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}}\\ &<\frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

由此可知，对任意给定的正数 ε，取正整数 $N\geqslant\log_2\frac{1}{\varepsilon}$，当 $n>N$ 时，对一切正整数 p，都有 $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$. 按柯西收敛原理，该级数收敛.

(4) 本题与(2)类同，因 $u_n=\frac{1}{3n+1}+\left(\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}\right)>\frac{1}{3n+1}>\frac{1}{9n}$，对 $\varepsilon_0=\frac{1}{9}$，不论 n 取什么正整数，取 $p=n$ 时，就有 $|S_{n+p}-S_n|>\frac{1}{9}$. 因此该级数发散.

习 题 11-2

1. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的收敛性：

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)}+\cdots$;

(2) $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}+\cdots$;

(3) $\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{3\cdot6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$;

(4) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2^2}+\sin\frac{\pi}{2^3}+\cdots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\cdots$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}\quad(a>0)$.

解 (1) **方法一**:$u_n=\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}(n=1,2,\cdots)$,由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,故各项乘以$\frac{1}{2}$后的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$也发散.由比较审敛法知原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$发散.

方法二:因$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,故由极限比较审敛法知原级数发散.

(2) $u_n=\frac{1+n}{1+n^2}>\frac{1+n}{n+n^2}=\frac{1}{n}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,由比较审敛法知原级数发散.

(3) 因$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)(n+4)}}{\frac{1}{n^2}}=1$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,由极限比较审敛法知原级数收敛.

(4) 因$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\pi\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}=\pi$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛,故由极限比较审敛法知原级数收敛.

(5) 当$0<a\leqslant 1$时,$\frac{1}{1+a^n}\geqslant\frac{1}{2}$,一般项不趋于零,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 发散;当$a>1$时,$\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$收敛,故由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$收敛.

2. 用比值审敛法判定下列级数的收敛性:

(1) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{3^2}{2\cdot 2^2}+\frac{3^3}{3\cdot 2^3}+\cdots+\frac{3^n}{n\cdot 2^n}+\cdots$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

解 (1) 因$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\Big/\frac{3^n}{n\cdot 2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{3}{2}>1$,故级数发散.

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\Big/\frac{n^2}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2}=\frac{1}{3}<1$,故级数

收敛.

(3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\Big/\frac{2^n n!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{1+n}\right)^n=\frac{2}{e}<1$，故该级数收敛.

(4) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}\Big/n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1\text{，故该级数收敛.}$$

3. 用根值审敛法判定下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$；　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$，其中 $a_n\to a\ (n\to\infty)$，a_n,b,a 均为正数.

解　(1) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$，故级数收敛.

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1$，故级数收敛.

(3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}}=\left(\frac{1}{3}\right)^2<1$，故级数收敛.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b}{a_n}=\frac{b}{a}$.

当 $b<a$ 时，因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}<1$，故级数收敛；

当 $b>a$ 时，因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}>1$，故级数发散；

当 $b=a$ 时，级数的收敛性不能确定.$\Big($例如，$b=1,a_n=1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ 发散；又如，$b=1,a_n=n^{\frac{2}{n}}\to1(n\to\infty)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛$\Big)$.

4. 判定下列级数的收敛性：

(1) $\frac{3}{4}+2\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots+n\left(\frac{3}{4}\right)^n+\cdots$；

(2) $\frac{1^4}{1!}+\frac{2^4}{2!}+\frac{3^4}{3!}+\cdots+\frac{n^4}{n!}+\cdots$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$;

(5) $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\cdots$;

(6) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a+b}+\cdots+\frac{1}{na+b}+\cdots(a>0,b>0)$.

解 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}<1$,由比值审敛法知级数收敛.

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n+1}=0<1$,由比值审敛法知级数收敛.

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}\Big/\frac{1}{n}=1$,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,由极限比较审敛法知原级数发散.

(4) 因$\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}\Big/\left(\frac{2}{3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\pi\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{3^n}}{\frac{\pi}{3^n}}=\pi$,而几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛,故由极限比较审敛法知原级数收敛.

(5) 因$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=1\neq0$,故级数发散.

(6) 因$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na+b}\Big/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a+\frac{b}{n}}=\frac{1}{a}$,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,故由极限形式的比较极限审敛法知原级数发散.

5. 判定下列级数是否收敛?如果是收敛的,是绝对收敛还是条件收敛?

(1) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$;

(3) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots$;

(4) $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$.

解 (1) $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{1}{2}}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$是发散的; $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是交错级数,

满足 $|u_n| \geqslant |u_{n+1}|$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，故由莱布尼茨定理知级数收敛且条件收敛.

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{3} < 1$，由比值审敛法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，故原级数绝对收敛.

(3) $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{3\cdot 2^n}$，因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3\cdot 2^n}$ 是公比 $q=\dfrac{1}{2}(|q|<1)$ 的等比级数，故收敛，从而原级数绝对收敛.

(4) $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$，$|u_n| = \dfrac{1}{\ln(n+1)} > \dfrac{1}{n+1}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 是发散的，故由比较审敛法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是交错级数，满足 $|u_n| \geqslant |u_{n+1}|$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = 0$，故由莱布尼茨定理知原级数收敛且条件收敛.

(5) $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}2^{n^2}}{n!}$，$|u_n| = \dfrac{2^n\cdot 2^n\cdot\cdots\cdot 2^n}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n} > \dfrac{2^n}{n}$，可见 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = +\infty$，即原级数的一般项 u_n 随 n 增大而不趋于零，故该级数发散.

习　题　11－3

1. 求下列幂级数的收敛域：

(1) $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots$；

(2) $1 - x + \dfrac{x^2}{2^2} + \cdots + (-1)^n\dfrac{x^n}{n^2} + \cdots$；

(3) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{2\cdot 4} + \dfrac{x^3}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots + \dfrac{x^n}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)} + \cdots$；

(4) $\dfrac{x}{1\cdot 3} + \dfrac{x^2}{2\cdot 3^2} + \dfrac{x^3}{3\cdot 3^3} + \cdots + \dfrac{x^n}{n\cdot 3^n} + \cdots$；

(5) $\dfrac{2}{2}x + \dfrac{2^2}{5}x^2 + \dfrac{2^3}{10}x^3 + \cdots + \dfrac{2^n}{n^2+1}x^n + \cdots$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$；

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$，故收敛半径为 1. 而在 $x=\pm 1$ 处，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$

与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$ 发散，因此原级数的收敛域是$(-1,1)$.

(2) $n\geqslant 1$ 起，$\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\dfrac{1}{(n+1)^2}\Big/\dfrac{1}{n^2}=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2$，有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=1$，即收敛半径为 1. 在 $x=1$ 处，级数 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ 是收敛的交错级数；在 $x=-1$ 处，$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$为 $p=2$ 的 p－级数，它是收敛的. 故原级数的收敛域为$[-1,1]$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2(n+1)}=0$，故收敛半径为$+\infty$，因此原级数的收敛域是$(-\infty,+\infty)$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{1}{3}$，故收敛半径为 3. 在 $x=3$ 处，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散；在 $x=-3$ 处，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$是收敛的交错级数. 因此原级数的收敛域为$[-3,3)$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot\dfrac{n^2+1}{(n+1)^2+1}=2$，故收敛半径为$\dfrac{1}{2}$. 在 $x=\dfrac{1}{2}$处，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$ 收敛；在 $x=-\dfrac{1}{2}$时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$也收敛，故原级数的收敛域为$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

(6) 这是缺(偶次幂)项的级数，把$(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$视为数项级数的一般项 u_n，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}|x|^2=|x|^2,$$

当$|x|<1$时，级数绝对收敛；当$|x|>1$时，因一般项 $u_n\nrightarrow 0(n\to\infty)$，级数发散，故原级数收半径为 1.

在 $x=1$ 处，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 是收敛的交错级数；在 $x=-1$ 处，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ 也是收敛的交错级数，因此原级数的收敛域为$[-1,1]$.

(7) 这是缺(奇次幂)项的级数.

方法一 与(6)类似，将它按数项级数处理，用比值法求收敛半径，并讨论收敛区间的端点处的收敛性以确定收敛域.

方法二 令 $t=x^2$，先讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}t^{n-1}$ 的收敛域.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{2},$$

故该级数的收敛半径为 2，并在 $t=2$ 处级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}$ 发散. 因此，原级数的收敛半径为 $\sqrt{2}$，并在 $x=\pm\sqrt{2}$ 处级数发散，即原级数的收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=1$，故收敛半径为 1.

当 $|x-5|<1$ 时，级数收敛；当 $|x-5|>1$ 时，级数发散.

当 $x-5=1$，即在 $x=6$ 处，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散；当 $x-5=-1$，即在 $x=4$ 处，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，故原级数的收敛域为 $[4,6)$.

2. 利用逐项求导或逐项积分，求下列级数的和函数：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$；

(3) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$.

解 (1) 容易求出此级数的收敛半径为 1. 当 $-1<x<1$ 时，

$$\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}.$$

在上式两端对 x 求导得

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

又原级数在 $x=\pm1$ 处发散，故它的和函数 $s(x)=\frac{1}{(1-x)^2}(-1<x<1)$.

(2) 不难求出此级数的收敛半径为 1. 当 $-1<x<1$ 时，

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\frac{x^4}{1-x^4},$$

在上式两端分别从 0 至 x 积分，并由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 在 $x=0$ 处收敛于 0. 故得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=\int_0^x\frac{x^4}{1-x^4}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^x\left(-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x.$$

又原级数在 $x=\pm1$ 处均发散,故它的和函数

$$s(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x(-1<x<1).$$

(3) 此级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$,其收敛半径为 1. 当 $-1<x<1$ 时,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2},$$

在上式两端分别从 0 至 x 积分,并注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$在 $x=0$ 处收敛于 0,故得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

又原级数在 $x=\pm1$ 处均发散,故它的和函数

$$s(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\quad(-1<x<1).$$

习 题 11-4

1. 求函数 $f(x)=\cos x$ 的泰勒级数,并验证它在整个数轴上收敛于这函数.

解 在定点 x_0 处,因

$$f^{(n)}(x_0)=\cos\left(x_0+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

故 $f(x)$的泰勒级数为

$$\cos x_0+\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$

$$\frac{\cos\left(x_0+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

因为对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\cos\left(\xi+\frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leqslant\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

(其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间),而 $\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0$,于是得

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0.$$

所以在整个数轴上，有

$$f(x)=\cos x=\cos x_0+\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$\cdots+\frac{\cos\left(x_0+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots.$$

2. 将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间：

(1) $\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$； (2) $\ln(a+x)\quad(a>0)$；

(3) a^x； (4) $\sin^2 x$；

(5) $(1+x)\ln(1+x)$； (6) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

解 (1) 由于 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, x\in(-\infty,+\infty)$，故

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n, x\in(-\infty,+\infty).$$

于是

$$\operatorname{sh} x=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) $\ln(a+x)=\ln a+\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)$，利用

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\quad x\in(-1,+1],$$

得

$$\ln(a+x)=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{a}\right)^n,\quad x\in(-a,+a].$$

(3) 利用 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, x\in(-\infty,+\infty)$，得

$$a^x=e^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n, x\in(-\infty,+\infty).$$

(4) **方法一** 利用

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, x\in(-\infty,+\infty)，得$$

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n}}{2(2n)!}, x\in(-\infty,+\infty).$$

方法二 $(\sin^2 x)'=2\sin x\cos x=\sin 2x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，将上式两端从 0 至 x 积分并逐项积分，得

$$\sin^2 x=\int_0^x(\sin^2 x)'\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!}\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},x\in(-\infty,+\infty).$$

(5) **方法一** 因为

$$[(1+x)\ln(1+x)]'=\ln(1+x)+1=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},x\in(-1,1).$$

将上式两端从 0 至 x 积分并逐项积分得

$$(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n(n+1)}=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n-1)n},x\in(-1,1).$$

又在 $x=1$ 处，上式右端的幂级数收敛，且函数 $(1+x)\ln(1+x)$ 连续，故

$$(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)},x\in(-1,1].$$

方法二 利用 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$，$x\in(-1,1]$，得

$$\begin{aligned}(1+x)\ln(1+x)&=\ln(1+x)+x\ln(1+x)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n-1}\\&=x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{(-1)^n}{n-1}\right]x^n\\&=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)},x\in(-1,1].\end{aligned}$$

(6) **方法一** 利用 $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2\cdot4}x^2+\dfrac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\cdots$，$x\in[-1,1]$，

并因为 $\displaystyle\int_0^x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\sqrt{1+x^2}-1$，以 x^2 替换上面幂级数中的 x，得

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x&=\sqrt{1+x^2}-1\\&=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2\cdot4}x^4+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^6-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}x^{2n}+\cdots.\end{aligned}$$

在 $(-1,1)$ 内将上式两端对 x 求导，得

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}x^{2n-1}+\cdots$$

$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}x^{2n-1}$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1},x\in(-1,1).$$

在 $x=\pm 1$ 处上式右端的级数均收敛并函数 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 连续,故

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1},x\in[-1,1]$$

方法二 将 x^2 替换展开式

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}x^n\ (x\in(-1,1])$$

中的 x,得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}x^{2n},x\in[-1,1],$$

从而得

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}x^{2n+1}$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1},x\in[-1,1]$$

3. 将下列函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数,并求展开式成立的区间:

(1) $\sqrt{x^3}$;　　　　(2) $\lg x$.

解 (1) 当 $m>0$ 时,因

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\quad x\in[-1,1],$$

而 $\sqrt{x^3}=[1+(x-1)]^{\frac{3}{2}}$,

在以上二项展开式中取 $m=\frac{3}{2}$,并用 $(x-1)$ 替换其中的 x,得

$$\sqrt{x^3}=1+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)(x-1)^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{3}{2}-n+1\right)(x-1)^n+\cdots$$

$$=1+\frac{3}{2}(x-1)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^{n+2}(n+2)!}(x-1)^{n+2}$$

$$-1+\frac{3}{2}(x-1)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(2n)!}{(n!)^{2}}\cdot\frac{3}{(n+1)(n+2)2^{n}}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n+2},x\in[0,2].$$

(2) $\lg x=\frac{\ln x}{\ln 10}=\frac{1}{\ln 10}\ln[1+(x-1)]$，利用

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n},x\in(-1,1],$$

将上式中的 x 换成 $(x-1)$，得

$$\lg x=\frac{1}{\ln 10}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^{n}}{n},x\in(0,2].$$

4．将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成 $\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的幂级数.

解 $\cos x=\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$

将 $x+\frac{\pi}{3}$ 替换以下两式中的 x：

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}x^{2n},\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}x^{2n+1},x\in(-\infty,+\infty),$$

得

$$\begin{aligned}\cos x&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\left[\frac{1}{(2n)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}\right],x\in(-\infty,+\infty).\end{aligned}$$

5．将函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

解 利用 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n},x\in(-1,1)$，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}&=\frac{1}{3+x-3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x-3}{3}\right)}\\&=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-3}{3}\right)^{n},\frac{3-x}{3}\in(-1,1),\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{x-3}{3}\right)^{n},x\in(0,6).$$

6．将函数 $f(x)=\frac{1}{x^{2}+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数.

解 $\frac{1}{x^{2}+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2},$

其中

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{-3+(x+4)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n,$$

$\frac{x+4}{3}\in(-1,1)$即$x\in(-7,-1)$；

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{-2+(x+4)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n,$$

$\frac{x+4}{2}\in(-1,1)$即$x\in(-6,-2)$.

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+3x+2}&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n,\end{aligned}$$

$x\in(-7,-1)\cap(-6,-2)=(-6,-2)$.

习　题　11－5

1．利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值：

(1) $\ln 3$(误差不超过0.000 1)；

(2) $\sqrt{e}$(误差不超过0.001)；

(3) $\sqrt[9]{522}$(误差不超过0.000 01)；

(4) $\cos 2^\circ$(误差不超过0.000 1).

解　(1) $\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots\right)$, $x\in(-1,1)$. 令$\frac{1+x}{1-x}=3$,可得$x=\frac{1}{2}$.

从而

$$\ln 3=\ln\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot2^3}+\frac{1}{5\cdot2^5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot2^{2n-1}}+\cdots\right).$$

$$\begin{aligned}|r_n|&=2\left(\frac{1}{(2n+1)\cdot2^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+3)2^{2n+3}}+\cdots\right)\\&=\frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}}\left(1+\frac{(2n+1)\cdot2^{2n+1}}{(2n+3)\cdot2^{2n+3}}+\frac{(2n+1)\cdot2^{2n+1}}{(2n+5)\cdot2^{2n+5}}+\cdots\right)\\&<\frac{2}{(2n+1)\cdot2^{2n+1}}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3(2n+1)2^{2n-1}},$$

$$|r_5|<\frac{1}{3\cdot 11\cdot 2^8}\approx 0.000\ 12,$$

$$|r_6|<\frac{1}{3\cdot 13\cdot 2^{10}}\approx 0.000\ 03<10^{-4},$$

故取 $n=6$,则

$\ln 3\approx 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\cdots+\frac{1}{11\cdot 2^{11}}\right)$,考虑到舍入误差,计算时应取五位小数,从而得 $\ln 3\approx 1.098\ 6$.

(2) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty)$.

令 $x=\frac{1}{2}$,得

$$\sqrt{e}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!\cdot 2^2}+\cdots+\frac{1}{n!\ 2^n}+\cdots.$$

$$\begin{aligned}
r_n&=\frac{1}{(n+1)!\ 2^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)!\ 2^{n+2}}+\cdots\\
&=\frac{1}{(n+1)!\ 2^{n+1}}\left[1+\frac{1}{(n+2)\cdot 2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)\cdot 2^2}+\cdots\right]\\
&<\frac{1}{(n+1)!\ 2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)\\
&=\frac{1}{(n+1)!\ 2^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{(n+1)!\ 2^n}
\end{aligned}$$

$$r_4<\frac{1}{5!\ 2^4}\approx 0.000\ 5<10^{-3}$$

故取 $n=4$,计算时取四位小数可得

$$\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!\ 2^2}+\frac{1}{3!\ 2^3}+\frac{1}{4!\ 2^4}\approx 1.648.$$

(3) $\sqrt[9]{522}=\sqrt[9]{2^9+10}=2\left(1+\frac{10}{2^9}\right)^{\frac{1}{9}}$,因

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+$$
$$\frac{m(m-1)\cdot\cdots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots,(-1<x<1).$$

故 $\sqrt[9]{522}=2\left(1+\frac{10}{2^9}\right)^{\frac{1}{9}}$

$$=2\left[1+\frac{1}{9}\cdot\frac{10}{2^9}+\frac{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}-1\right)}{2!}\cdot\frac{10^2}{2^{18}}+\cdots+\frac{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}-1\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{1}{9}-n+1\right)}{n!}\cdot\right.$$

$$\left.\frac{10^n}{2^{9n}}+\cdots\right]$$

$$=2\cdot\left[1+\frac{1}{9}\cdot\frac{10}{2^9}-\frac{\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}}{2!}\cdot\frac{10^2}{2^{18}}+\cdots\right]$$

$$=2+\frac{2}{9}\cdot\frac{10}{2^9}-\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10^2}{2^{18}}+\cdots.$$

上式右端从第 2 项起为一交错级数，故有

$$|r_3|\leqslant u_4=\frac{8\cdot 17}{3\cdot 9^3}\cdot\frac{10^3}{2^{27}}<10^{-6}.$$

取 3 项，并在计算时取六位小数，可得

$$\sqrt[9]{522}\approx 2+\frac{2}{9}\cdot\frac{10}{2^9}-\frac{8}{9^2}\cdot\frac{10^2}{2^{18}}\approx 2.004\ 30.$$

(4) $\cos 2^\circ=\cos\frac{\pi}{90}=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4-\cdots,$

$$|r_2|\leqslant u_3=\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4\approx 10^{-8}.$$

故取 2 项并在计算时取五位小数，可得

$$\cos 2^\circ\approx 1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2\approx 0.999\ 4.$$

2. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值：

(1) $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$（误差不超过 0.000 1）；

(2) $\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$（误差不超过 0.001）.

解 (1) $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int_0^{0.5}(1-x^4+x^8-x^{12}+\cdots+(-1)^n x^{4n}+\cdots)\mathrm{d}x$

$$=\left(x-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{13}x^{13}+\cdots\right)\Big|_0^{0.5}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}-\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}}+\cdots,$$

上式右端为一交错级数，有

$$|r_3|\leqslant u_4=\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}}\approx 0.000\ 009<10^{-4},$$

故取 3 项，并在计算时取五位小数，可得

$$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}\approx 0.494\ 0.$$

(2) 因 $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots(-1<x<1)$,

$$\text{故}\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx=\int_0^{0.5}\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}+\cdots\right)dx$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^5}{25}-\frac{x^7}{49}+\cdots\right)\Big|_0^{0.5}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2^5}-\frac{1}{49}\cdot\frac{1}{2^7}+\cdots,$$

由于 $|r_3|\leqslant u_4=\frac{1}{49}\cdot\frac{1}{2^7}\approx 0.000\ 2<10^{-3}$.

所以取 3 项,并在计算时取四位小数,可得

$$\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{25}$$

$$\approx 0.487\ 4\approx 0.487.$$

3. 将函数 $e^x\cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解 由欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 知

$$\cos x=\mathrm{Re}(e^{ix}),$$

故

$$e^x\cos x=e^x\cdot\mathrm{Re}(e^{ix})=\mathrm{Re}(e^x\cdot e^{ix})=\mathrm{Re}[e^{(1+i)x}].$$

因为

$$e^{(1+i)x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(1+i)^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n\frac{x^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)2^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty),$$

所以

$$e^x\cos x=\mathrm{Re}[e^{(1+i)x}]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{4}\cdot 2^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty).$$

*习　题　11－6

1. 已知函数序列 $S_n(x)=\sin\frac{x}{n}(n=1,2,3,\cdots)$在$(-\infty,+\infty)$上收敛于 0.

(1) 问 $N(\varepsilon,x)$取多大,能使当 $n>N$ 时,$S_n(x)$与其极限之差的绝对值小于正数 ε;

(2) 证明 $S_n(x)$ 在任一有限区间 $[a,b]$ 上一致收敛.

解 (1) 由于 $|S_n(x)-0|=\left|\sin\frac{x}{n}\right|\leqslant\frac{|x|}{n}$,因此对于正数 ε,取 $N(\varepsilon,x)\geqslant\frac{|x|}{\varepsilon}$,则当 $n>N$ 时,就有

$$|S_n(x)-0|\leqslant\frac{|x|}{n}<\varepsilon.$$

证 (2) 记 $M=\max\{|a|,|b|\}$,则 $\forall x\in[a,b]$, $|x|\leqslant M$,于是

$$|S_n(x)-0|\leqslant\frac{|x|}{n}\leqslant\frac{M}{n}.$$

故

$\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{M}{\varepsilon}\right]+1$,当 $n>N$ 时,对一切 $x\in[a,b]$ 都有

$$|S_n(x)-0|\leqslant\frac{|x|}{n}<\frac{M}{N}<\varepsilon,$$

即 $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0.

2. 已知级数 $x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛.

(1) 求出该级数的和;

(2) 问 $N(\varepsilon,x)$ 取多大,能使当 $n>N$ 时,级数的余项 r_n 的绝对值小于正数 ε;

(3) 分别讨论级数在区间 $[0,1]$, $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上的一致收敛性.

解 (1) 设该级数的和函数为 $s(x)$,当 $x=0$ 时,$s(0)=0$;当 $x\neq0$ 时,该级数是公比为 $\frac{1}{1+x^2}$ 的等比级数,且 $\frac{1}{1+x^2}<1$,故

$$s(x)=\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1+x^2.$$

于是

$$s(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

(2) $$r_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}}+\cdots$$
$$=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}\left[1+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{(1+x^2)^2}+\cdots\right].$$

当 $x=0$ 时,$r_n(x)=0$,$\forall\varepsilon>0$,取 $N=1$,则当 $n>N$ 时,就有

$$|r_n(x)|<\varepsilon;$$

当 $x\neq 0$ 时，$r_n(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=\dfrac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$，$\forall\varepsilon>0$，取

$$N=\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln(1+x^2)}\right]+1,$$

则
$$|r_n(x)|=\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}<\frac{1}{(1+x^2)^{N-1}}=\varepsilon.$$

(3) 该级数的各项 $u_n(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}(n=0,1,2,\cdots)$ 在区间 $[0,1]$ 上是连续的，如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 一致收敛，则由定理 1 知，其和函数 $s(x)$ 在 $[0,1]$ 连续. 今 $s(x)$ 在 $[0,1]$ 有间断点 $x=0$. 由此推知该级数在 $[0,1]$ 不一致收敛.

在区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上，因为

$$|r_n(x)|=\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\leqslant\frac{1}{\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{n-1}}=\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1},$$

所以，$\forall\varepsilon>0$，取 $N=[\log_{\frac{4}{5}}\varepsilon]+1$，当 $n>N$ 时，对一切 $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，有

$$|r_n(x)|\leqslant\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}<\left(\frac{4}{5}\right)^{N-1}=\varepsilon.$$

即原级数在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上一致收敛.

3. 按定义讨论下列级数在所给区间上的一致收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$，$-\infty<x<+\infty$；

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$，$0<x<1$.

解 (1) 此级数为交错级数，且满足莱布尼茨定理的条件.

$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$|r_n(x)|\leqslant\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}<\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}=\dfrac{x^2}{1+nx^2+\cdots+x^{2n}}<\dfrac{1}{n}$，

故 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$|r_n(x)|<\varepsilon,$$

即该级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^n-x^{n+1})$，其部分和函数

$$S_n(x)=(1-x)+(x-x^2)+\cdots+(x^n-x^{n+1})=1-x^{n+1},$$

有和函数 $$s(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}(1-x^{n+1})=1,x\in(0,1).$$

且 $$|r_n(x)|=|S_n(x)-s(x)|=x^{n+1},x\in(0,1).$$

取一列 $x_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n+1}}(n=1,2,\cdots)$, $x_n\in(0,1)$. 于是对 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$,不论 n 多么大,总有 $x_n\in(0,1)$,使得

$$|r_n(x_n)|=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right]^{n+1}=\frac{1}{3}>\frac{1}{4}=\varepsilon_0.$$

因此,该级数在开区间(0,1)内不一致收敛.

4. 利用魏尔斯特拉斯判别法证明下列级数在所给区间上的一致收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n},-\infty<x<+\infty$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}},-\infty<x<+\infty$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx},0\leqslant x<+\infty$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n!},|x|<10$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-e^{-nx})}{n^2+x^2},0\leqslant x<+\infty$.

证 (1) $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,因为$|\cos nx|\leqslant1$,所以

$$\left|\frac{\cos nx}{2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^n},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛,从而原级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(2) $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,因为$|\sin nx|\leqslant1$,所以

$$\left|\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\right|\leqslant\frac{1}{(n^4+x^4)^{\frac{1}{3}}}\leqslant\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$收敛,从而原级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2\cdot e^{-nx}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{e^{nx}}$,由于当 $x\in[0,+\infty)$时,

$$e^{nx}=1+nx+\frac{1}{2!}(nx)^2+\frac{1}{3!}(nx)^3+\cdots>\frac{1}{2!}(nx)^2=\frac{n^2x^2}{2},$$

故 $$\left|\frac{x^2}{e^{nx}}\right|<\frac{2}{n^2},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$收敛，故原级数在$[0,+\infty)$上一致收敛.

(4) $\forall x\in(-10,10)$，$\left|\frac{e^{-nx}}{n!}\right|<\frac{(e^{10})^n}{n!}$，

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{10})^n}{n!}$收敛(收敛于 $e^{e^{10}}-1$)，故原级数在$(-10,10)$上一致收敛.

(5) $\forall x\in[0,+\infty)$，由于$0<e^{-nx}<1$，故

$$\left|\frac{(-1)^n(1-e^{-nx})}{n^2+x^2}\right|=\frac{1-e^{-nx}}{n^2+x^2}<\frac{1}{n^2},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，从而原级数在$[0,+\infty)$上一致收敛.

习 题 11－7

1. 下列周期函数 $f(x)$的周期为 2π，试将 $f(x)$展开成傅里叶级数，如果 $f(x)$在$[-\pi,\pi)$上的表达式为：

(1) $f(x)=3x^2+1\ (-\pi\leqslant x<\pi)$；

(2) $f(x)=e^{2x}(-\pi\leqslant x<\pi)$；

(3) $f(x)=\begin{cases}bx, & -\pi\leqslant x<0,\\ ax, & 0\leqslant x<\pi\ (a,b\text{ 为常数，且 } a>b>0).\end{cases}$

解 (1) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)dx=2(\pi^2+1)$；

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}(3x^2+1)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}6x\sin nx dx\right]\\&=\frac{6}{n^2\pi}\left(x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\right)\\&=\frac{12}{n^2}(-1)^n-\frac{6}{n^3\pi}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\\&=\frac{(-1)^n12}{n^2}(n=1,2,\cdots);\end{aligned}$$

由于$(3x^2+1)\sin nx$ 是奇函数，故

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\sin nx dx=0.$$

因为 $f(x)$满足收敛定理的条件且在$(-\infty,+\infty)$内连续，故

$$f(x)=\pi^2+1+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}dx=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{2\pi}$；

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\cos nx\,dx=\frac{1}{2\pi}\left(e^{2x}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\cdot n\sin nx\,dx\right)$$
$$=\frac{(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{2\pi}+\frac{n}{4\pi}\left(e^{2x}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}n\cdot\cos nx\,dx\right)$$
$$=\frac{(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{2\pi}-\frac{n^2}{4}a_n,$$

故

$$a_n=\frac{2(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{(n^2+4)\pi}\quad(n=1,2,\cdots);$$

用分部积分法得

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\sin nx\,dx=-\frac{n}{2}a_n=-\frac{n(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{(n^2+4)\pi}\quad(n=1,2,\cdots).$$

$f(x)$满足收敛定理的条件，而在 $x=(2k+1)\pi$ 处不连续($k\in\mathbf{Z}$)，故

$$f(x)=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4}(2\cos nx-n\sin nx)\right],$$
$$x\neq(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}.$$

(3) $a_0=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}bx\,dx+\int_{0}^{\pi}ax\,dx\right]=\frac{\pi}{2}(a-b);$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}bx\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}ax\cos nx\,dx\right]$$

在上式右端第一个积分中令 $x=-t$，

$$\int_{-\pi}^{0}bx\cos nx\,dx=\int_{0}^{\pi}-bt\cos nt\,dt=\int_{0}^{\pi}-bx\cos nx\,dx,$$

故 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(a-b)x\cos nx\,dx=\frac{a-b}{n\pi}\left(x\sin nx\Big|_{0}^{\pi}-\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx\right)$

$$=\frac{a-b}{n^2\pi}(\cos\pi-1)=\frac{b-a}{n^2\pi}[1-(-1)^n](n=1,2,\cdots);$$

同理，

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}bx\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}ax\sin nx\,dx\right.$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(a+b)x\sin nx\,dx=\frac{a+b}{n\pi}\left(-x\cos nx\Big|_{0}^{\pi}+\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right)$$
$$=\frac{a+b}{n\pi}\left[(-1)^{n+1}\pi+\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}\right]=\frac{a+b}{n}(-1)^{n+1}\quad(n=1,2,\cdots).$$

$f(x)$满足收敛定理的条件，而在 $x=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$处不连续.

故

$$f(x)=\frac{\pi}{4}(a-b)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{[1-(-1)^n](b-a)}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n-1}(a+b)}{n}\sin nx\right\}$$

$$x \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

2. 将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数：

(1) $f(x)=2\sin\dfrac{x}{3}\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$；

(2) $f(x)=\begin{cases} e^x, & -\pi\leqslant x<0, \\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi. \end{cases}$

解 (1) 设 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 经周期延拓而得的函数，$\varphi(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内连续，$x=\pm\pi$ 是 $\varphi(x)$ 的间断点. 又 $\varphi(x)$ 满足收敛定理的条件，故在 $(-\pi,\pi)$ 内，它的傅里叶级数收敛于 $f(x)$.

由于 $2\sin\dfrac{x}{3}$ 是奇函数，故 $a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots)$；

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin\frac{x}{3}\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(\frac{1}{3}-n\right)x-\cos\left(\frac{1}{3}+n\right)x\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\left(n-\frac{1}{3}\right)\pi}{n-\frac{1}{3}}-\frac{\sin\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi}{n+\frac{1}{3}}\right] \\ &= \frac{6}{\pi}\left[\frac{-\cos n\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3n-1}-\frac{\cos n\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3n+1}\right] \\ &= (-1)^{n+1}\cdot\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{n}{9n^2-1}\quad (n=1,2,\cdots). \end{aligned}$$

故

$$f(x)=\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{9n^2-1}\sin nx,\ x\in(-\pi,\pi).$$

(2) 设 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 经周期延拓而得的函数，它在 $(-\pi,\pi)$ 内连续，$x=\pm\pi$ 是 $\varphi(x)$ 的间断点. 又 $\varphi(x)$ 满足收敛定理的条件，故在 $(-\pi,\pi)$ 内它的傅里叶级数收敛于 $f(x)$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}e^x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\right]=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{\pi};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}e^x\cos nx\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right]=\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)}\quad (n=1,2,\cdots);$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}e^x\sin nx\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{-n[1-(-1)^n e^{-\pi}]}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\right\}\quad (n=1,2,\cdots). \end{aligned}$$

故

$$f(x)=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\right]\cos nx+\right.$$

$$\left.\left[\frac{-n+(-1)^n n e^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\right]\sin nx\right\}\quad x\in(-\pi,\pi).$$

3. 设周期函数 $f(x)$的周期为 2π,证明 $f(x)$的傅里叶系数为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots).$$

证 由题设条件知,$f(x)\cos nx$ 与 $f(x)\sin nx$ 是周期为 2π 的周期函数.利用教材上册习题 5-3 的第 9 题的结论:

若 $f(x)$是以 l 为周期的连续函数,则 $\int_a^{a+l}f(x)\mathrm{d}x$ 的值与 a 无关.

可得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x.$$

注 教材上册习题 5-3 的第 9 题是用定积分换元法证明的.换元法定理要求被积函数 $f(x)$在积分区间上连续.而事实上这一条件可减弱为 $f(x)$可积,即只要函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积而定理中其他条件不变,则换元公式成立.本节中所涉及的一切函数都约定是可积的.

4. 将函数 $f(x)=\cos\frac{x}{2}(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$展开成傅里叶级数.

解 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$是偶函数,故 $b_n=0\ (n=1,2,\cdots)$.

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x+\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{n-\frac{1}{2}}+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{n+\frac{1}{2}}\right]\\&=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-\cos n\pi}{2n-1}+\frac{\cos n\pi}{2n+1}\right)=(-1)^{n+1}\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\&=(-1)^{n+1}\frac{4}{\pi(4n^2-1)}\quad(n=0,1,2,\cdots).\end{aligned}$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件，且在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，故

$$f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{4n^2-1}\cos nx,x\in[-\pi,\pi].$$

5. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, & -\pi\leqslant x<-\frac{\pi}{2},\\ x, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2}\leqslant x<\pi,\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解 $f(x)$ 是奇函数，故 $a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots)$；

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\mathrm{d}x\right]+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{-\cos\frac{n\pi}{2}}{n}+\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{\pi n^2}+\frac{\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi}{n}$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件，而在 $x=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$ 处间断，故

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\sin nx,x\neq(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z}).$$

6. 将函数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成正弦级数.

解

$$\text{作}\quad\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(0,\pi],\\ 0, & x=0,\\ -f(-x), & x\in(-\pi,0),\end{cases}$$

$\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的奇延拓. 令 $\Phi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的周期延拓，则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件，并除了 $x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 处处连续，又在 $(0,\pi]$ 上，$\Phi(x)\equiv f(x)$，因此 $\Phi(x)$ 的傅里叶级数在 $(0,\pi]$ 上收敛于 $f(x)$.

$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots);$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x-\pi}{2n}\cos nx-\frac{1}{2n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}$$

$-\dfrac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$,

故

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,\ x\in(0,\pi].$$

7．将函数 $f(x)=2x^2(0\leqslant x\leqslant\pi)$分别展开成正弦级数和余弦级数．

解 (1) 展开成正弦级数：

令
$$\varphi(x)=\begin{cases}2x^2, & x\in[0,\pi],\\ -2x^2, & x\in(-\pi,0)\end{cases}$$

是 $f(x)$的奇延拓，又 $\Phi(x)$是 $\varphi(x)$的周期延拓函数，则 $\Phi(x)$满足收敛定理的条件，而在 $x=(2k+1)\pi$ 处间断，又在$[0,\pi]$上 $\Phi(x)\equiv f(x)$，故它的傅里叶级数在$[0,\pi)$上收敛于 $f(x)$．

$a_n=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$;

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\sin nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{4}{\pi}\left[\frac{-x^2}{n}\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right]_0^{\pi}\\&=\frac{4}{\pi}\left[\frac{-\pi^2(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n2}{n^3}-\frac{2}{n^3}\right]\ (n=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

故

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)(-1)^n-\frac{2}{n^3}\right]\sin nx,x\in[0,\pi).$$

(2) 展开成余弦级数：

令 $\varphi(x)=2x^2,x\in(-\pi,\pi]$是 $f(x)$的偶延拓，又 $\Phi(x)$是 $\varphi(x)$的周期延拓函数，则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件且处处连续，又在 $[0,\pi]$ 上，$\Phi(x)\equiv f(x)$，故它的傅里叶级数在$[0,\pi]$上收敛于 $f(x)$．

$$b_n=0\ (n=1,2,\cdots),$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi^2;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{8}{n^2}\ (n=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\frac{2}{3}\pi^2+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,x\in[0,\pi].$$

8．设周期函数 $f(x)$的周期为 2π．证明：

(1) 如果 $f(x-\pi)=-f(x)$，则 $f(x)$的傅里叶系数 $a_0=0,a_{2k}=0,b_{2k}=0$

$(k=1,2,\cdots)$;

(2) 如果 $f(x-\pi)=f(x)$，则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_{2k+1}=0, b_{2k+1}=0(k=0,1,2,\cdots)$.

证 (1) $a_0=\dfrac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x\right]$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi} -f(x-\pi)\mathrm{d}x\right]$$

在上式第二个积分中令 $x-\pi=u$，则

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0} f(u)\mathrm{d}u\right]=0.$$

同理可得

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi} -f(x-\pi)\cos nx\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0} f(u)\cos(n\pi+nu)\mathrm{d}u\right]\end{aligned}$$

及

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0} f(u)\sin(n\pi+nu)\mathrm{d}u\right].$$

当 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$\cos(n\pi+nu)=\cos nu$，$\sin(n\pi+nu)=\sin nu$，于是有

$$\begin{aligned}a_{2k}&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos 2kx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi} f(x)\cos 2kx\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos 2kx\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0} f(u)\cos 2ku\mathrm{d}u\right]=0,\end{aligned}$$

及

$$b_{2k}=0\quad(k\in\mathbf{N}^*).$$

(2) 与(1)的做法类似，有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{0} f(u)\cos(n\pi+nu)\mathrm{d}u\right]$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{0} f(u)\sin(n\pi+nu)\mathrm{d}u\right]$$

当 $n=2k+1(k\in\mathbf{N})$ 时，$\cos(n\pi+un)=-\cos nu$，

$$\sin(n\pi+un)=-\sin nu,$$

故有
$$a_{2k+1}=0, b_{2k+1}=0\quad(k\in\mathbf{N}).$$

习 题 11-8

1. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数(下面给出函数在一个周期内的表达式):

(1) $f(x)=1-x^2\left(-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}\right)$;

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\frac{1}{2},\\ -1 & \frac{1}{2}\leqslant x<1;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & -3\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<3.\end{cases}$

解 (1) 函数 $f(x)$是半周期 $l=\frac{1}{2}$的偶函数,故

$b_n=0 \quad (n=1,2,\cdots)$;

$$a_0=\frac{2}{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\mathrm{d}x=\frac{11}{6};$$

$$a_n=\frac{2}{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\cos\frac{n\pi x}{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\cos 2n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=4\left[\frac{1-x^2}{2n\pi}\sin 2n\pi x-\frac{2x}{4n^2\pi^2}\cos 2n\pi x+\frac{2}{8n^3\pi^3}\sin 2n\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\quad(n=1,2,\cdots).$$

因 $f(x)$满足收敛定理的条件且处处连续,故有

$$f(x)=\frac{11}{12}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(2n\pi x),x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) 函数 $f(x)$的半周期 $l=1$.

$$a_0=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2};$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x\cos n\pi x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}}\cos n\pi x\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\cos n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right]_1^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\quad(n=1,2,\cdots);$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x\sin n\pi x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}}\sin n\pi x\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sin n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n\pi}\quad(n=1,2,\cdots).$$

因 $f(x)$满足收敛定理的条件，其间断点为 $x=2k,2k+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}$.故有

$$f(x)=-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\cos n\pi x+\frac{1}{n\pi}\left(1-2\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin n\pi x\right\},$$

$$x\in\mathbf{R}\setminus\left\{2k,2k+\frac{1}{2}\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

(3) 函数 $f(x)$的半周期 $l=3$.

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\mathrm{d}x+\int_0^3\mathrm{d}x\right]=-1;$$

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x+\int_0^3\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\quad(n=1,2,\cdots);$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x+\int_0^3\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{6}{n\pi}(-1)^{n+1}\quad(n=1,2,\cdots).$$

因 $f(x)$满足收敛定理的条件，其间断点为 $x=3(2k+1),k\in\mathbf{Z}$,故有

$$f(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\cos\frac{n\pi x}{3}+(-1)^{n+1}\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right\},$$

$$x\in\mathbf{R}\setminus\{3(2k+1)\mid k\in\mathbf{Z}\}.$$

2. 将下列函数分别展开成正弦级数和余弦级数：

(1) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<\frac{l}{2},\\ l-x, & \frac{l}{2}\leqslant x\leqslant l;\end{cases}$

(2) $f(x)=x^2\quad(0\leqslant x\leqslant 2)$.

解 (1) 展开为正弦级数：

将 $f(x)$作奇延拓得 $\varphi(x)$,又将 $\varphi(x)$作周期延拓得 $\Phi(x)$,则 $\Phi(x)$是以 $2l$ 为周期的奇函数，$\Phi(x)$处处连续，又满足收敛定理的条件，且在$[0,l]$上，$\Phi(x)\equiv f(x)$.

$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots);$$

$$b_n=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right],$$

在上式第二个积分中令 $l-x=t$,则有

$$\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{l}{2}}t\cdot\cos n\pi\sin\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t=(-1)^{n-1}\int_0^{\frac{l}{2}}t\sin\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t,$$

于是

$$b_n=\frac{2}{l}[1+(-1)^{n-1}]\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x.$$

当 $n=2k$ 时,$b_{2k}=0$;当 $n=2k-1$ 时,

$$b_{2k-1}=\frac{4}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{4l}{(2k-1)^2\pi^2}(-1)^{k-1}\quad(k=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l},x\in[0,l].$$

展开为余弦级数:

将 $f(x)$作偶延拓得 $\psi(x)$,再将 $\psi(x)$作周期延拓得 $\Psi(x)$,则 $\Psi(x)$是以 $2l$ 为周期的周期函数. $\Psi(x)$处处连续又满足收敛定理的条件,且在$[0,l]$上 $\Psi(x)\equiv f(x)$.

$$a_0=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}x\mathrm{d}x+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\mathrm{d}x\right]=\frac{l}{2};$$

$$a_n=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right],$$

在上式第二个积分中令 $l-x=t$,则有

$$\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=(-1)^n\int_0^{\frac{l}{2}}t\cos\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t,$$

于是

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{l}[1+(-1)^n]\int_0^{\frac{l}{2}}x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{l}[1+(-1)^n]\left(\frac{l}{\pi}\right)^2\left[\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\right]\end{aligned}$$

当 $n=2m-1$ 时,$a_{2m-1}=0$;当 $n=2m$ 时,

$$a_{2m}=\frac{4l}{\pi^2}\cdot\frac{l}{(2m)^2}[(-1)^m-1]=\begin{cases}0, & m=2k,\\ \frac{l}{\pi^2}\cdot\frac{(-2)}{(2k-1)^2}, & m=2k-1\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\frac{l}{4}-\frac{2l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{2(2k-1)\pi x}{l},x\in[0,l].$$

(2) 展开为正弦级数：

将 $f(x)$作奇延拓得 $\varphi(x)$,再将 $\varphi(x)$作周期延拓,得以 4 为周期的周期函数 $\Psi(x)$,则 $\Psi(x)$满足收敛定理的条件,除了间断点 $x=2(2k+1)(k\in\mathbf{Z})$外处处连续,且在[0,2)上,$\Psi(x)\equiv f(x)$.

$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\left[-\frac{2}{n\pi}x^2\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2+\frac{4}{n\pi}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x\\&=(-1)^{n+1}\frac{8}{n\pi}+\frac{8}{(n\pi)^2}\left[x\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2+\frac{16}{(n\pi)^3}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2\\&=(-1)^{n+1}\frac{8}{n\pi}+\frac{16}{(n\pi)^2}[(-1)^n-1]\quad(n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

故

$$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^3\pi^2}[(-1)^n-1]\right\}\sin\frac{n\pi x}{2},x\in[0,2).$$

展开为余弦级数：

将 $f(x)$作偶延拓得 $\psi(x)$,再将 $\psi(x)$作周期延拓,得以 4 为周期的周期函数 $\Psi(x)$,则 $\Psi(x)$处处连续又满足收敛定理的条件.且在[0,2]上 $\Psi(x)\equiv f(x)$.

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3};$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\left[x^2\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2-\frac{4}{n\pi}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x\\&=\frac{8}{(n\pi)^2}\left[x\cos\frac{n\pi x}{2}-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2\\&=(-1)^n\frac{16}{(n\pi)^2}\quad(n=1,2,\cdots);\end{aligned}$$

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2},x\in[0,2].$$

*3. 设 $f(x)$是周期为 2 的周期函数,它在[-1,1)上的表达式为 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$.试将 $f(x)$展开成复数形式的傅里叶级数.

解 $f(x)$满足收敛定理的条件,且除了点 $x=2k+1(k\in\mathbf{Z})$外处处连续.

$$c_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-(1+n\pi\mathrm{i})x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+n\pi\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{-(1+n\pi\mathrm{i})x}\right]_{-1}^{1}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-n\pi\mathrm{i}}{1+(n\pi)^2}(\mathrm{e}^{-1}\cdot\mathrm{e}^{-n\pi\mathrm{i}}-\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}})$$

$$=\frac{1-n\pi\mathrm{i}}{1+(n\pi)^2}\cdot\frac{\mathrm{e}\cos n\pi-\mathrm{e}^{-1}\cos n\pi}{2}=(-1)^n\frac{1-n\pi\mathrm{i}}{1+n^2\pi^2}\operatorname{sh}1\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

故

$$f(x)=\operatorname{sh}1\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{1-n\pi\mathrm{i}}{1+n^2\pi^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x},x\in\mathbf{R}\setminus\{2k+1\mid k\in\mathbf{Z}\}.$$

*4．设 $u(t)$是周期为 T 的周期函数.已知它的傅里叶级数的复数形式为(参阅本节例题)

$$u(t)=\frac{h\tau}{T}+\frac{h}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq0}}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n\pi t}{T}}\quad(-\infty<t<+\infty),$$

试写出 $u(t)$的傅里叶级数的实数形式(即三角形式).

解 由题设知 $c_n=\dfrac{h}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi\tau}{T}\ (n=\pm1,\pm2,\cdots)$.

因 $$c_n=\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2},c_{-n}=\frac{a_n+\mathrm{i}b_n}{2}=\overline{c_n}\quad(n=1,2,\cdots),$$

可见 $$a_n=\mathrm{Re}(2\overline{c_n}),b_n=\mathrm{Im}(2\overline{c_n}).$$

而 c_n 为实数,故

$$a_n=\frac{2h}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T},b_n=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

故

$$u(t)=\frac{h\tau}{T}+\frac{2h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\cdot\cos\frac{2n\pi t}{T}\quad(-\infty<t<+\infty).$$

总习题十一

1．填空

(1) 对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 是它收敛的____条件,不是它收敛的____条件;

(2) 部分和数列$\{S_n\}$有界是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的____条件;

(3) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定____;若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件

收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$必定____.

解 (1) 必要,充分; (2) 充要; (3) 收敛,发散.

2. 判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{2n^2}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos^2\dfrac{n\pi}{3}}{2^n}$;

(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^{10}n}$; (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n^s}$ $(a>0,s>0)$.

解 (1) $u_n=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$,因$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$.而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,故由比较极限审敛法知原级数发散.

(2) $u_n=\dfrac{(n!)^2}{2n^2}=\dfrac{[(n-1)!]^2}{2}\to+\infty(n\to\infty)$,由于一般项不趋于零,故该级数发散.

(3) $u_n=\dfrac{n\cos^2\dfrac{n\pi}{3}}{2^n}\leqslant\dfrac{n}{2^n}=v_n$,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$是收敛的(事实上,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}<1$,据比值审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$收敛),故由比较审敛法知原级数收敛.

(4) $u_n=\dfrac{1}{\ln^{10}n}$,因$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln^{10}n}=+\infty$,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,故由比较极限审敛法知原级数发散.

注 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln^{10}n}$时,可考虑极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^{10}n}{n}$.

因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{10}x}{x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10\ln^9x}{x}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10!}{x}=0$,

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^{10}n}{n}=0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^{10}n}=+\infty.$$

(5) $u_n=\dfrac{a^n}{n^s}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{(\sqrt[n]{n})^s}=a$.

由根值审敛法知,当 $a<1$ 时级数收敛,当 $a>1$ 时级数发散.

当 $a=1$ 时,原级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$,由 p-级数的结论知,当 $s>1$ 时级数收敛,当 $s\leqslant 1$ 时级数发散.

3. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛,证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 也收敛.

证 根据题设条件知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛,故有$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=0$. 由极限定义知,存在自然数 N,当 $n\geqslant N$ 时,有 $u_n+v_n<1$,从而

$$(u_n+v_n)^2<u_n+v_n(n\geqslant N),$$

故由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛.

4. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=1$. 问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 是否也收敛? 试说明理由.

解 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 不一定收敛.

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数时,在题设条件下 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 必定收敛. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=1$. 根据收敛数列的保号性知,存在自然数 N,当 $n\geqslant N$ 后有$\frac{v_n}{u_n}>0$,即有 $v_n>0$. 于是,按正项级数的比较审敛法知 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}v_n$ 收敛,即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛.

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 不是正项级数时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 可能不收敛. 例如:若 $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $v_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right]=1$,然而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

5. 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$.

解 (1) $u_n=\frac{(-1)^n}{n^p}$, $|u_n|=\frac{1}{n^p}$,当 $p>1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛;当 $0<p\leqslant 1$

时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$是交错级数，且满足莱布尼茨定理的条件，因而收敛且为条件收敛；当 $p\leqslant 0$ 时，由于 $u_n\not\to 0(n\to\infty)$，此时级数发散.综上可知，当 $p>1$ 时，级数绝对收敛.当 $0<p\leqslant 1$ 时，级数条件收敛，当 $p\leqslant 0$ 时，级数发散.

(2) $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi^{n+1}}\sin\frac{\pi}{n+1}$，$|u_n|\leqslant\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n+1}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n+1}$ 收敛，由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，即原级数绝对收敛.

(3) $u_n=(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，由比较极限审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散.

而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是交错级数且满足莱布尼茨定理的条件，因而收敛.故该级数条件收敛.

(4) $u_n=(-1)^n\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}=$ $\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{1}{e}<1.$

由比值审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，即原级数绝对收敛.

6. 求下列极限：

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$；　　(2) $\lim_{n\to\infty}[2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdot\cdots\cdot(2^n)^{\frac{1}{3^n}}]$.

解 (1) 由于 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的部分和，注意到

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e,$$

故

$$\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}<\frac{1}{3^n}e^n=\left(\frac{e}{3}\right)^n.$$

因 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^n$ 收敛，故由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 收敛，于是部分和 S_n 有界，从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=0.$$

(2) $2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdot\cdots\cdot(2^n)^{\frac{1}{3^n}}=2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{9}}\cdot 2^{\frac{3}{27}}\cdot\cdots\cdot 2^{\frac{n}{3^n}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\cdots+\frac{n}{3^n}}$,
为此,先求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\cdots\cdots+\frac{n}{3^n}\right)$.

记

$$S_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n},$$

则

$$\frac{1}{3}S_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{3^4}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}},$$

将以上两式相减,得

$$\frac{2}{3}S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{3^n},$$

即

$$S_n=\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{3^n},$$

故 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}-0=\frac{3}{4}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdot\cdots\cdot(2^n)^{\frac{1}{3^n}}=2^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{8}.$$

7. 求下列幂级数的收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{n}x^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$.

解 (1) $u_n=a_nx^n$, $a_n=\frac{3^n+5^n}{n}$. 因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3\left(\frac{3}{5}\right)^n+5}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}=5,$$

故收敛半径为 $R=\frac{1}{5}$.

当 $x=\frac{1}{5}$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n+\frac{1}{n}\right]$发散;

当 $x=-\frac{1}{5}$时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\left[\left(\frac{3}{5}\right)^n+1\right]$是收敛的交错级数.

故原级数的收敛域为$\left[-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$.

(2) $u_n=a_nx^n, a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. 因

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e},$$

故收敛半径为 $R=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

当 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$时，幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^n}$，由于它的一般项

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^n}=\mathrm{e}^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n}=\mathrm{e}^{n^2\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-n}$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}+n^2o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\to\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\neq0(n\to\infty),$$

故该级数发散；

同理可知，当 $x=-\frac{1}{\mathrm{e}}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{\mathrm{e}^n}$的一般项也不趋于零，从而该级数发散. 因此原级数的收敛域为$\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

(3) 令 $x+1=t$，即 $x=t-1$，先讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nt^n$ 的收敛域.

因$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，故收敛半径 $R=1$.

易见当 $t=\pm1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nn$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty}nt^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$，从而原级数的收敛域为$(-2,0)$.

(4) 令 $\frac{x^2}{2}=t$，原级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}nt^n$，由第(3)题知该级数的收敛域为 $(-1,1)$. 因 $x=\pm\sqrt{2t}$，故原级数的收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

8. 求下列幂级数的和函数：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$； (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

解 (1) $u_n(x)=\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}\cdot\frac{|x|^2}{2}=\frac{|x|^2}{2}.$$

当$\frac{|x|^2}{2}<1$时，原级数收敛；当$\frac{|x|^2}{2}\geqslant 1$时，因级数的一般项 $u_n(x)\not\to 0$ $(u\to\infty)$，故级数发散. 因此原级数的收敛域为$\frac{|x|^2}{2}<1$，即$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

设和函数为 $s(x)$，即 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$，从 0 到 x 积分并逐项积分：

$$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^{2n+1}=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n$$
$$=\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{2-x^2},x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

上式两端对 x 求导，得

$$s(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

(2) $u_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}|x|^2=|x|^2.$$

当$|x|<1$时，级数收敛；当$|x|>1$时，因级数一般项 $u_n(x)\not\to 0(n\to\infty)$，故级数发散；当 $x=\pm 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$是收敛的交错级数，因此原级数的收敛域为$[-1,1]$. 设和函数为 $s(x)$，则 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$，$s(0)=0$.

在$(-1,1)$内，上式两端对 x 求导，得

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1+x^2}.$$

于是

$$s(x)=s(x)-s(0)=\int_0^x s'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x.$$

又由于幂级数在 $x=\pm 1$ 处收敛，且 $\arctan x$ 在 $x=\pm 1$ 处连续，故

$$s(x)=\arctan x\quad x\in[-1,1].$$

(3) 令 $x-1=t$，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^n$ 的收敛域为$(-1,1)$. 记其和函数为 $\varphi(t)$，即有

$$\varphi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nt^n=t\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}=t\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^n\right)'=t\left(\frac{t}{1-t}\right)'=\frac{t}{(1-t)^2},t\in(-1,1)$$

于是原级数的和函数

$$s(x)=\varphi(x-1)=\frac{x-1}{(2-x)^2},x\in(0,2).$$

(4) $u_n(x)=a_nx^n,a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$.

由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+2}=1$,得幂级数的收敛半径 $R=1$. 当 $x=\pm1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$均收敛,故幂级数的收敛域为$[-1,1]$.

设和函数为 $s(x)$,即 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$.

当 $x=0$ 时,$s(0)=0$;

当$0<|x|<1$时,$xs(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$,

上式两端对 x 求导,得

$$[xs(x)]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},$$

再求导,得

$$[xs(x)]''=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.$$

注意到$[xs(x)]'_{x=0}=0$,上式两端从 0 到 x 积分,得

$$[xs(x)]'=\int_0^x\frac{dx}{1-x}=-\ln(1-x),$$

再积分,得

$$xs(x)=-\int_0^x\ln(1-x)dx=(1-x)\ln(1-x)+x,$$

于是

$$s(x)=\frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1,x\in(-1,0)\cup(0,1).$$

由于幂级数在 $x=\pm1$ 处收敛,故和函数分别在 $x=\pm1$ 处左连续与右连续,于是 $s(1)=\lim\limits_{x\to1^-}s(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)+1=1$.

因此

$$s(x)=\begin{cases}1+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\ 0, & x=0,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

9. 求下列数项级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$；　　　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}$.

解 (1) 利用 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x, x\in(-\infty,+\infty)$，取 $x=1$，有 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$.

又

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

其中

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=2e.$$

(2) 因 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sin x$，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=\cos x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，故取 $x=1$，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}=\sin 1,\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}=\cos 1.$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}\\&=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right]\\&=\frac{1}{2}(\cos 1+\sin 1).\end{aligned}$$

10. 将下列函数展开成 x 的幂级数：

(1) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；　　　　(2) $\frac{1}{(2-x)^2}$.

解 (1) 因 $[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$，

而

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}, x\in[-1,1],$$

故

$$\ln(x+\sqrt{x^2+1})=\int_0^x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\right]dx$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}, x \in [-1,1].$$

(2) 因$\frac{1}{(2-x)^2} = \left(\frac{1}{2-x}\right)'$, $x \neq 2$.

而
$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n, x \in (-2,2).$$

故
$$\frac{1}{(2-x)^2} = \left(\frac{1}{2-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n\right)' = \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n\right)'$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} x^{n-1}, x \in (-2,2).$$

11. 设 $f(x)$是周期为 2π 的函数,它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0), \\ e^x, & x \in [0, \pi). \end{cases}$$
将 $f(x)$展开成傅里叶级数.

解 $f(x)$满足收敛定理的条件,且除了 $x = k\pi(k \in \mathbf{Z})$外处处连续.
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x dx = \frac{e^{\pi} - 1}{\pi};$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx de^x$$
$$= \frac{1}{\pi} \left(e^x \cos nx \Big|_0^{\pi} + n \int_0^{\pi} e^x \sin nx dx \right)$$
$$= \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{\pi} + \frac{n}{\pi} \left(e^x \sin nx \Big|_0^{\pi} - n \int_0^{\pi} e^x \cos nx dx \right)$$
$$= \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{\pi} - n^2 a_n,$$
故
$$a_n = \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{(n^2+1)\pi} \quad (n = 1, 2, \cdots);$$
而
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx de^x$$
$$= \frac{1}{\pi} \left(e^x \sin nx \Big|_0^{\pi} - n \int_0^{\pi} e^x \cos nx dx \right) = -na_n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$
于是
$$f(x) = \frac{e^{\pi} - 1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{n^2+1} \cos nx + \frac{(-1)^{n-1} e^{\pi} + 1}{n^2+1} n \sin nx \right],$$

$x\in\mathbf{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbf{Z}\}$.

12. 将函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant h,\\ 0, & h<x\leqslant\pi\end{cases}$$

分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 (1) 展开成正弦级数：

将 $f(x)$作奇延拓，得 $\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[0,\pi],\\ -f(-x), & x\in(-\pi,0),\end{cases}$ 再将 $\varphi(x)$作周期延拓，得 $\Phi(x)$，则 $\Phi(x)$满足收敛定理的条件，且在$[0,\pi]$上 $\Phi(x)\equiv f(x)$，并有间断点 $x=0$, $x=h$ 及 $x=\pi$.

$a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots)$;

$b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{h}\sin nx\mathrm{d}x=\dfrac{2(1-\cos nh)}{n\pi}\ (n=1,2,\cdots)$.

故

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nh}{n}\sin nx, x\in(0,h)\cup(h,\pi).$$

(2) 展开成余弦级数：

将 $f(x)$作偶延拓，得 $\psi(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[0,\pi]\\ f(-x), & x\in(-\pi,0]\end{cases}$，再将 $\psi(x)$作周期延拓得 $\Psi(x)$，则 $\Psi(x)$满足收敛定理的条件，在$[0,\pi]$上 $\Psi(x)\equiv f(x)$，且仅有一间断点 $x=h$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{h}\mathrm{d}x=\frac{2h}{\pi};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{h}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2\sin nh}{n\pi}\ (n=1,2,\cdots);$$

$$b_n=0\ (n=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\frac{h}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{n}\cos nx, x\in[0,h)\cup(h,\pi].$$

第十二章 微分方程

习 题 12－1

1．试说出下列各微分方程的阶数：

(1) $x(y')^2-2yy'+x=0$；　(2) $x^2y''-xy'+y=0$；

(3) $xy'''+2y''+x^2y=0$；　(4) $(7x-6y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0$；

(5) $L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\dfrac{Q}{C}=0$；　(6) $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}+\rho=\sin^2\theta$.

解　(1) 一阶；(2) 二阶；(3) 三阶；(4) 一阶；(5) 二阶；(6) 一阶.

2．指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解：

(1) $xy'=2y,y=5x^2$；

(2) $y''+y=0,y=3\sin x-4\cos x$；

(3) $y''-2y'+y=0,y=x^2\mathrm{e}^x$；

(4) $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0,y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}$.

解　(1) 由 $y=5x^2$，得 $y'=10x,xy'=10x^2=2y$，
故 $y=5x^2$ 是所给微分方程的解.

(2) 由 $y=3\sin x-4\cos x$，得 $y'=3\cos x+4\sin x$，进而得

$$y''=-3\sin x+4\cos x,$$

于是 $$y''+y=(-3\sin x+4\cos x)+(3\sin x-4\cos x)=0$$
故 $y=3\sin x-4\cos x$ 是所给微分方程的解.

(3) 由 $y=x^2\mathrm{e}^x$，得 $y'=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x=(2x+x^2)\mathrm{e}^x$，进而得

$$y''=(2+2x)\mathrm{e}^x+(2x+x^2)\mathrm{e}^x=(2+4x+x^2)\mathrm{e}^x,$$

于是 $$y''-2y'+y=[(2+4x+x^2)-2(2x+x^2)+x^2]\mathrm{e}^x=2\mathrm{e}^x\neq0,$$
故 $y=x^2\mathrm{e}^x$ 不是所给微分方程的解.

(4) 由 $y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}$，得 $y'=\lambda_1C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+\lambda_2C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}$，进而得

$$y''=\lambda_1^2C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+\lambda_2^2C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x},$$

于是 $$\begin{aligned}&y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y\\&=\lambda_1^2C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+\lambda_2^2C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}-\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2)C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}-\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}\\&\quad+\lambda_1\lambda_2C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+\lambda_1\lambda_2C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}\\&=0,\end{aligned}$$

故　$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$是所给微分方程的解.

3. 在下列各题中,验证所给二元方程所确定的函数为所给微分方程的解:

(1) $(x-2y)y'=2x-y$, $x^2-xy+y^2=C$;

(2) $(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0$, $y=\ln(xy)$.

解　(1) 在方程 $x^2-xy+y^2=C$ 两端对 x 求导,得

$$2x-(y+xy')+2yy'=0,$$

即
$$(x-2y)y'=2x-y.$$

故所给二元方程所确定的函数是微分方程的解.

(2) 在方程 $y=\ln(xy)$两端对 x 求导,得

$$y'=\frac{y+xy'}{xy},$$

即
$$(xy-x)y'-y=0,$$

再在上式两端对 x 求导,得

$$(y+xy'-1)y'+(xy-x)y''-y'=0,$$

即
$$(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0.$$

故所给二元方程所确定的函数是所给微分方程的解.

4. 在下列各题中,确定函数关系式中所含的参数,使函数满足所给的初始条件:

(1) $x^2-y^2=C$, $y|_{x=0}=5$;

(2) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$;

(3) $y=C_1\sin(x-C_2)$, $y|_{x=\pi}=1$, $y'|_{x=\pi}=0$.

解　(1) 由 $y|_{x=0}=5$,将 $x=0$, $y=5$ 代入函数关系中,得 $C=-25$,

即
$$x^2-y^2=-25.$$

(2) 由
$$y=(C_1+C_2x)e^{2x},$$

得
$$y'=(C_2+2C_1+2C_2x)e^{2x}.$$

将 $x=0$, $y=0$ 及 $y'=1$ 代入以上两式,得

$$\begin{cases}0=C_1,\\1=C_2+2C_1,\end{cases}$$

故
$$C_1=0,C_2=1,y=xe^{2x}.$$

(3) 由
$$y=C_1\sin(x-C_2),$$

得
$$y'=C_1\cos(x-C_2).$$

将 $x=\pi$, $y=1$ 及 $y'=0$ 代入以上两式,得

$$\begin{cases}1=C_1\sin(\pi-C_2)=C_1\sin C_2, & ①\\0=C_1\cos(\pi-C_2)=-C_1\cos C_2. & ②\end{cases}$$

由①^2 + ②^2 得 $$C_1^2=1,$$
不妨取 $C_1=1$,由①式得 $C_2=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,故
$$y=\sin\left(x-2k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x.$$
5. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程:

(1) 曲线在点(x,y)处的切线的斜率等于该点横坐标的平方;

(2) 曲线上点 $P(x,y)$处的法线与 x 轴的交点为 Q,且线段 PQ 被 y 轴平分.

解 (1) 设曲线方程为 $y=y(x)$,它在点(x,y)处的切线斜率为 y',依条件,有
$$y'=x^2,$$
此为曲线方程所满足的微分方程.

(2) 设曲线方程为 $y=y(x)$.因它在点 $P(x,y)$处的切线斜率为 y',故该点处法线斜率为 $-\frac{1}{y'}$.

由条件知 PQ 之中点位于 y 轴上,故点 Q 的坐标是$(-x,0)$,于是有
$$\frac{y-0}{x-(-x)}=-\frac{1}{y'},$$
即微分方程为 $yy'+2x=0.$

6. 用微分方程表示一物理命题:某种气体的气压 P 对于温度 T 的变化率与气压成正比,与温度的平方成反比.

解 因$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}$与 P 成正比,与 T^2 成反比,若比例系数为 k,则有
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}=k\frac{P}{T^2}.$$

习 题 12-2

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $xy'-y\ln y=0$; (2) $3x^2+5x-5y'=0$;

(3) $\sqrt{1-x^2}\,y'=\sqrt{1-y^2}$; (4) $y'-xy'=a(y^2+y')$;

(5) $\sec^2 x\tan y\,\mathrm{d}x+\sec^2 y\tan x\,\mathrm{d}y=0$; (6) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=10^{x+y}$;

(7) $(e^{x+y}-e^x)\mathrm{d}x+(e^{x+y}+e^y)\mathrm{d}y=0$; (8) $\cos x\sin y\,\mathrm{d}x+\sin x\cos y\,\mathrm{d}y=0$;

(9) $(y+1)^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x^3=0$; (10) $y\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=0$.

解 (1) 原方程为 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\ln y=0$,分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两端积分
$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

得
$$\ln(\ln y)=\ln x+\ln C=\ln(Cx),$$

即
$$\ln y=Cx,$$

故通解为
$$y=\mathrm{e}^{Cx}.$$

(2) 原方程可写成 $5y'=3x^2+5x$,积分得 $5y=x^3+\frac{5}{2}x^2+C_1$,

即通解为
$$y=\frac{1}{5}x^3+\frac{1}{2}x^2+C\left(C=\frac{C_1}{5}\right).$$

(3) 原方程为$\sqrt{1-x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1-y^2}$,分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},$$

两端积分得
$$\arcsin y=\arcsin x+C,$$

即为原方程的通解.

(4) 原方程可写成$(1-x-a)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=ay^2$,分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{a}{1-x-a}\mathrm{d}x,$$

两端积分得

$$-\frac{1}{y}=-a\ln(1-x-a)-C,$$

即
$$y=\frac{1}{a\ln(1-x-a)+C}$$

是原方程的通解.

(5) 原方程分离变量,得

$$\frac{\sec^2 y}{\tan y}\mathrm{d}y=-\frac{\sec^2 x}{\tan x}\mathrm{d}x,$$

两端积分,
$$\int\frac{\mathrm{d}(\tan y)}{\tan y}=-\int\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan x},$$

得
$$\ln(\tan y)=-\ln(\tan x)+\ln C,$$

可写成
$$\ln(\tan y\cdot\tan x)=\ln C,$$

故原方程的通解为

$$\tan y\cdot\tan x=C.$$

(6) 原方程分离变量，得 $10^{-y}\mathrm{d}y=10^{x}\mathrm{d}x$，

两端积分 $$\int 10^{-y}\mathrm{d}y=\int 10^{x}\mathrm{d}x$$

得 $$-\frac{10^{-y}}{\ln 10}=\frac{10^{x}}{\ln 10}+C',$$

可写成 $$10^{x}+10^{-y}=C(C=-C'\ln 10).$$

(7) 原方程为 $\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{y}-1)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{y}(\mathrm{e}^{x}+1)\mathrm{d}y=0$，分离变量，得

$$\frac{\mathrm{e}^{y}}{\mathrm{e}^{y}-1}\mathrm{d}y=-\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}\mathrm{d}x,$$

两端积分，得 $$\ln(\mathrm{e}^{y}-1)=-\ln(\mathrm{e}^{x}+1)+\ln C,$$

故原方程的通解为 $$(\mathrm{e}^{x}+1)(\mathrm{e}^{y}-1)=C.$$

(8) 原方程分离变量，得 $\dfrac{\cos y}{\sin y}\mathrm{d}y=-\dfrac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$，

两端积分，得 $$\ln(\sin y)=-\ln(\sin x)+\ln C,$$

即 $$\ln(\sin y\cdot\sin x)=\ln C,$$

故原方程的通解为 $$\sin y\cdot\sin x=C.$$

(9) 原方程分离变量，得 $(y+1)^{2}\mathrm{d}y=-x^{3}\mathrm{d}x$，

两端积分，得 $$\frac{1}{3}(y+1)^{3}=-\frac{1}{4}x^{4}+C_{1}$$

故原方程的通解为 $$3x^{4}+4(y+1)^{3}=C\quad(C=12C_{1}).$$

(10) 原方程分离变量，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{\mathrm{d}x}{4x-x^{2}}$，

两端积分，得

$$\ln y=\int\frac{\mathrm{d}x}{(4-x)x}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{4-x}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}[\ln x-\ln(4-x)]+\ln C_{1}=\frac{1}{4}\ln\frac{x}{4-x}+\ln C_{1},$$

即 $$\ln[y^{4}(4-x)]=\ln(Cx)\quad(C=4C_{1}),$$

故原方程的通解为

$$y^{4}(4-x)=Cx.$$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $y'=\mathrm{e}^{2x-y},y|_{x=0}=0$；

(2) $\cos x\sin y\mathrm{d}y=\cos y\sin x\mathrm{d}x,y|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$；

(3) $y'\sin x=y\ln y,y|_{x=\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}$；

(4) $\cos y\mathrm{d}x+(1+\mathrm{e}^{-x})\sin y\mathrm{d}y=0,y|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$；

(5) $x\mathrm{d}y+2y\mathrm{d}x=0, y|_{x=2}=1$.

解 (1) 分离变量，得 $$\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x,$$

两端积分，得 $$\mathrm{e}^y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C,$$

由 $y|_{x=0}=0$，得 $$1=\mathrm{e}^0=\frac{1}{2}\mathrm{e}^0+C,$$

故 $C=\frac{1}{2}$，即得 $$\mathrm{e}^y=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2x}+1),$$

于是所求特解为 $$y=\ln\frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{2}.$$

(2) 分离变量，得 $$\tan y\mathrm{d}y=\tan x\mathrm{d}x,$$
两端积分，得 $$-\ln(\cos y)=-\ln(\cos x)-\ln C,$$
即 $$\cos y=C\cos x.$$

代入初始条件：$x=0, y=\frac{\pi}{4}$，得$\frac{\sqrt{2}}{2}=C$，于是

$$\sqrt{2}\cos y=\cos x$$

为所求之特解.

(3) 分离变量，得 $$\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\frac{\mathrm{d}x}{\sin x},$$

两端积分，得 $$\ln(\ln y)=\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\ln C,$$

即 $$\ln y=C\tan\frac{x}{2}.$$

代入初始条件：$x=\frac{\pi}{2}, y=\mathrm{e}$，得 $1=C$，于是

$$y=\mathrm{e}^{\tan\frac{x}{2}}$$

为所求之特解.

(4) 分离变量，得 $$\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=-\tan y\mathrm{d}y,$$

两端积分，得 $$\ln(\mathrm{e}^x+1)=\ln(\cos y)+\ln C,$$
即 $$\mathrm{e}^x+1=C\cos y.$$

代入初始条件：$x=0, y=\frac{\pi}{4}$，有 $2=C\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $C=2\sqrt{2}$，于是

$$\mathrm{e}^x+1=2\sqrt{2}\cos y,$$

即 $$(\mathrm{e}^x+1)\sec y=2\sqrt{2}$$
为所求之特解.

(5) 分离变量,得 $\dfrac{dy}{y}=-2\dfrac{dx}{x}$,

两端积分得 $\ln y=-2\ln x+\ln C=\ln x^{-2}+\ln C$,

即 $x^2y=C$.

代入初始条件:$x=2,y=1$,得 $C=4$,

故所求之特解为 $x^2y=4$.

3. 有一盛满了水的圆锥形漏斗,高为 10 cm,顶角为 60°,漏斗下面有面积为 0.5 cm² 的孔,求水面高度变化的规律及流完所需的时间.

解 水从孔口流出的流量 Q 是单位时间内流出孔口的水的体积,即 $Q=\dfrac{dV}{dt}$. 又从力学知道,$Q=0.62S\sqrt{2gh}$,其中 0.62 为流量系数,S 为孔口截面积,g 为重力加速度,h 为水面到孔口的高度. 于是有$\dfrac{dV}{dt}=0.62S\sqrt{2gh}$,即

$$dV=0.62S\sqrt{2gh}\,dt. \tag{1}$$

设在时刻 t,水面高度为 $h=h(t)$. 从图 12-1 中可见,$x=h\tan 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}h$,于是在时间间隔$[t,t+dt]$内,流出的水的体积,即水体积的改变量

$$dV=-\pi x^2dh=-\frac{\pi}{3}h^2dh \tag{2}$$

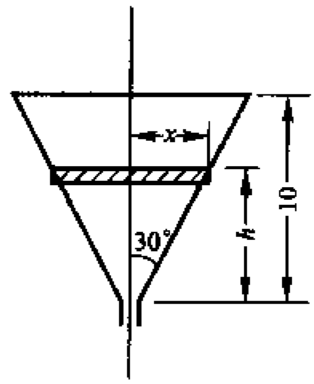


图 12-1

由(1),(2)式得微分方程

$$0.62S\sqrt{2gh}\,dt=-\frac{\pi}{3}h^2dh$$

并有初始条件:$t=0$ 时,$h=10$.

由微分方程分离变量,得

$$dt=-\frac{\pi}{3\times 0.62S\sqrt{2g}}h^{\frac{3}{2}}dh$$

两端积分,得 $$t=-\frac{2\pi}{15\times 0.62S\sqrt{2g}}h^{\frac{5}{2}}+C.$$

代入初始条件:$t=0,h=10$,得 $C=\dfrac{2\pi}{15\times 0.62S\sqrt{2g}}10^{\frac{5}{2}}$.

于是 $$t=\frac{2\pi}{15\times 0.62S\sqrt{2g}}(10^{\frac{5}{2}}-h^{\frac{5}{2}}).$$

代入 $S=0.5(\text{cm}^2)\cdot g=980(\text{cm/s}^2)$,即得

$$t=-0.030\,5h^{\frac{5}{2}}+9.64.$$

当 $h=0$ 时,得流完所需时间 $t\approx 10(\text{s})$.

4. 质量为 1 g(克)的质点受外力作用作直线运动,这外力和时间成正比,和质点运动的速度成反比. 在 $t=10$ s 时,速度等于 50 cm/s,外力为 4 g·cm/s^2,问从运动开始经过了一分钟后的速度是多少?

解 设在时刻 t,质点运动速度为 $v=v(t)$. 据题设条件,有

$$f=mv'=k\frac{t}{v},$$

且由 $m=1,t=10,v=50,f=4$,得 $k=\frac{f\cdot v}{t}=20$.

故有微分方程

$$v'=20\frac{t}{v}.$$

分离变量 $$v\mathrm{d}v=20t\mathrm{d}t$$

积分得 $$v^2=20t^2+C.$$

代入条件:$t=10,v=50$,得 $C=500$,

于是有特解 $$v=\sqrt{20t^2+500}.$$

当 $t=60$(s)时, $v=\sqrt{20\times60^2+500}=269.3$(cm/s).

5. 镭的衰变有如下的规律:镭的衰变速度与它的现存量 R 成正比. 由经验材料得知,镭经过 1 600 年后,只余原始量 R_0 的一半. 试求镭的量 R 与时间 t 的函数关系.

解 设在时刻 t,镭的存量为 $R=R(t)$. 由题设条件知,

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=-\lambda R,\text{即}\quad\frac{\mathrm{d}R}{R}=-\lambda\mathrm{d}t.$$

积分得 $$\ln R=-\lambda t+\ln C,$$

即 $$R=C\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

因 $t=0$ 时,$R=R_0$,故 $C=R_0$,$R=R_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

将 $t=1\ 600$,$R=\frac{1}{2}R_0$ 代入上式,即得 $\frac{1}{2}=\mathrm{e}^{-1\ 600\lambda}$,

于是得 $$\lambda=\frac{\ln 2}{1\ 600}.$$

所以 $$R=R_0\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{1\ 600}t}=R_0\mathrm{e}^{-0.000\ 433t}.$$

6. 一曲线通过点(2,3),它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分,求这曲线方程.

解 设曲线方程为 $y=y(x)$,切点为(x,y). 依条件,切线在 x 轴与 y 轴上的截距分别为 $2x$ 与 $2y$,于是切线的斜率

$$y'=\frac{2y-0}{0-2x}=-\frac{y}{x}.$$

分离变量得

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}.$$

积分得 $\qquad \ln y=-\ln x+\ln C,$

即 $\qquad xy=C.$

代入初始条件 $x=2, y=3$，得 $C=6$，

故曲线方程为 $\qquad xy=6.$

7. 小船从河边点 O 处出发驶向对岸(两岸为平行直线). 设船速为 a，船行方向始终与河岸垂直，又设河宽为 h，河中任一点处的水流速度与该点到两岸距离的乘积成正比(比例系数为 k). 求小船的航行路线.

解 设小船的航行路线为 $C:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ 则在时刻 t，小船的实际航行速度为 $\boldsymbol{v}(t)=(x'(t),y'(t))$，其中

$x'(t)=ky(h-y)$ 为水的流速；

$y'(t)=a$ 为小船的主动速度.

由于小船航行路线的切线方向就是小船的实际速度方向(图 12-2)，故有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{a}{ky(h-y)}.$$

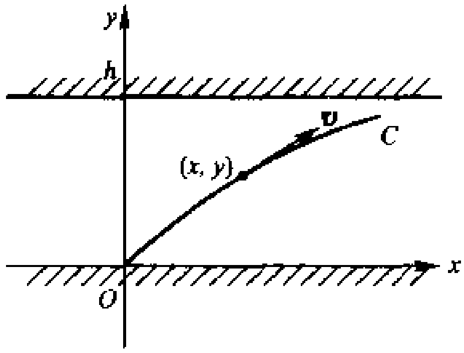


图 12-2

分离变量，得 $\qquad dx=\dfrac{k}{a}y(h-y)dy,$

积分得 $\qquad x=\dfrac{k}{a}\displaystyle\int(hy-y^2)dy$

$$=\frac{k}{a}\left(\frac{h}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right)+C.$$

由于小船始发于点(0,0)，代入 $x=0, y=0$，得 $C=0$，故小船航行的路线的方程为

$$x=\frac{k}{a}\left(\frac{h}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right).$$

习 题 12-3

1. 求下列齐次方程的通解：

(1) $xy'-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$； $\qquad$ (2) $x\dfrac{dy}{dx}=y\ln\dfrac{y}{x}$；

(3) $(x^2+y^2)dx-xydy=0$； $\qquad$ (4) $(x^3+y^3)dx-3xy^2dy=0$；

(5) $\left(2x\operatorname{sh}\dfrac{y}{x}+3y\operatorname{ch}\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x-3x\operatorname{ch}\dfrac{y}{x}\mathrm{d}y=0$;

(6) $(1+2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}x+2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)\mathrm{d}y=0$.

解 (1) 将原方程写成 $y'=\dfrac{y}{x}+\sqrt{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-1}$，令 $u=\dfrac{y}{x}$，即 $y=xu$，有 $y'=u+xu'$，则原方程成为 $u+xu'=u+\sqrt{u^2-1}$，分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-1}}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

积分得

$$\ln(u+\sqrt{u^2-1})=\ln x+\ln C,$$

即
$$u+\sqrt{u^2-1}=Cx.$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式并整理，得通解

$$y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2.$$

(2) 原方程可表示成 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$，令 $u=\dfrac{y}{x}$，即 $y=xu$，有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，则原方程成为 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u\ln u$，分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

积分得
$$\ln(\ln u-1)=\ln x+\ln C,$$

即
$$\ln u-1=Cx.$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式，得通解

$$\ln\frac{y}{x}=Cx+1.$$

(3) 原方程可表示为 $\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y=0$. 令 $u=\dfrac{y}{x}$，即 $y=xu$，有 $\mathrm{d}y=u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u$，则原方程成为

$$\left(\frac{1}{u}+u\right)\mathrm{d}x-(u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u)=0,$$

即
$$u\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

积分得
$$\frac{u^2}{2}=\ln|x|+C_1$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式并整理，得通解

$$y^2 = x^2(2\ln|x| + C).$$

(4) 原方程可写成$\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y}{x}\right)dx - dy = 0$. 令 $u=\frac{y}{x}$,即 $y=xu$,有 $dy = u dx + x du$,则原方程成为$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{u^2}+u\right)dx-(u dx + x du)=0$.

分离变量,得
$$\frac{3u^2}{1-2u^3}du = \frac{1}{x}dx,$$

积分得
$$-\frac{1}{2}\ln(1-2u^3) = \ln x + \ln C,$$

即
$$1-2u^3 = \frac{C}{x^2}.$$

将 $u=\frac{y}{x}$代入上式并整理,得通解
$$x^3 - 2y^3 = Cx.$$

(5) 原方程可写成$\frac{2}{3}\operatorname{th}\frac{y}{x}+\frac{y}{x}-\frac{dy}{dx}=0$. 令 $u=\frac{y}{x}$,即 $y=xu$,有$\frac{dy}{dx}=u + x\frac{du}{dx}$,则原方程成为$\frac{2}{3}\operatorname{th} u + u - \left(u + x\frac{du}{dx}\right)=0$. 分离变量,得
$$\frac{3}{2}\frac{du}{\operatorname{th} u} = \frac{dx}{x},\text{或}\quad \frac{3}{2}\frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u}du = \frac{dx}{x},$$

积分
$$\frac{3}{2}\int\frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u}du = \int\frac{dx}{x}.$$

得
$$3\ln(\operatorname{sh} u) = 2\ln x + \ln C,$$

即
$$\operatorname{sh}^3 u = Cx^2.$$

将 $u=\frac{y}{x}$代入上式,得通解 $\operatorname{sh}^3\frac{y}{x} = Cx^2$.

(6) 原方程可写成$\frac{dx}{dy}(1+2e^{\frac{x}{y}})+2e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})=0$. 令 $u=\frac{x}{y}$,即 $x=yu$,有 $\frac{dx}{dy}=u+y\frac{du}{dy}$,则原方程成为
$$\left(u+y\frac{du}{dy}\right)(1+2e^u)+2e^u(1-u)=0,$$

整理并分离变量,得
$$\frac{1+2e^u}{u+2e^u}du + \frac{dy}{y} = 0,$$

即
$$\frac{d(u+2e^u)}{u+2e^u} + \frac{dy}{y} = 0.$$

积分得
$$\ln(u+2e^u) + \ln y = \ln C,$$

即
$$y(u+2e^u) = C.$$

将 $u=\frac{x}{y}$ 代入上式，得通解

$$x+2ye^{\frac{x}{y}}=C.$$

2. 求下列齐次方程满足所给初始条件的特解：

(1) $(y^2-3x^2)\mathrm{d}y+2xy\mathrm{d}x=0,\ y|_{x=0}=1$；

(2) $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x},\ y|_{x=1}=2$；

(3) $(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(y^2+2xy-x^2)\mathrm{d}y=0,\ y|_{x=1}=1$.

解 (1) 原方程可写成 $1-3\frac{x^2}{y^2}+2\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=0$. 令 $u=\frac{x}{y}$，即 $x=yu$，有 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$，则原方程成为

$$1-3u^2+2u\left(u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)=0,$$

分离变量，得
$$\frac{2u}{u^2-1}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

积分得
$$\ln(u^2-1)=\ln y+\ln C,$$

即
$$u^2-1=Cy.$$

代入 $u=\frac{x}{y}$ 并整理，得通解 $x^2-y^2=Cy^3$.

由初始条件 $x=0,y=1$，得 $C=-1$. 于是所求特解为

$$y^3=y^2-x^2.$$

(2) 令 $u=\frac{y}{x}$，有 $y'=u+xu'$，则原方程成为 $u+xu'=\frac{1}{u}+u$. 分离变量，得

$$u\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

积分得
$$\frac{1}{2}u^2=\ln x+C,$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式并整理，得通解

$$y^2=2x^2(\ln x+C).$$

代入初始条件 $x=1,y=2$，解得 $C=2$. 于是所求特解为

$$y^2=2x^2(\ln x+2).$$

(3) 将原方程写成 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1+2\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\frac{y}{x}-1}=0$，令 $u=\frac{y}{x}$，有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，

则原方程成为 $$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{1+2u-u^2}{u^2+2u-1}=0,$$

整理并分离变量，得

$$\frac{1-2u-u^2}{u^3+u^2+u+1}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

积分得 $$\int\frac{1-2u-u^2}{u^3+u^2+u+1}\mathrm{d}u=\int\frac{1-2u-u^2}{(u+1)(u^2+1)}\mathrm{d}u=\int\left(\frac{1}{u+1}-\frac{2u}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\ln\frac{u+1}{u^2+1}=\ln x+\ln C,$$

故 $$\frac{u+1}{u^2+1}=Cx.$$

代入 $u=\frac{y}{x}$ 并整理，得通解 $\frac{y+x}{y^2+x^2}=C$.

以初始条件 $x=1,y=1$ 定出 $C=1$. 故所求特解为

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}=1.$$

3. 设有连结点 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$，对于 $\overset{\frown}{OA}$ 上任一点 $P(x,y)$，曲线弧 $\overset{\frown}{OP}$ 与直线段 $\overline{OP}$ 所围图形的面积为 x^2，求曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$ 的方程.

解 设曲线弧的方程为 $y=y(x)$. 依题意，有

$$\int_0^x y(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}xy(x)=x^2.$$

上式两端对 x 求导，

$$y(x)-\frac{1}{2}y(x)-\frac{1}{2}xy'(x)=2x,$$

即得微分方程

$$y'=\frac{y}{x}-4.$$

令 $u=\frac{y}{x}$，有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，则微分方程成为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{4}{x}.$$

积分得 $$u=-4\ln x+C,$$

因 $u=\frac{y}{x}$，故有 $$y=x(-4\ln x+C).$$

又因曲线过点 $A(1,1)$，故 $1=C$. 于是得曲线弧的方程

$$y=x(1-4\ln x).$$

*4. 化下列方程为齐次方程,并求出通解:

(1) $(2x-5y+3)\mathrm{d}x-(2x+4y-6)\mathrm{d}y=0$;

(2) $(x-y-1)\mathrm{d}x+(4y+x-1)\mathrm{d}y=0$;

(3) $(3y-7x+7)\mathrm{d}x+(7y-3x+3)\mathrm{d}y=0$;

(4) $(x+y)\mathrm{d}x+(3x+3y-4)\mathrm{d}y=0$.

解 (1) 令 $x=X+h$, $y=Y+k$,则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}X$, $\mathrm{d}y=\mathrm{d}Y$,且原方程成为

$$(2X-5Y+2h-5k+3)\mathrm{d}X-(2X+4Y+2h+4k-6)\mathrm{d}Y=0.$$

令 $\begin{cases}2h-5k+3=0,\\2h+4k-6=0,\end{cases}$ 解此方程组得 $h=1$, $k=1$. 故在变换 $x=X+1$, $y=Y+1$ 下原方程化为

$$(2X-5Y)\mathrm{d}X-(2X+4Y)\mathrm{d}Y=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{2X-5Y}{2X+4Y}=\frac{2-5\dfrac{Y}{X}}{2+4\dfrac{Y}{X}}.$$

又令 $u=\dfrac{Y}{X}$,有 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=u+X\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}$,则原方程成为

$$u+X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=\frac{2-5u}{2+4u},$$

即

$$\frac{4u+2}{4u^2+yu-2}\mathrm{d}u=-\frac{1}{X}\mathrm{d}X.$$

积分

$$\begin{aligned}\int\frac{4u+2}{4u^2+7u-2}\mathrm{d}u&=\int\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{u+2}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4u-1}\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{2}{3}\ln(u+2)+\frac{1}{3}\ln(4u-1)\\&=\frac{1}{3}\ln[(u+2)^2(4u-1)]\\&=-\ln X+\ln C_1.\end{aligned}$$

得

$$\ln[(u+2)^2(4u-1)]=-\ln X^3+\ln C\quad(C=C_1^3),$$

即

$$(u+2)^2(4u-1)X^3=C,$$

因 $u=\dfrac{Y}{X}$,故上式成为

$$(2X+Y)^2(4Y-X)=C.$$

代入 $X=x-1$, $Y=y-1$,得原方程的通解

$$(2x+y-3)^2(4y-x-3)=C.$$

(2) 将原方程写成 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-x+y+1}{4y+x-1}=\dfrac{y-(x-1)}{4y+(x-1)}$,令 $X=x-1$, $Y=y$,

则 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}Y,\mathrm{d}x=\mathrm{d}X$，且原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{Y-X}{4Y+X}=\frac{Y/X-1}{4Y/X+1}.$$

又令 $u=\frac{Y}{X}$，有$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=u+X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}$，则原方程成为

$$\frac{4u+1}{4u^2+1}\mathrm{d}u+\frac{1}{X}\mathrm{d}X=0.$$

积分 $$\int\left[\frac{4u}{4u^2+1}+\frac{1}{4u^2+1}\right]\mathrm{d}u+\int\frac{\mathrm{d}X}{X}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(4u^2+1)+\frac{1}{2}\arctan(2u)+\ln X=C_1,$$

即 $$\ln[X^2(4u^2+1)]+\arctan(2u)=C\quad(C=2C_1)$$

将 $u=\frac{Y}{X}=\frac{y}{x-1}$代入上式，得原方程的通解

$$\ln[4y^2+(x-1)^2]+\arctan\frac{2y}{x-1}=C.$$

(3) 令 $x=X+h,y=Y+k$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}X,\mathrm{d}y=\mathrm{d}Y$，且原方程成为

$$(3Y-7X+3k-7h+7)\mathrm{d}X+(7Y-3X+7k-3h+3)\mathrm{d}Y=0$$

令$\begin{cases}3k-7h+7=0,\\7k-3h+3=0,\end{cases}$解此方程组，得 $h=1,k=0$.故在变换 $x=X+1,y=Y$ 下，原方程化为$(3Y-7X)\mathrm{d}X+(7Y-3X)\mathrm{d}Y=0$，

即 $$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{7X-3Y}{7Y-3X}=\frac{7-3Y/X}{7Y/X-3}$$

又令 $u=\frac{Y}{X}$，有$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=u+X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}$，则原方程成为

$$u+X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=\frac{7-3u}{7u-3},$$

即 $$\frac{7u-3}{u^2-1}\mathrm{d}u=-7\frac{\mathrm{d}X}{X},$$

积分 $$\int\left(\frac{2}{u-1}+\frac{5}{u+1}\right)\mathrm{d}u=-7\int\frac{\mathrm{d}X}{X}$$

得 $$2\ln(u-1)+5\ln(u+1)=-7\ln X+\ln C.$$

即 $$X^7(u-1)^2(u+1)^5=C.$$

将 $u=\frac{Y}{X}=\frac{y}{x-1}$代入上式，得原方程的通解

$$(y-x+1)^2(y+x-1)^5=C.$$

(4) 将原方程写成$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{4-3(x+y)}$$\Big($该方程属于$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(ax+by+c)$类型

的，一般可令 $u=ax+by+c$）. 令 $u=x+y$，则$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1$，且原方程成为

$$\frac{du}{dx}-1=\frac{u}{4-3u},$$

即
$$\frac{3u-4}{u-2}du=2dx.$$

积分得
$$3u+2\ln|u-2|=2x+C.$$

将 $u=x+y$ 代入上式，得原方程的通解

$$x+3y+2\ln|x+y-2|=C.$$

习 题 12－4

1. 求下列微分方程的通解：

(1) $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$；　　(2) $xy'+y=x^2+3x+2$；

(3) $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$；　　(4) $y'+y\tan x=\sin 2x$；

(5) $(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0$；　　(6) $\frac{d\rho}{d\theta}+3\rho=2$；

(7) $\frac{dy}{dx}+2xy=4x$；　　(8) $y\ln y dx+(x-\ln y)dy=0$；

(9) $(x-2)\frac{dy}{dx}=y+2(x-2)^3$；　　(10) $(y^2-6x)\frac{dy}{dx}+2y=0$.

解 (1) $y=e^{-\int dx}\left[\int e^{-x}\cdot e^{\int dx}dx+C\right]=e^{-x}\left(\int e^{-x}\cdot e^{x}dx+C\right)$

$=e^{-x}(x+C)$.

(2) 将方程改写成 $y'+\frac{1}{x}y=x+3+\frac{2}{x}$，则

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int\left(x+3+\frac{2}{x}\right)e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]=\frac{1}{x}\left[\int\left(x+3+\frac{2}{x}\right)xdx+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\int(x^2+3x+2)dx+C\right]=\frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x+C\right)$$

$$=\frac{x^2}{3}+\frac{3x}{2}+2+\frac{C}{x}.$$

(3) $y=e^{-\int\cos x dx}\left(\int e^{-\sin x}\cdot e^{\int\cos x dx}dx+C\right)=e^{-\sin x}\left(\int e^{-\sin x}\cdot e^{\sin x}dx+C\right)$

$=e^{-\sin x}(x+C)$.

(4) $y=e^{-\int\tan x dx}\left(\int\sin 2x e^{\int\tan x dx}dx+C\right)$

$$= \cos x\left(\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\mathrm{d}x + C\right) = \cos x\left(\int 2\sin x\mathrm{d}x + C\right)$$
$$= C\cos x - 2\cos^2 x.$$

(5) 将原方程写成 $y' + \frac{2x}{x^2-1}y = \frac{\cos x}{x^2-1}$,则

$$y = \mathrm{e}^{-\int \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\left(\int \frac{\cos x}{x^2-1}\mathrm{e}^{\int \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)$$
$$= \frac{1}{x^2-1}\left[\int \frac{\cos x}{x^2-1}(x^2-1)\mathrm{d}x + C\right] = \frac{1}{x^2-1}\left(\int \cos x\mathrm{d}x + C\right)$$
$$= \frac{\sin x + C}{x^2-1}.$$

(6) $$\rho = \mathrm{e}^{-\int 3\mathrm{d}\theta}\left(\int 2\mathrm{e}^{\int 3\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta + C\right) = \mathrm{e}^{-3\theta}\left(\int 2\mathrm{e}^{3\theta}\mathrm{d}\theta + C\right)$$
$$= \mathrm{e}^{-3\theta}\left(\frac{2}{3}\mathrm{e}^{3\theta} + C\right) = \frac{2}{3} + C\mathrm{e}^{-3\theta}.$$

(7) $$y = \mathrm{e}^{-\int 2x\mathrm{d}x}\left(\int 4x\mathrm{e}^{\int 2x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) = \mathrm{e}^{-x^2}\left(\int 4x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x + C\right)$$
$$= \mathrm{e}^{-x^2}(2\mathrm{e}^{x^2} + C) = 2 + C\mathrm{e}^{-x^2}.$$

(8) 将原方程写成$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{y\ln y}x = \frac{1}{y}$,则

$$x = \mathrm{e}^{-\int \frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}}\left(\int \frac{1}{y}\mathrm{e}^{\int \frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}}\mathrm{d}y + C\right) = \mathrm{e}^{-\ln(\ln y)}\left[\int \frac{1}{y}\mathrm{e}^{\ln(\ln y)}\mathrm{d}y + C\right]$$
$$= \frac{1}{\ln y}\left(\int \frac{\ln y}{y}\mathrm{d}y + C\right) = \frac{1}{\ln y}\left(\frac{1}{2}\ln^2 y + C\right),$$

即
$$2x\ln y = \ln^2 y + C_1 \quad (C_1 = 2C).$$

(9) 将原方程写成 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{x-2}y = 2(x-2)^2$,则

$$y = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x}\left[\int 2(x-2)^2 \cdot \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right]$$
$$= (x-2)\left[\int 2(x-2)^2 \cdot \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x + C\right]$$
$$= (x-2)\left[\int 2(x-2)\mathrm{d}x + C\right]$$
$$= (x-2)[(x-2)^2 + C] = (x-2)^3 + C(x-2).$$

(10) 将原方程改写成 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \frac{3}{y}x = -\frac{y}{2}$,则

$$x = \mathrm{e}^{\int \frac{3}{y}\mathrm{d}y}\left(\int -\frac{y}{2}\mathrm{e}^{-\int \frac{3}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + C\right)$$
$$= y^3\left(\int -\frac{y}{2} \cdot \frac{1}{y^3}\mathrm{d}y + C\right) = y^3\left(\int -\frac{1}{2y^2}\mathrm{d}y + C\right)$$

$$= y^3\left(\frac{1}{2y}+C\right)=\frac{y^2}{2}+Cy^3.$$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $\frac{dy}{dx}-y\tan x=\sec x, y|_{x=0}=0$;　　(2) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}, y|_{x=\pi}=1$;

(3) $\frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x}, y|_{x=\frac{\pi}{2}}=-4$;　　(4) $\frac{dy}{dx}+3y=8, y|_{x=0}=2$;

(5) $\frac{dy}{dx}+\frac{2-3x^2}{x^3}y=1, y|_{x=1}=0$.

解 (1) $y = e^{\int\tan x dx}\left(\int\sec x e^{-\int\tan x dx}dx + C\right)$

$$= e^{-\ln\cos x}\left(\int\sec x e^{\ln\cos x}dx + C\right)=\frac{1}{\cos x}\left(\int\sec x\cdot\cos x dx + C\right)$$

$$=\frac{x+C}{\cos x},$$

代入初始条件 $x=0, y=0$，得 $C=0$. 故所求特解为

$$y=\frac{x}{\cos x}.$$

(2) $y = e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\frac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx + C\right)=\frac{1}{x}\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot x dx + C\right)$

$$=\frac{1}{x}(-\cos x + C),$$

代入初始条件 $x=\pi, y=1$，得 $C=\pi-1$，故所求特解为

$$y=\frac{1}{x}(\pi-1-\cos x).$$

(3) $y = e^{-\int\cot x dx}\left(\int 5e^{\cos x}e^{\int\cot x dx}dx + C\right)$

$$=\frac{1}{\sin x}\left(\int 5e^{\cos x}\cdot\sin x dx + C\right)=\frac{1}{\sin x}(-5e^{\cos x}+C),$$

代入初始条件 $x=\frac{\pi}{2}, y=-4$，得 $C=1$，故所求特解为 $y=\frac{1-5e^{\cos x}}{\sin x}$，即

$$y\sin x+5e^{\cos x}=1.$$

(4) $y = e^{-\int 3dx}\left(\int 8e^{\int 3dx}dx + C\right)=e^{-3x}\left(\int 8e^{3x}dx + C\right)$

$$= e^{-3x}\left(\frac{8}{3}e^{3x}+C\right)=\frac{8}{3}+Ce^{-3x},$$

代入初始条件 $x=0, y=2$，得 $C=-\frac{2}{3}$，故所求特解为

$$y=\frac{2}{3}(4-e^{-3x}).$$

(5) $y = e^{-\int\left(\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x}\right)dx}\left[\int e^{\int\left(\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x}\right)dx}dx + C\right]$

$$= e^{\frac{1}{x^2}+3\ln x}\left(\int e^{-\left(\frac{1}{x^2}+3\ln x\right)}dx + C\right)$$

$$= x^3 e^{\frac{1}{x^2}}\left(\int \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx + C\right) = x^3 e^{\frac{1}{x^2}}\left[\frac{1}{2}\int e^{-\frac{1}{x^2}}d\left(-\frac{1}{x^2}\right) + C\right]$$

$$= x^3 e^{\frac{1}{x^2}}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}} + C\right) = \frac{x^3}{2} + Cx^3 e^{\frac{1}{x^2}},$$

代入初始条件 $x=1, y=0$,得 $C=-\frac{1}{2e}$,故所求特解为

$$y=\frac{x^3}{2}\left(1-e^{\frac{1}{x^2}-1}\right).$$

3. 求一曲线的方程,这曲线通过原点,并且它在点(x,y)处的切线斜率等于 $2x+y$.

解 设曲线方程为 $y=y(x)$,依题意有 $y'=2x+y$,即

$$y'-y=2x, y|_{x=0}=0.$$

$$y = e^{\int dx}\left(\int 2xe^{-\int dx}dx + C\right) = e^x\left(\int 2xe^{-x}dx + C\right)$$

$$= e^x(-2xe^{-x}-2e^{-x}+C) = -2x-2+Ce^x.$$

由 $x=0, y=0$,得 $C=2$.故所求曲线的方程为

$$y=2(e^x-x-1).$$

4. 设有一质量为 m 的质点作直线运动.从速度等于零的时刻起,有一个与运动方向一致、大小与时间成正比(比例系数为 k_1)的力作用于它,此外还受一与速度成正比(比例系数为 k_2)的阻力作用.求质点运动的速度与时间的函数关系.

解 依题意,有 $ma=k_1t-k_2v, a=\frac{dv}{dt}$,即

$$m\frac{dv}{dt}=k_1t-k_2v, v|_{t=0}=0.$$

将方程改写成 $\frac{dv}{dt}+\frac{k_2}{m}v=\frac{k_1}{m}t$,则

$$v = e^{-\int\frac{k_2}{m}dt}\left(\int\frac{k_1}{m}t\cdot e^{\int\frac{k_2}{m}dt}dt + C\right)$$

$$= e^{-\frac{k_2}{m}t}\left(\frac{k_1}{m}\int te^{\frac{k_2}{m}t}dt + C\right) = e^{-\frac{k_2}{m}t}\left(\frac{k_1}{k_2}te^{\frac{k_2}{m}t} - \frac{k_1}{k_2}\int e^{\frac{k_2}{m}t}dt + C\right)$$

$$= e^{-\frac{k_2}{m}t}\left(\frac{k_1}{k_2}te^{\frac{k_2}{m}t} - \frac{k_1 m}{k_2^2}e^{\frac{k_2}{m}t} + C\right)$$

$$=\frac{k_1}{k_2}t-\frac{k_1 m}{k_2^2}+Ce^{-\frac{k_2}{m}t}.$$

由 $t=0, v=0$，得 $C=\frac{k_1 m}{k_2^2}$，故速度与时间的关系为

$$v=\frac{k_1}{k_2}t-\frac{k_1 m}{k_2^2}(1-e^{-\frac{k_2}{m}t}).$$

5. 设有一个由电阻 $R=10\ \Omega$、电感 $L=2$ H(亨)和电源电压 $E=20\sin 5t$ V(伏)串联组成的电路．开关 K 合上后，电路中有电流通过．求电流 i 与时间 t 的函数关系．

解 依题意，有 $20\sin 5t=10i+2\frac{di}{dt}$，即

$$\frac{di}{dt}+5i=10\sin 5t, i|_{t=0}=0.$$

$$i=e^{-\int 5dt}\left(\int 10\sin 5te^{\int 5dt}dt+C_1\right)=e^{-5t}\left(\int 10\sin 5te^{5t}dt+C_1\right),$$

其中，记 $I=\int 10\sin 5te^{5t}dt$，则

$$\begin{aligned}I&=2\int\sin 5t\,d(e^{5t})=2\sin 5te^{5t}-2\int e^{5t}\cos 5t\cdot 5dt\\&=2\sin 5te^{5t}-2\int\cos 5t\,d(e^{5t})\\&=2\sin 5te^{5t}-2\cos 5te^{5t}-10\int\sin 5te^{5t}dt\\&=2e^{5t}(\sin 5t-\cos 5t)-I,\end{aligned}$$

故 $I=e^{5t}(\sin 5t-\cos 5t)+C_2$，于是

$$\begin{aligned}i&=e^{-5t}\cdot[e^{5t}(\sin 5t-\cos 5t)+C]\quad(C=C_1+C_2)\\&=\sin 5t-\cos 5t+Ce^{-5t}.\end{aligned}$$

代入初始条件 $t=0, i=0$，得 $C=1$，故电流 i 与时间 t 的函数关系为

$$i=e^{-5t}+\sin 5t-\cos 5t,$$

按波动学的习惯，可写成

$$i=e^{-5t}+\sqrt{2}\sin\left(5t-\frac{\pi}{4}\right).$$

6. 设曲线积分 $\int_L yf(x)dx+[2xf(x)-x^2]dy$ 在右半平面($x>0$)内与路径无关，其中 $f(x)$ 可导，且 $f(1)=1$，求 $f(x)$．

解 依题意及曲线积分与路径无关的条件，有

$$\frac{\partial[2xf(x)-x^2]}{\partial x}-\frac{\partial[yf(x)]}{\partial y}=0,$$

即 $$2f(x)+2xf'(x)-2x-f(x)=0.$$

记 $y=f(x)$，即得微分方程及初始条件

$$y'+\frac{1}{2x}y=1,\quad y|_{x=1}=1.$$

$$y=e^{-\int\frac{1}{2x}dx}\left(\int e^{\int\frac{1}{2x}dx}dx+C\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\int\sqrt{x}dx+C\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C\right)=\frac{2}{3}x+\frac{C}{\sqrt{x}}.$$

代入初始条件 $x=1,y=1$，得 $C=\frac{1}{3}$，故

$$y=f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3\sqrt{x}}.$$

7. 求下列伯努利方程的通解：

(1) $\frac{dy}{dx}+y=y^2(\cos x-\sin x)$，　　(2) $\frac{dy}{dx}-3xy=xy^2$；

(3) $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{3}y=\frac{1}{3}(1-2x)y^4$；　　(4) $\frac{dy}{dx}-y=xy^5$；

(5) $xdy-[y+xy^3(1+\ln x)]dx=0$.

解 (1) 将原方程改写成 $\frac{1}{y^2}y'+\frac{1}{y}=\cos x-\sin x$，并令 $z=\frac{1}{y}$，则 $z'=-\frac{1}{y^2}y'$，且原方程化为

$$z'-z=\sin x-\cos x.$$

$$z=e^{\int dx}\left[\int(\sin x-\cos x)e^{-\int dx}dx+C\right]=e^x\left[\int(\sin x-\cos x)e^{-x}dx+C\right]$$

$$=e^x\left(\int\sin xe^{-x}dx-\int\cos xe^{-x}dx+C\right),$$

其中 $\int\sin xe^{-x}dx=-\int\sin xd(e^{-x})=-\sin xe^{-x}+\int e^{-x}\cos xdx$，故

$$z=e^x(-\sin xe^{-x}+C)=Ce^x-\sin x,$$

即 $$\frac{1}{y}=Ce^x-\sin x\quad 为所求通解.$$

(2) 将原方程改写成 $y^{-2}y'-3xy^{-1}=x$，并令 $z=y^{-1}$，则 $z'=-y^{-2}y'$，且原方程化为

$$z'+3xz=-x.$$

$$z=e^{-\int 3xdx}\left(\int-xe^{\int 3xdx}dx+C\right)=e^{-\frac{3}{2}x^2}\left(\int-xe^{\frac{3}{2}x^2}dx+C\right)$$

$$=e^{-\frac{3}{2}x^2}\left(-\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x^2}+C\right)=-\frac{1}{3}+Ce^{-\frac{3}{2}x^2},$$

故原方程的通解为

$$y^{-1}=-\frac{1}{3}+Ce^{\frac{3}{2}x^2},$$

或写成 $$\frac{3}{2}x^2+\ln\left(1+\frac{3}{y}\right)=C_1\quad(C_1=\ln 3C).$$

(3) 将原方程改写成 $y^{-4}y'+\frac{1}{3}y^{-3}=\frac{1}{3}(1-2x)$，并令 $z=y^{-3}$，则 $z'=-3y^{-4}y'$，于是原方程化为

$$z'-z=1-2x.$$

$$\begin{aligned}z&=e^{\int dx}\left[\int(1-2x)e^{-\int dx}dx+C\right]=e^x\left[\int(1-2x)e^{-x}dx+C\right]\\&=e^x[(-2x-1)e^{-x}+C]=-2x-1+Ce^x,\end{aligned}$$

即 $y^{-3}=-2x-1+Ce^x$ 为所求通解.

(4) 将原方程改写成 $y^{-5}y'-y^{-4}=x$，并令 $z=y^{-4}$，则 $z'=-4y^{-5}y'$，且原方程化为

$$z'+4z=-4x.$$

$$\begin{aligned}z&=e^{-\int 4dx}\left(\int-4xe^{\int 4dx}dx+C\right)=e^{-4x}\left(\int-4xe^{4x}dx+C\right)\\&=e^{-4x}\left(-xe^{4x}+\frac{1}{4}e^{4x}+C\right)=-x+\frac{1}{4}+Ce^{-4x}.\end{aligned}$$

故原方程的通解为

$$y^{-4}=-x+\frac{1}{4}+Ce^{-4x}.$$

(5) 原方程可写成 $y'-\frac{1}{x}y=(1+\ln x)y^3$，即 $y^{-3}y'-\frac{1}{x}y^{-2}=1+\ln x$，令 $z=y^{-2}$，则 $z'=-2y^{-3}y'$，且原方程化为

$$z'+\frac{2}{x}z=-2(1+\ln x).$$

$$\begin{aligned}z&=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left[\int-2(1+\ln x)e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right]\\&=x^{-2}\left[\int-2(1+\ln x)x^2dx+C\right]\\&=x^{-2}\left[-\frac{2}{3}x^3(1+\ln x)+\frac{2}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{x}dx+C\right]\\&=x^{-2}\left[-\frac{2}{3}x^3(1+\ln x)+\frac{2}{9}x^3+C\right]\\&=-\frac{2}{3}x(1+\ln x)+\frac{2}{9}x+Cx^{-2}.\end{aligned}$$

故原方程通解为

$$y^{-2}=-\frac{2}{3}x(1+\ln x)+\frac{2}{9}x+Cx^{-2},$$

或写成
$$\frac{x^2}{y^2}=-\frac{4}{9}x^3-\frac{2}{3}x^3\ln x+C.$$

8. 验证形如 $yf(xy)\mathrm{d}x+xg(xy)\mathrm{d}y=0$ 的微分方程,可经变量代换 $v=xy$ 化为可分离变量的方程,并求其通解.

解 由 $v=xy$,即 $y=\frac{v}{x}$,得 $\mathrm{d}y=\frac{x\mathrm{d}v-v\mathrm{d}x}{x^2}$.

又原方程改写成 $xyf(xy)\mathrm{d}x+x^2g(xy)\mathrm{d}y=0$,

并将 $v=xy,\mathrm{d}y=\frac{x\mathrm{d}v-v\mathrm{d}x}{x^2}$代入上式,有

$$vf(v)\mathrm{d}x+g(v)(x\mathrm{d}v-v\mathrm{d}x)=0,$$

可分离变量,得

$$\frac{g(v)\mathrm{d}v}{v[f(v)-g(v)]}+\frac{\mathrm{d}x}{x}=0.$$

积分得

$$\int\frac{g(v)\mathrm{d}v}{v[f(v)-g(v)]}+\ln x=C,$$

代入 $v=xy$ 后,便是原方程的通解.

9. 用适当的变量代换将下列方程化为可分离变量的方程,然后求出通解:

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2$;　　(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x-y}+1$;

(3) $xy'+y=y(\ln x+\ln y)$;

(4) $y'=y^2+2(\sin x-1)y+\sin^2x-2\sin x-\cos x+1$;

(5) $y(xy+1)\mathrm{d}x+x(1+xy+x^2y^2)\mathrm{d}y=0$.

解 (1) 令 $u=x+y$,则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,且原方程变为$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u^2+1$,分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\mathrm{d}x.$$

积分得
$$\arctan u=x+C,$$

即
$$u=\tan(x+C),$$

代入 $u=x+y$,得原方程的通解 $y=-x+\tan(x+C)$.

(2) 令 $u=x-y$,则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,且原方程变为$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{u}$,即

$$u\mathrm{d}u+\mathrm{d}x=0$$

积分得
$$\frac{u^2}{2}+x=C_1,$$

代入 $u=x-y$,得原方程的通解 $(x-y)^2+2x=C \quad (C=2C_1)$.

(3) 令 $u=xy$,则 $u'=y+xy'$,且原方程变为 $u'=\frac{u}{x}\ln u$,即

$$\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

积分得
$$\ln(\ln u)=\ln x+\ln C,$$
即
$$u=\mathrm{e}^{Cx}.$$
代入 $u=xy$,得原方程的通解 $xy=\mathrm{e}^{Cx}$,即 $y=\frac{\mathrm{e}^{Cx}}{x}$.

(4) 将原方程写成 $y'=(y+\sin x-1)^2-\cos x$,令 $u=y+\sin x-1$,则 $u'=y'+\cos x$,且原方程变为 $u'=u^2$,即

$$\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=\mathrm{d}x.$$

积分得
$$-\frac{1}{u}=x+C,$$
即
$$u=-\frac{1}{x+C}.$$
代入 $u=y+\sin x-1$,得原方程的通解

$$y=1-\sin x-\frac{1}{x+C}.$$

(5) 原方程改写成 $xy(xy+1)+x^2(1+xy+x^2y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$. 令 $u=xy$,即 $y=\frac{u}{x}$,则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u}{x^2}$,且原方程变为

$$u(u+1)+(1+u+u^2)\left(x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u\right)=0,$$

整理并分离变量,得 $\frac{1+u+u^2}{u^3}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

积分得
$$-\frac{1}{2u^2}-\frac{1}{u}+\ln u=\ln x+C_1$$
代入 $u=xy$,并整理,得原方程的通解为
$$2x^2y^2\ln y-2xy-1=Cx^2y^2 \quad (C=2C_1).$$

习　题　12－5

1. 判别下列方程中哪些是全微分方程,并求全微分方程的通解:

(1) $(3x^2+6xy^2)\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^2)\mathrm{d}y=0$;

(2) $(a^2-2xy-y^2)dx-(x+y)^2dy=0$;

(3) $e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$;

(4) $(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$;

(5) $(x^2-y)dx-xdy=0$;

(6) $y(x-2y)dx-x^2dy=0$;

(7) $(1+e^{2\theta})d\rho+2\rho e^{2\theta}d\theta=0$;

(8) $(x^2+y^2)dx+xydy=0$.

说明

① 在单连通区域内,若 $P(x,y)$、$Q(x,y)$有连续的偏导数,则$\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$是方程$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$为全微分方程的充要条件.本题利用这一条件来判别方程是否为全微分方程.

② 在条件$\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$下,有 $u=u(x,y)$,满足 $du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$,则 $u(x,y)=C$是方程的通解.函数 $u(x,y)$可由两种方法求得,其一为曲线积分法,其二为凑微分法.下面兼用此二法来求解全微分方程.

解 (1) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=(3x^2+6xy^2)'_y=12xy$;$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=(6x^2y+4y^2)'_x=12xy$,

因$\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x P(x,0)dx+\int_0^y Q(x,y)dy\\&=\int_0^x 3x^2dx+\int_0^y(6x^2y+4y^2)dy=x^3+3x^2y^2+\frac{4}{3}y^3,\end{aligned}$$

故所求通解为 $$x^3+3x^2y^2+\frac{4}{3}y^3=C.$$

(2) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=(a^2-2xy-y^2)'_y=-2x-2y$;$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=[-(x+y)^2]'_x=-2(x+y)$,

因$\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x P(x,0)dx+\int_0^y Q(x,y)dy\\&=\int_0^x a^2dx-\int_0^y(x+y)^2dy=a^2x-\frac{1}{3}(x+y)^3+\frac{1}{3}x^3\\&=a^2x-x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3,\end{aligned}$$

故所求通解为

$$a^2x-x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3=C.$$

(3) $\frac{\partial P}{\partial y}=(e^y)'_y=e^y$；$\frac{\partial Q}{\partial x}=(xe^y-2y)'_x=e^y$，因$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$，故原方程是全微分方程.下面用凑微分法求通解：

由 $e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$

$\Rightarrow$ $(e^y dx+xe^y dy)-2ydy=0$

$\Rightarrow$ $d(xe^y)-d(y^2)=0$

$\Rightarrow$ $d(xe^y-y^2)=0$，

故所求通解为

$$xe^y-y^2=C.$$

(4) 将原方程改写成

$$(\sin y-y\sin x)dx+(x\cos y+\cos x)dy=0$$

$\frac{\partial P}{\partial y}=(\sin y-y\sin x)'_y=\cos y-\sin x$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=(x\cos y+\cos x)'_x=\cos y-\sin x$，因$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$，故原方程是全微分方程.

由 $(\sin y-y\sin x)dx+(x\cos y+\cos x)dy=0$

$\Rightarrow$ $(\sin y dx+x\cos y dy)+(-y\sin x dx+\cos x dy)=0$

$\Rightarrow$ $d(x\sin y)+d(y\cos x)=0$

$\Rightarrow$ $d(x\sin y+y\cos x)=0$，

故所求通解为

$$x\sin y+y\cos x=C.$$

(5) $\frac{\partial P}{\partial y}=(x^2-y)'_y=-1$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=(-x)'_x=-1$，因$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$，故原方程是全微分方程.

由 $(x^2-y)dx-xdy=0$

$\Rightarrow$ $x^2dx-(ydx+xdy)=0$

$\Rightarrow$ $d\left(\frac{x^3}{3}\right)-d(xy)=0$

$\Rightarrow$ $d\left(\frac{x^3}{3}-xy\right)=0$，

故所求通解为

$$\frac{x^3}{3}-xy=C.$$

(6) $\frac{\partial P}{\partial y}=[y(x-2y)]'_y=x-4y$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=(-x^2)'_x=-2x$.因$\frac{\partial P}{\partial y}\not\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$，故原方程不是全微分方程.

(7) $\frac{\partial P}{\partial \theta}=(1+e^{2\theta})'_\theta=2e^{2\theta}$，$\frac{\partial Q}{\partial \rho}=(2\rho e^{2\theta})'_\rho=2e^{2\theta}$，因$\frac{\partial P}{\partial \theta}\equiv\frac{\partial Q}{\partial \rho}$，故原方程是全

微分方程.

由 $$(1+e^{2\theta})d\rho+2\rho e^{2\theta}d\theta=0$$

$\Rightarrow$ $$d\rho+(e^{2\theta}d\rho+2\rho e^{2\theta}d\theta)=0$$

$\Rightarrow$ $$d\rho+d(\rho e^{2\theta})=0$$

$\Rightarrow$ $$d(\rho+\rho e^{2\theta})=0,$$

故所求通解为

$$\rho+\rho e^{2\theta}=C.$$

(8) $\frac{\partial P}{\partial y}=(x^2+y^2)'_y=2y,\frac{\partial Q}{\partial x}=(xy)'_x=y$,因$\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$,故原方程不是全微分方程.

2. 利用观察法求出下列方程的积分因子,并求其通解:

(1) $(x+y)(dx-dy)=dx+dy$;

(2) $ydx-xdy+y^2xdx=0$;

(3) $y^2(x-3y)dx+(1-3y^2x)dy=0$;

(4) $xdx+ydy=(x^2+y^2)dx$;

(5) $(x-y^2)dx+2xydy=0$;

(6) $2ydx-3xy^2dx-xdy=0$.

解 (1) 用 $\mu=\frac{1}{x+y}$乘方程的两端,得

$$dx-dy=\frac{dx+dy}{x+y}$$

$\Rightarrow$ $$dx-dy-\frac{d(x+y)}{x+y}=0$$

$\Rightarrow$ $$d[x-y-\ln(x+y)]=0,$$

故通解为

$$x-y-\ln(x+y)=C.$$

(2) 用 $\mu=\frac{1}{y^2}$乘方程的两端,得

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}+xdx=0$$

$\Rightarrow$ $$d\left(\frac{x}{y}\right)+d\left(\frac{x^2}{2}\right)=0$$

$\Rightarrow$ $$d\left(\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}\right)=0,$$

故通解为

$$\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=C.$$

(3) 用 $\mu=\frac{1}{y^2}$乘方程的两端，得

$$(x-3y)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{y^2}-3x\right)\mathrm{d}y=0$$

$$\Rightarrow \qquad x\mathrm{d}x-(3y\mathrm{d}x+3x\mathrm{d}y)+\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=0$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)-\mathrm{d}(3xy)+\mathrm{d}\left(-\frac{1}{y}\right)=0$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}-3xy-\frac{1}{y}\right)=0,$$

故通解为
$$\frac{x^2}{2}-3xy-\frac{1}{y}=C.$$

(4) 用 $\mu=\frac{1}{x^2+y^2}$乘方程的两端，得

$$\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}-\mathrm{d}x=0$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-x\right]=0,$$

故通解为
$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-x=C_1,\text{即}$$

$$x^2+y^2=Ce^{2x}\quad (C=e^{2C_1}).$$

(5) 用 $\mu=\frac{1}{x^2}$乘方程的两端，得

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x+\frac{2y}{x}\mathrm{d}y=0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{x}\mathrm{d}x+\left[y^2\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\mathrm{d}(y^2)\right]=0$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}(\ln x)+\mathrm{d}\left(\frac{y^2}{x}\right)=0$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}\left(\ln|x|+\frac{y^2}{x}\right)=0,$$

故通解为
$$\ln|x|+\frac{y^2}{x}=C.$$

(6) 用 $\mu=\frac{x}{y^2}$乘方程的两端，得

$$\frac{2x}{y}\mathrm{d}x-3x^2\mathrm{d}x-\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}y=0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d(x^2)}{y} + x^2 d\left(\frac{1}{y}\right) - d(x^3) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad d\left(\frac{x^2}{y}\right) - d(x^3) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad d\left(\frac{x^2}{y} - x^3\right) = 0,$$

故通解为
$$\frac{x^2}{y} - x^3 = C.$$

3．验证$\dfrac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}$是微分方程 $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$ 的积分因子，并求下列方程的通解：

(1) $y(x^2y^2+2)dx + x(2-2x^2y^2)dy = 0$;

(2) $y(2xy+1)dx + x(1+2xy-x^3y^3)dy = 0$.

解　原方程两端乘以$\dfrac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}$后，得

$$\frac{f(xy)}{x[f(xy)-g(xy)]}dx + \frac{g(xy)}{y[f(xy)-g(xy)]}dy = 0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{1}{x}\cdot\frac{xf'(xy)[f(xy)-g(xy)] - f(xy)[f'(xy)-g'(xy)]x}{[f(xy)-g(xy)]^2}\\ &= \frac{f(xy)g'(xy) - f'(xy)g(xy)}{[f(xy)-g(xy)]^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{1}{y}\cdot\frac{yg'(xy)[f(xy)-g(xy)] - g(xy)[f'(xy)-g'(xy)]y}{[f(xy)-g(xy)]^2}\\ &= \frac{g'(xy)f(xy) - g(xy)f'(xy)}{[f(xy)-g(xy)]^2},\end{aligned}$$

因$\dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x}$，故方程(1)是全微分方程，说明$\dfrac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}$是原方程的积分因子.

(1) 方程中 $x^2y^2+2 = f(xy)$，$2-2x^2y^2 = g(xy)$，由上说明知$\dfrac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]} = \dfrac{1}{3x^3y^3}$是方程的积分因子，原方程两端乘以该因子后成为

$$\frac{(x^2y^2+2)}{3x^3y^2}dx + \frac{(2-2x^2y^2)}{3x^2y^3}dy = 0.$$

用曲线积分法求 $u(x,y)$，并取$(x_0,y_0) = (1,1)$.

$$\begin{aligned}u(x,y) &= \int_1^x \frac{x^2+2}{3x^3}dx + \int_1^y \frac{2-2x^2y^2}{3x^2y^3}dy\\ &= \frac{1}{3}\int_1^x \frac{1}{x}dx + \frac{2}{3}\int_1^x \frac{1}{x^3}dx + \frac{2}{3x^2}\int_1^y \frac{1}{y^3}dy - \frac{2}{3}\int_1^y \frac{dy}{y}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{3}\ln x-\left(\frac{1}{3}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3x^2}\left(\frac{1}{y^2}-1\right)-\frac{2}{3}\ln y$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln x-\ln y^2-\frac{1}{x^2y^2}+1\right).$$

故通解为 $\ln\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x^2y^2}=C$,或写成

$$x=Cy^2e^{\frac{1}{x^2y^2}}.$$

(2) 方程中 $2xy+1=f(xy)$, $1+2xy-x^3y^3=g(xy)$, 则 $\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}=\frac{1}{x^4y^4}$ 是积分因子. 原方程两端乘以该因子后成为 $\frac{y(2xy+1)}{x^4y^4}dx+\frac{x(1+2xy-x^3y^3)}{x^4y^4}dy=0$,即

$$\left(\frac{2}{x^3y^2}+\frac{1}{x^4y^3}\right)dx+\left(\frac{1}{x^3y^4}+\frac{2}{x^2y^3}-\frac{1}{y}\right)dy=0$$

$$\Rightarrow\quad\left(\frac{2}{x^3y^2}dx+\frac{2}{x^2y^3}dy\right)+\left(\frac{1}{x^4y^3}dx+\frac{1}{x^3y^4}dy\right)-\frac{1}{y}dy=0$$

$$\Rightarrow\quad-\left[\frac{1}{y^2}d\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x^2}d\left(\frac{1}{y^2}\right)\right]-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{y^3}d\left(\frac{1}{x^3}\right)+\frac{1}{x^3}d\left(\frac{1}{y^3}\right)\right]-d(\ln|y|)=0$$

$$\Rightarrow\quad d\left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{y^2}\right)+\frac{1}{3}d\left(\frac{1}{x^3}\cdot\frac{1}{y^3}\right)+d(\ln|y|)=0$$

$$\Rightarrow\quad d\left(\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{3x^3y^3}+\ln|y|\right)=0,$$

故通解为 $\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{3x^3y^3}+\ln|y|=C_1$,或写成

$$\frac{3xy+1}{x^3y^3}+3\ln|y|=C.$$

4. 用积分因子法解下列一阶线性方程:

(1) $xy'+2y=4\ln x$;　　(2) $y'-\tan x\cdot y=x$.

解 (1) 将原方程写成 $y'+\frac{2}{x}y=\frac{4\ln x}{x}$,此方程两端乘以 $\mu=e^{\int\frac{2}{x}dx}=x^2$ 后变成 $x^2y'+2xy=4x\ln x$,即

$$(x^2y)'=4x\ln x.$$

$$\Rightarrow\quad x^2y=\int 4x\ln x\,dx=2x^2\ln x-x^2+C,$$

故原方程的通解为

$$y=2\ln x-1+\frac{C}{x^2}.$$

(2) 方程两端乘以 $\mu = e^{-\int \tan x dx} = \cos x$，则方程变为

$$\cos xy' - \sin xy = x\cos x$$

$$\Rightarrow \qquad (y\cos x)' = x\cos x$$

$$\Rightarrow \qquad y\cos x = \int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

故原方程的通解为 $\qquad y = x\tan x + 1 + \dfrac{C}{\cos x}$.

习 题 12－6

1．求下列各微分方程的通解：

(1) $y'' = x + \sin x$； (2) $y''' = xe^x$；

(3) $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$； (4) $y'' = 1 + y'^2$；

(5) $y'' = y' + x$； (6) $xy'' + y' = 0$；

(7) $yy'' + 1 = y'^2$； (8) $y^3y'' - 1 = 0$；

(9) $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$； (10) $y'' = (y')^3 + y'$.

解 (1) $y' = \int (x + \sin x)dx = \dfrac{x^2}{2} - \cos x + C_1$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} - \cos x + C_1\right)dx = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1x + C_2.$$

(2) $y'' = \int xe^x dx = xe^x - e^x + C_1' = (x-1)e^x + C_1'$

$$y' = \int [(x-1)e^x + C_1']dx = (x-1)e^x - \int e^x dx + C_1'x + C_2$$

$$= (x-2)e^x + C_1'x + C_2$$

$$y = \int [(x-2)e^x + C_1'x + C_2]dx = (x-2)e^x - \int e^x dx + \frac{C_1'}{2}x^2 + C_2x + C_3$$

$$= (x-3)e^x + C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

(3) $y' = \int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C_1$

$$y = \int (\arctan x + C_1)dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx + C_1x$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1x + C_2.$$

(4) 令 $y' = p$，则 $y'' = p'$，且原方程化为 $p' = 1 + p^2$. 分离变量，得

$$\frac{dp}{1+p^2}=dx,$$

积分得 $$\arctan p=x+C_1$$

即 $$p=y'=\tan(x+C_1),$$

再积分得通解 $y=\int\tan(x+C_1)dx=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2$

(5) 令 $y'=p$,则 $y''=p'$,且原方程可化为

$$p'-p=x.$$

利用一阶线性方程的求解公式,得

$$\begin{aligned}p&=e^{\int dx}\left(\int xe^{-\int dx}dx+C_1\right)=e^x\left(\int xe^{-x}dx+C_1\right)\\&=e^x(-xe^{-x}-e^{-x}+C_1)=-x-1+C_1e^x\end{aligned}$$

积分得通解

$$y=\int(C_1e^x-x-1)dx=C_1e^x-\frac{x^2}{2}-x+C_2.$$

(6) 令 $y'=p$,则 $y''=p'$,且原方程化为 $xp'+p=0$,分离变量,得

$$\frac{dp}{p}=-\frac{dx}{x},$$

积分得 $\ln p=\ln\frac{1}{x}+\ln C_1,$

即 $$p=\frac{C_1}{x}$$

再积分,得通解 $$y=\int\frac{C_1}{x}dx=C_1\ln x+C_2.$$

(7) 令 $y'=p$,则 $y''=p'=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p$,且原方程化为 $yp\frac{dp}{dy}+1=p^2$.分离变量,得

$$\frac{p\,dp}{p^2-1}=\frac{dy}{y} \tag{1}$$

1° 当 $|y'|=|p|>1$ 时,解方程(1)得

$$\frac{1}{2}\ln(p^2-1)=\ln y+\ln C_1\quad(C_1>0),$$

即 $$p^2-1=(C_1y)^2,$$

故 $$\frac{dy}{dx}(=p)=\pm\sqrt{1+(C_1y)^2}.$$

分离变量,得 $$\frac{dy}{\sqrt{1+(C_1y)^2}}=\pm dx,$$

积分得 $$\operatorname{arsh}(C_1 y)=\pm C_1 x+C_2$$

即 $$y=\frac{1}{C_1}\operatorname{sh}(\pm C_1 x+C_2)$$

$$=\pm\frac{1}{C_1}\operatorname{sh}(C_1 x+C_2),$$

其中当 $y'>1$ 时取"+";当 $y'<-1$ 时取"-".

2° 当 $|y'|=|p|<1$ 时,解方程(1)得

$$\frac{1}{2}\ln(1-p^2)=\ln y+\ln C_1(C_1>0),$$

即 $$1-p^2=(C_1 y)^2.$$

故 $$\frac{dy}{dx}(=p)=\pm\sqrt{1-(C_1 y)^2},$$

分离变量并积分,得

$$\arcsin(C_1 y)=\pm(C_1 x+C_2)$$

即 $$y=\pm\frac{1}{C_1}\sin(C_1 x+C_2).$$

(8) 令 $y'=p$,则 $y''=p\frac{dp}{dy}$,且原方程化为 $y^3 p\frac{dp}{dy}-1=0$.分离变量,得

$$p\,dp=\frac{1}{y^3}dy,$$

积分得 $$p^2=-\frac{1}{y^2}+C_1,$$

故 $$y'=p=\pm\sqrt{C_1-\frac{1}{y^2}}=\pm\frac{1}{|y|}\sqrt{C_1 y^2-1}.$$

分离变量,得 $$\frac{|y|\,dy}{\sqrt{C_1 y^2-1}}=\pm dx.$$

由于 $|y|=y\operatorname{sgn}(y)$,故上式两端积分,

$$\operatorname{sgn}(y)\int\frac{y\,dy}{\sqrt{C_1 y^2-1}}=\pm\int dx,$$

$$\operatorname{sgn}(y)\sqrt{C_1 y^2-1}=\pm C_1 x+C_2.$$

两边平方,得 $$C_1 y^2-1=(C_1 x+C_2)^2.$$

(9) 说明 方程 $y''=\frac{1}{\sqrt{y}}$ 属于 $y''=f(y)$ 型方程,除了用设 $y'=p,y''=p\frac{dp}{dy}$ 的降阶求解法外,还可以用如下方法求解:

在 $y''=f(x)$ 的两端乘以 $2y'$,得

$$2y'y''=2f(y)y',即$$

$$(y'^2)'=2f(y)y'.$$

若 $F(y)$是 $f(y)$的原函数,则有

$$(y'^2)'=2[F(y)]'.$$

积分得到降阶的方程 $y'^2=2F(y)+C_1$.

本小题按上述方法求解:用 $2y'$乘方程 $y''=\frac{1}{\sqrt{y}}$的两端,得

$$2y'y''=\frac{2y'}{\sqrt{y}}$$

即 $$(y'^2)'=(4\sqrt{y})',$$

故 $$y'^2=4\sqrt{y}+C_1',$$

有 $$y'=\pm 2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}.\left(C_1=\frac{C_1'}{4}\right)$$

分离变量,得 $$dx=\pm\frac{dy}{2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}.$$

积分,得 $$x=\pm\int\frac{d(\sqrt{y})^2}{2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}=\pm\int\frac{\sqrt{y}d\sqrt{y}}{\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}=\pm\int\frac{(\sqrt{y}+C_1)-C_1}{\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}d(\sqrt{y})$$

$$=\pm\left[\int\sqrt{\sqrt{y}+C_1}d(\sqrt{y}+C_1)-C_1\int\frac{1}{\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}d(\sqrt{y}+C_1)\right]$$

$$=\pm\left[\frac{2}{3}(\sqrt{y}+C_1)^{\frac{3}{2}}-2C_1(\sqrt{y}+C_1)^{\frac{1}{2}}\right]+C_2.$$

(10) 令 $y'=p$,则 $y''=p\frac{dp}{dy}$,原方程化为 $p\frac{dp}{dy}=p^3+p$,即

$$p\left[\frac{dp}{dy}-(1+p^2)\right]=0.$$

若 $p\equiv0$,则 $y\equiv C$. $y\equiv C$ 是原方程的解,但不是通解.

若 $p\neq0$,由于 p 的连续性,必在 x 的某区间由 $p\neq0$. 于是

$$\frac{dp}{dy}-(1+p^2)=0.$$

分离变量,得 $$\frac{dp}{1+p^2}=dy,$$

积分得 $$\arctan p=y-C_1,$$

即 $$p=\tan(y-C_1),$$

亦即 $$\cot(y-C_1)dy=dx.$$

积分得 $$\ln\sin(y-C_1)=x+\ln C_2.$$

即 $$\sin(y-C_1)=C_2e^x,$$

也可写成 $$y=\arcsin(C_2e^x)+C_1,$$

由于当 $C_2=0$ 时，$y=C_1$，故前面所得的解 $y\equiv C$ 也包含在这个通解之内.

2. 求下列各微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $y^3y''+1=0,y|_{x=1}=1,y'|_{x=1}=0$；

(2) $y''-ay'^2=0,y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=-1$；

(3) $y'''=e^{ax},y|_{x=1}=y'|_{x=1}=y''|_{x=1}=0$；

(4) $y''=e^{2y},y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$；

(5) $y''=3\sqrt{y},y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=2$；

(6) $y''+(y')^2=1,y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=0$.

解 (1) 将原方程写成 $y''+\dfrac{1}{y^3}=0$，两端乘以 $2y'$，得

$$2y'y''+\frac{2y'}{y^3}=0$$

即 $$\left(y'^2-\frac{1}{y^2}\right)'=0.$$

由此得

$$y'^2-\frac{1}{y^2}=C_1$$

代入初始条件 $y=1,y'=0$，得 $C_1=-1$，故有

$$y'^2=\frac{1}{y^2}-1=\frac{1-y^2}{y^2},$$

$$y'=\pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y},$$

分离变量，得

$$\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\pm\mathrm{d}x,$$

积分得 $$-\sqrt{1-y^2}=\pm x+C_2.$$

代入初始条件 $x=1,y=1$，得 $C=\mp1$. 于是有

$$-\sqrt{1-y^2}=\pm(x-1).$$

两边平方，得 $$x^2+y^2=2x.$$

由于在点 $x=1$ 处，$y=1$，故在 $x=1$ 的某邻域内 $y>0$，因而特解可表示为

$$y=\sqrt{2x-x^2}.$$

(2) 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，原方程化为 $p'-ap^2=0$，分离变量即

$$\frac{\mathrm{d}p}{p^2}=a\mathrm{d}x,$$

积分得
$$-\frac{1}{p}=ax+C_1.$$
代入初始条件 $x=0,p=y'=-1$，得 $C_1=1$. 从而有 $-\frac{1}{y'}=ax+1$，即
$$y'=-\frac{1}{ax+1},$$
又积分得
$$y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)+C_2.$$
代入初始条件 $y|_{x=0}=0$，得 $C_2=0$，故所求特解为
$$y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1).$$
(3) 因 $y'''=e^{ax}$，并由初始条件 $x=1,y''=0$，故积分得
$$y''=\int_1^x y'''\mathrm{d}x=\int_1^x e^{ax}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}(e^{ax}-e^{a}).$$
又因 $x=1$ 时，$y'=0$，故积分得
$$\begin{aligned}y'&=\int_1^x y''\mathrm{d}x=\int_1^x\frac{1}{a}(e^{ax}-e^{a})\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}(e^{ax}-e^{a})-e^{a}(x-1)\right]\\&=\frac{1}{a^2}e^{ax}-\frac{e^{a}}{a}x+\frac{e^{a}}{a}\left(1-\frac{1}{a}\right).\end{aligned}$$
又因 $x=1$ 时，$y=0$，故再积分得
$$\begin{aligned}y&=\int_1^x y'\mathrm{d}x=\int_1^x\left[\frac{1}{a^2}e^{ax}-\frac{e^{a}}{a}x+\frac{e^{a}}{a}\left(1-\frac{1}{a}\right)\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{a^3}(e^{ax}-e^{a})-\frac{e^{a}}{2a}(x^2-1)+\frac{e^{a}}{a}\left(1-\frac{1}{a}\right)(x-1)\\&=\frac{1}{a^3}e^{ax}-\frac{e^{a}}{2a}x^2+\frac{e^{a}}{a^2}(a-1)x+\frac{e^{a}}{2a^3}(2a-a^2-2).\end{aligned}$$
(4) 在原方程两端同乘以 $2y'$，得 $2y'y''=2y'e^{2y}$，即 $(y'^2)'=(e^{2y})'$，
积分得
$$y'^2=e^{2y}+C_1.$$
代入初始条件 $x=0,y'=0$，得 $C_1=-1$，从而有
$$y'=\pm\sqrt{e^{2y}-1}.$$
分离变量后积分
$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{e^{2y}-1}}=\pm\int\mathrm{d}x$$
即
$$\int\frac{\mathrm{d}(e^{-y})}{\sqrt{1-e^{-2y}}}=\mp\int\mathrm{d}x$$
得
$$\arcsin(e^{-y})=\mp x+C_2$$

代入初始条件 $x=0,y=0$,得 $C_2=\frac{\pi}{2}$.于是得特解

$$e^{-y}=\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\cos x,$$

即 $$y=-\ln\cos x=\ln\sec x.$$

(5) 在原方程两端同乘以 $2y'$,得 $2y'y''=6y'\sqrt{y}$,即 $(y'^2)'=(4y^{\frac{3}{2}})'$,

积分得 $$y'^2=4y^{\frac{3}{2}}+C_1.$$

代入初始条件 $x=0,y'=2$,得 $C_1=0$,从而有 $y'=\pm 2y^{\frac{3}{4}}$.并由于 $y'|_{x=0}=2$,

故取 $$y'=2y^{\frac{3}{4}}.$$

分离变量后积分 $$\int\frac{dy}{y^{\frac{3}{4}}}=2\int dx$$

得 $$4y^{\frac{1}{4}}=2x+C_2.$$

代入初始条件 $x=0,y=1$,得 $C_2=4$,于是得特解

$$y=\left(\frac{x}{2}+1\right)^4.$$

(6) 令 $y'=p$,则 $y''=p\frac{dp}{dy}$,原方程变为 $p\frac{dp}{dy}+p^2=1$.分离变量,得

$$\frac{pdp}{1-p^2}=dy.$$

由初始条件:$y=0$ 时,$p=0$,取积分

$$\int_0^p\frac{pdp}{1-p^2}=\int_0^y dy$$

得 $$-\frac{1}{2}\ln(1-p^2)=y$$

即 $$p=\pm\sqrt{1-e^{-2y}}.$$

又分离变量,得 $$\frac{dy}{\sqrt{1-e^{-2y}}}=\pm dx.$$

由初始条件:$x=0$ 时,$y=0$.取积分

$$\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{1-e^{-2y}}}=\pm\int_0^x dx,$$

$$\int_0^y\frac{d(e^y)}{\sqrt{e^{2y}-1}}=\pm\int_0^x dx,$$

得 $$\operatorname{arch}(e^y)=\pm x,$$

即 $$e^y=\operatorname{ch}(\pm x)=\operatorname{ch}x,$$

或写成 $$y=\ln\operatorname{ch}x.$$

3. 试求 $y''=x$ 的经过点 $M(0,1)$ 且在此点与直线 $y=\frac{x}{2}+1$ 相切的积分曲线.

解 由于直线 $y=\frac{x}{2}+1$ 在 $(0,1)$ 处的切线斜率为 $\frac{1}{2}$，依题设知，所求积分曲线是初值问题

$$y''=x,\quad y|_{x=0}=1,\quad y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$$

的解. 由 $y''=x$，积分得 $y'=\frac{x^2}{2}+C_1$.

代入 $x=0, y'=\frac{1}{2}$，得 $C_1=\frac{1}{2}$，即有

$$y'=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}.$$

再积分，得

$$y=\frac{x^3}{6}+\frac{x}{2}+C_2,$$

代入 $x=0, y=1$，得 $C_2=1$，于是所求积分曲线的方程为

$$y=\frac{x^3}{6}+\frac{x}{2}+1.$$

4. 设有一质量为 m 的物体，在空中由静止开始下落，如果空气阻力为 $R=c^2v^2$（其中 c 为常数，v 为物体运动的速度），试求物体下落的距离 s 与时间 t 的函数关系.

解 根据物理学知识得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-C^2v^2,$$

依题设，有初值问题

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g-k^2v^2, v|_{t=0}=0\left(k=\frac{C}{\sqrt{m}}\right).$$

分离变量后积分

$$\int\frac{\mathrm{d}v}{g-k^2v^2}=\mathrm{d}t$$

得

$$t+C_1=\int\frac{\mathrm{d}v}{(\sqrt{g}-kv)(\sqrt{g}+kv)}=\frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\int\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{g}-kv}+\int\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{g}+kv}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{g}k}\ln\frac{\sqrt{g}+kv}{\sqrt{g}-kv}.$$

代入初始条件 $t=0, v=0$，得 $C_1=0$. 于是得

$$\ln\frac{\sqrt{g}+kv}{\sqrt{g}-kv}=2\sqrt{g}\,kt,$$

即 $$\frac{\sqrt{g}+kv}{\sqrt{g}-kv}=e^{2\sqrt{g}kt},$$

亦即 $$v=\frac{\sqrt{g}}{k}\frac{e^{2\sqrt{g}kt}-1}{e^{2\sqrt{g}kt}+1}=\frac{\sqrt{g}}{k}\frac{e^{\sqrt{g}kt}-e^{-\sqrt{g}kt}}{e^{\sqrt{g}kt}+e^{-\sqrt{g}kt}}=\frac{\sqrt{g}}{k}\operatorname{th}(\sqrt{g}\,kt).$$

因 $v=s'(t)$，故对上式作积分，得

$$s(t)=\frac{\sqrt{g}}{k}\int\operatorname{th}(\sqrt{g}\,kt)\mathrm{d}t=\frac{1}{k^2}\int\operatorname{th}(\sqrt{g}\,kt)\mathrm{d}\sqrt{g}\,kt)$$
$$=\frac{1}{k^2}\ln\operatorname{ch}(\sqrt{g}\,kt)+C_2$$

代入初始条件 $t=0,s=0$，得 $C_2=0$. 于是

$$s(t)=\frac{1}{k^2}\ln\operatorname{ch}(\sqrt{g}\,kt)=\frac{m}{C^2}\ln\operatorname{ch}\left(C\sqrt{\frac{g}{m}}t\right).$$

习 题 12－7

1. 下列函数组在其定义区间内哪些是线性无关的?

(1) x,x^2; (2) $x,2x$;

(3) $e^{2x},3e^{2x}$; (4) e^{-x},e^{x};

(5) $\cos 2x,\sin 2x$; (6) e^{x^2},xe^{x^2};

(7) $\sin 2x,\cos x\sin x$; (8) $e^x\cos 2x,e^x\sin 2x$;

(9) $\ln x,x\ln x$; (10) $e^{ax},e^{bx}(a\neq b)$.

解 对于两个函数构成的函数组，如果两函数的比为常数，则它们是线性相关的，否则就线性无关，因此本题中除了

(2) $\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$; (3) $\frac{e^{2x}}{3e^{2x}}=\frac{1}{3}$; (7) $\frac{\sin 2x}{\cos x\sin x}=2$,

即(2)(3)(7)中的函数组线性相关外，其余的7个函数组中两函数之比不是常数，从而线性无关.

2. 验证 $y_1=\cos\omega x$ 及 $y_2=\sin\omega x$ 都是方程 $y''+\omega^2y=0$ 的解，并写出该方程的通解.

解 由 $y_1=\cos\omega x$，得 $y_1'=-\omega\sin\omega x,y_1''=-\omega^2\cos\omega x$;

由 $y_2=\sin\omega x$，得 $y_2'=\omega\cos\omega x,y_2''=-\omega^2\sin\omega x$;

可见 $$y_i''+\omega^2y_i=0,(i=1,2),$$

故 y_1 与 y_2 都是方程 $y''+\omega^2y=0$ 的解.

又因 $\frac{y_1}{y_2}=\cot\omega x\neq$ 常数，故 y_1 与 y_2 线性无关. 于是方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x .$$

3．验证 $y_1 = e^{x^2}$ 及 $y_2 = x e^{x^2}$ 都是方程 $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$ 的解，并写出该方程的通解.

解 由 $y_1 = e^{x^2}$，得 $y_1' = 2x e^{x^2}$，$y_1'' = (2 + 4x^2)e^{x^2}$；

由 $y_2 = x e^{x^2}$，得 $y_2' = (1 + 2x^2)e^{x^2}$，$y_2'' = (6x + 4x^3)e^{x^2}$.

因 $y_1'' - 4xy_1' + (4x^2 - 2)y_1 = (2 + 4x^2)e^{x^2} - 4x \cdot 2x e^{x^2} + (4x^2 - 2)e^{x^2} = 0$；

$$y_2'' - 4xy_2' + (4x^2 - 2)y_2 = (6x + 4x^3)e^{x^2} - 4x(1 + 2x^2)e^{x^2} + (4x^2 - 2)x e^{x^2} = 0,$$

故 y_1 与 y_2 都是方程的解.

又因 $\dfrac{y_2}{y_1} = x \neq$ 常数，故 y_1 与 y_2 线性无关，于是方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = (C_1 + C_2 x)e^{x^2} .$$

4．验证：

(1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \dfrac{1}{12}e^{5x}$（$C_1$、$C_2$ 是任意常数）是方程 $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$ 的通解；

(2) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \dfrac{1}{32}(4x\cos x + \sin x)$（$C_1$、$C_2$ 是任意常数）是方程 $y'' + 9y = x\cos x$ 的通解；

(3) $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x$（$C_1$、$C_2$ 是任意常数）是方程 $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ 的通解；

(4) $y = C_1 x^5 + \dfrac{C_2}{x} - \dfrac{x^2}{9}\ln x$（$C_1$、$C_2$ 是任意常数）是方程 $x^2 y'' - 3xy' - 5y \neq x^2 \ln x$ 的通解；

(5) $y = \dfrac{1}{x}(C_1 e^x + C_2 e^{-x}) + \dfrac{e^x}{2}$（$C_1$、$C_2$ 是任意常数）是方程 $xy'' + 2y' - xy = e^x$ 的通解；

(6) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^2$（$C_1$、$C_2$、$C_3$、$C_4$ 是任意常数）是方程 $y^{(4)} - y = x^2$ 的通解.

解 (1) 记 $y_1 = e^x$，$y_2 = e^{2x}$，$y^* = \dfrac{1}{12}e^{5x}$，则

$$y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = e^x - 3e^x + 2e^x = 0;$$

$$y_2'' - 3y_2' + 2y_2 = 4e^{2x} - 6e^{2x} + 2e^{2x} = 0.$$

故 y_1 与 y_2 是原方程对应的齐次方程的解，易见 y_1 与 y_2 是线性无关的.

又因 $y^{*''}-3y^{*'}+2y^{*}=\frac{25}{12}e^{5x}-\frac{15}{12}e^{5x}+\frac{2}{12}e^{5x}=e^{5x}$

故 y^* 是原方程的一个特解.

所以 $y=C_1y_1+C_2y_2+y^*=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$ 是原方程的通解.

(2) 记 $y_1=\cos 3x, y_2=\sin 3x, y^*=\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$.

因

$$y_1''+9y_1=-9\cos 3x+9\cos 3x=0;$$
$$y_2''+9y_2=-9\sin 3x+9\sin 3x=0,$$

故 y_1 与 y_2 是原方程对应的齐次方程的解,易见它们是线性无关的.

又因

$$y^{*'}=\frac{1}{32}(4\cos x-4x\sin x+\cos x)=\frac{1}{32}(5\cos x-4x\sin x),$$
$$y^{*''}=\frac{1}{32}(-5\sin x-4\sin x-4x\cos x)=\frac{1}{32}(-4x\cos x-9\sin x),$$

有 $y^{*''}+9y^*=\frac{1}{32}(-4x\cos x-9\sin x)+\frac{9}{32}(4x\cos x+\sin x)=x\cos x$.

故 y^* 是原方程的一个特解.

所以 $y=C_1y_1+C_2y_2+y^*=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$ 是原方程的通解.

(3) 记 $y_1=x^2, y_2=x^2\ln x$,则

$$y_1'=2x,\quad y_1''=2;\quad y_2'=2x\ln x+x,\quad y_2''=2\ln x+3.$$

且

$$x^2y_1''-3xy_1'+4y_1=x^2\cdot 2-3x\cdot 2x+4x^2=0;$$
$$x^2y_2''-3xy_2'+4y_2=x^2(2\ln x+3)-3x(2x\ln x+x)+4x^2\ln x=0,$$

故 y_1 与 y_2 是方程的解,又因 $\frac{y_2}{y_1}=\ln x\neq$常数,故 y_1 与 y_2 线性无关,所以

$$y=C_1y_1+C_2y_2=C_1x^2+C_2x^2\ln x \text{ 是方程的通解}.$$

(4) 记 $y_1=x^5, y_2=\frac{1}{x}, y^*=-\frac{1}{9}x^2\ln x$,则

$$x^2y_1''-3xy_1'-5y_1=x^2\cdot 20x^3-3x\cdot 5x^4-5x^5=0,$$
$$x^2y_2''-3xy_2'-5y_2=x^2\left(\frac{2}{x^3}\right)-3x\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{5}{x}=0,$$

故 y_1 与 y_2 是原方程对应的齐次方程的解,易见它们是线性无关的.

又因 $x^2y^{*''}-3xy^{*'}-5y^*=x^2\cdot\frac{2\ln x+3}{9}-3x\,\frac{2x\ln x+x}{9}-5\cdot\frac{x^2\ln x}{9}$

$$=x^2\ln x$$

故 y^* 是原方程的一个特解. 所以

$$y=C_1y_1+C_2y_2+y^*=C_1x^5+C_2\frac{1}{x}-\frac{1}{9}x^2\ln x$$ 是原方程的通解.

(5) 记 $y_1=\frac{e^x}{x},y_2=\frac{e^{-x}}{x},y^*=\frac{e^x}{2}$,则

$$y_1'=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^x,y_1''=\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)e^x,$$

$$y_2'=\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^{-x},y_2''=\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)e^{-x},$$

且 $$xy_1''+2y_1'-xy_1=x\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)e^x+2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^x-x\cdot\frac{e^x}{x}=0,$$

$$xy_2''+2y_2'-xy_2=x\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)e^{-x}+2\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^{-x}-x\cdot\frac{e^{-x}}{x}=0,$$

故 y_1 与 y_2 是原方程对应的齐次方程的解,易见它们是线性无关的.

又因 $y^{*\prime}=y^{*\prime\prime}=\frac{e^x}{2}$,且

$$xy^{*\prime\prime}+2y^{*\prime}-xy^*=\frac{x}{2}e^x+e^x-\frac{x}{2}e^x=e^x$$

故 y^* 是原方程的一个特解.所以

$$y=C_1y_1+C_2y_2+y^*=\frac{C_1e^x+C_2e^{-x}}{x}+\frac{e^x}{2}$$

是原方程的通解.

(6) 令 $y_1=e^x,y_2=e^{-x},y_3=\cos x,y_4=\sin x$,易见

$$y_i^{(4)}=y_i,i=1,2,3,4.$$

故 $y_i(i=1,2,3,4)$是原方程对应的齐次方程 $y^{(4)}-y=0$ 的解.

下面说明 $y_i(i=1,2,3,4)$在它们的定义域 $\mathbf{R}$ 中是线性无关的.令

$$k_1e^x+k_2e^{-x}+k_3\cos x+k_4\sin x\equiv0.$$

分别取 $x=0,\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2},\pi$,则有

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3+0=0\\ e^{\frac{\pi}{2}}k_1+e^{-\frac{\pi}{2}}k_2+0+k_4=0\\ e^{-\frac{\pi}{2}}k_1+e^{\frac{\pi}{2}}k_2+0-k_4=0\\ e^{\pi}k_1+e^{-\pi}k_2-k_3+0=0.\end{cases}$$

根据线性代数的知识,经计算,上述齐次线性方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&1&0\\ e^{\frac{\pi}{2}}&e^{-\frac{\pi}{2}}&0&1\\ e^{-\frac{\pi}{2}}&e^{\frac{\pi}{2}}&0&-1\\ e^{\pi}&e^{-\pi}&-1&0\end{vmatrix}\neq0$$

故齐次线性方程组仅有零解　$k_1=0,k_2=0,k_3=0,k_4=0$.

这说明 y_1,y_2,y_3,y_4 是线性无关的.

又令 $y^*=-x^2$,则 $y^{*(4)}=0$,且 $y^{*(4)}-y^*=0-(-x^2)=x^2$,故 y^* 是原方程的一个特解.所以

$$\begin{aligned} y &= C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3+C_4y_4+y^* \\ &= C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x+x^2 \end{aligned}$$

是原方程的通解.

*5. 已知 $y_1(x)=e^x$是齐次线性方程

$$(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$$

的一个解,求此方程的通解.

解　设 $y_2(x)=y_1u=e^xu$ 是方程的解,则 $y_2'=e^x(u+u')$, $y_2''=e^x(u+2u'+u'')$,代入方程并整理,得

$$e^x[(2x-1)u''+(2x-3)u']=0,$$

即

$$(2x-1)u''+(2x-3)u'=0,$$

令 $u'=p$,则 $u''=p'$,且上式成为

$$(2x-1)p'+(2x-3)p=0.$$

分离变量后积分

$$\int\frac{dp}{p}=-\int\frac{2x-3}{2x-1}dx$$

得

$$\ln p=-x+\ln(2x-1)+\ln C'$$

取 $C'=1$,即

$$p=(2x-1)e^{-x}.$$

再积分得　$u=\int(2x-1)e^{-x}dx=-[(2x-1)e^{-x}+2e^{-x}+C'']$,

取 $C''=0$,即

$$u=-(2x+1)e^{-x},$$

故

$$y_2=e^xu=-(2x+1).$$

y_2 与 y_1 线性无关,故原方程的通解为

$$y=C_1(2x+1)+C_2e^x$$

*6. 已知 $y_1(x)=x$ 是齐次线性方程 $x^2y''-2xy'+2y=0$ 的一个解,求非齐次线性方程 $x^2y''-2xy'+2y=2x^3$ 的通解.

解　设 $y_2=y_1u=xu$ 是非齐次线性方程的解,则 $y_2'=u+xu'$, $y_2''=2u'+xu''$,代入方程并整理,得

$$u''=0.$$

不妨取 $u=x$,则 $y_2=y_1u=x^2$,且 y_2 与 y_1 线性无关.

将非齐次方程化为标准形

$$y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=2x,$$

则它的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_2-y_1\int\frac{y_2f}{W}\mathrm{d}x+y_2\int\frac{y_1f}{W}\mathrm{d}x$$

(见教材下册第 299 页),其中 $f=2x$, $W=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & x^2\\ 1 & 2x\end{vmatrix}=x^2$.

故
$$\begin{aligned}y&=C_1x+C_2x^2-x\int\frac{2x^3}{x^2}\mathrm{d}x+x^2\int\frac{2x^2}{x^2}\mathrm{d}x\\&=C_1x+C_2x^2+x^3.\end{aligned}$$

*7. 已知齐次线性方程 $y''+y=0$ 的通解为 $Y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$,求非齐次线性方程 $y''+y=\sec x$ 的通解.

解 由题设知,$y_1=\cos x$ 与 $y_2=\sin x$ 都是齐次方程 $y''+y=0$ 的解,且 y_1 与 y_2 线性无关,则非齐次方程 $y''+y=\sec x$ 的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-y_1\int\frac{y_2f}{W}\mathrm{d}x+y_2\int\frac{y_1f}{W}\mathrm{d}x$,其中

$$W=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=1,\ f=\sec x.$$

故

$$\begin{aligned}y&=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos x\int\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x+\sin x\int\frac{\cos x}{\cos x}\mathrm{d}x\\&=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln|\cos x|+x\sin x.\end{aligned}$$

*8. 已知齐次线性方程 $x^2y''-xy'+y=0$ 的通解为 $Y(x)=C_1x+C_2x\cdot\ln|x|$,求非齐次线性方程 $x^2y''-xy'+y=x$ 的通解.

解 由题设知 $y_1=x$ 与 $y_2=x\ln|x|$ 都是齐次方程的解,y_1 与 y_2 显然是线性无关的.将非齐次方程化为标准形 $y''-\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^2}y=\frac{1}{x}$,则方程的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_2-y_1\int\frac{y_2f}{W}\mathrm{d}x+y_2\int\frac{y_1f}{W}\mathrm{d}x,$$

其中
$$f=\frac{1}{x},\ W=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & x\ln|x|\\ 1 & \ln|x|+1\end{vmatrix}=x.$$

因
$$\int\frac{y_2f}{W}\mathrm{d}x=\int\frac{\ln|x|}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln^2|x|,$$

$$\int\frac{y_1f}{W}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|,$$

故非齐次方程的通解为

$$y = C_1 x + C_2 x\ln|x| - x\frac{1}{2}\ln^2|x| + x\ln|x|\cdot\ln|x|$$

$$= C_1 x + C_2 x\ln|x| + \frac{x}{2}\ln^2|x|.$$

习　题　12－8

1．求下列微分方程的通解：

(1) $y''+y'-2y=0$；　(2) $y''-4y'=0$；

(3) $y''+y=0$；　(4) $y''+6y'+13y=0$；

(5) $4\frac{d^2x}{dt^2}-20\frac{dx}{dt}+25x=0$；　(6) $y''-4y'+5y=0$；

(7) $y^{(4)}-y=0$；　(8) $y^{(4)}+2y''+y=0$；

(9) $y^{(4)}-2y'''+y''=0$；　(10) $y^{(4)}+5y''-36y=0$.

解　(1) 特征方程为 $r^2+r-2=0$，解得 $r_1=1, r_2=-2$，故方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}.$$

(2) 特征方程为 $r^2-4r=0$，解得 $r_1=0, r_2=4$，故方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{4x}.$$

(3) 特征方程为 $r^2+1=0$，解得 $r_1=i, r_2=-i$，故方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

(4) 特征方程为 $r^2+6r+13=0$，解得 $r_{1,2}=-3\pm 2i$，故方程的通解为

$$y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

(5) 特征方程为 $4r^2-20r+25=0$，解得 $r_1=r_2=\frac{5}{2}$，故方程的通解为

$$x=(C_1+C_2t)e^{\frac{5}{2}t}.$$

(6) 特征方程为 $r^2-4r+5=0$，解得 $r_{1,2}=2\pm i$，故方程的通解为

$$y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

(7) 特征方程为 $r^4-1=0$，即 $(r^2-1)(r^2+1)=0$，解得 $r_{1,2}=\pm 1, r_{3,4}=\pm i$，故方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

(8) 特征方程为 $r^4+2r^2+1=0$，即 $(r^2+1)^2=0$，解得 $r_{1,2}=i, r_{3,4}=-i$，故方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x.$$

(9) 特征方程为 $r^4-2r^3+r^2=0$，即 $r^2(r-1)^2=0$，解得 $r_{1,2}=0, r_{3,4}=1$，

故方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x)e^x.$$

(10) 特征方程为 $r^4 + 5r^2 - 36 = 0$,即$(r^2+9)(r^2-4) = 0$,解得 $r_{1,2} = \pm 2$,$r_{3,4} = \pm 3i$,故方程的通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x.$$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1) $y'' - 4y' + 3y = 0, y|_{x=0} = 6, y'|_{x=0} = 10$;

(2) $4y'' + 4y' + y = 0, y|_{x=0} = 2, y'|_{x=0} = 0$;

(3) $y'' - 3y' - 4y = 0, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = -5$;

(4) $y'' + 4y' + 29y = 0, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 15$;

(5) $y'' + 25y = 0, y|_{x=0} = 2, y'|_{x=0} = 5$;

(6) $y'' - 4y' + 13y = 0, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 3$.

解 (1) 解特征方程 $r^2 - 4r + 3 = 0$,得 $r_1 = 1, r_2 = 3$,故方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x},$$

且有

$$y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x}.$$

代入初始条件,得$\begin{cases} C_1 + C_2 = 6, \\ C_1 + 3C_2 = 10, \end{cases}$解得$\begin{cases} C_1 = 4, \\ C_2 = 2. \end{cases}$故所求特解为

$$y = 4e^x + 2e^{2x}.$$

(2) 解特征方程 $4r^2 + 4r + 1 = 0$,即$(2r+1)^2 = 0$,得 $r_{1,2} = -\dfrac{1}{2}$,故方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-\frac{x}{2}},$$

且有

$$y' = \left(-\frac{C_1}{2} + C_2 - \frac{C_2}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}.$$

代入初始条件,得$\begin{cases} C_1 = 2, \\ -\dfrac{C_1}{2} + C_2 = 0. \end{cases}$解得$\begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = 1. \end{cases}$故所求特解为

$$y = (2 + x)e^{-\frac{x}{2}}.$$

(3) 解特征方程 $r^2 - 3r - 4 = 0$,即$(r+1)(r-4) = 0$,得 $r_1 = -1, r_2 = 4$,故方程的通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x},$$

且有

$$y' = -C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{4x}.$$

代入初始条件,得$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -C_1 + 4C_2 = -5, \end{cases}$解得$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -1. \end{cases}$故所求特解为

$$y=e^{-x}-e^{4x}.$$

(4) 解特征方程 $r^2+4r+29=0$,得 $r_{1,2}=-2\pm5i$,故方程的通解为

$$y=e^{-2x}(C_1\cos5x+C_2\sin5x),$$

且有 $$y'=e^{-2x}[(5C_2-2C_1)\cos5x+(-5C_1-2C_2)\sin5x].$$

代入初始条件,得$\begin{cases}C_1=0,\\5C_2-2C_1=15,\end{cases}$即$\begin{cases}C_1=0,\\C_2=3.\end{cases}$故所求特解为

$$y=3e^{-2x}\sin5x.$$

(5) 解特征方程 $r^2+25=0$,得 $r_{1,2}=\pm5i$,故方程的通解为

$$y=C_1\cos5x+C_2\sin5x,$$

且有 $$y'=-5C_1\sin5x+5C_2\cos5x.$$

代入初始条件,得$\begin{cases}C_1=2,\\5C_2=5,\end{cases}$即$\begin{cases}C_1=2,\\C_2=1.\end{cases}$故所求特解为

$$y=2\cos5x+\sin5x.$$

(6) 解特征方程 $r^2-4r+13=0$,得 $r_{1,2}=2\pm3i$,故方程的通解为

$$y=e^{2x}(C_1\cos3x+C_2\sin3x)$$

且有 $$y'=e^{2x}[(2C_1+3C_2)\cos3x+(2C_2-3C_1)\sin3x].$$

代入初始条件,得$\begin{cases}C_1=0,\\2C_1+3C_2=3,\end{cases}$即$\begin{cases}C_1=0,\\C_2=1.\end{cases}$故所求特解为

$$y=e^{2x}\sin3x.$$

3. 一个单位质量的质点在数轴上运动,开始时质点在原点 O 处且速度为 v_0,在运动过程中,它受到一个力的作用,这个力的大小与质点到原点的距离成正比(比例系数 $k_1>0$)而方向与初速一致.又介质的阻力与速度成正比(比例系数 $k_2>0$).求反映这质点的运动规律的函数.

解 设质点的位置函数为 $x=x(t)$.由题意得

$$x''=k_1x-k_2x',$$

即 $$x''+k_2x'-k_1x=0,$$

且 $$x|_{t=0}=0,\ x'|_{t=0}=v_0.$$

解特征方程 $r^2+k_2r-k_1=0$,得 $r_{1,2}=\dfrac{-k_2\pm\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}$,故有通解

$$x=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t},$$

且有 $$x'=r_1C_1e^{r_1t}+r_2C_2e^{r_2t}$$

代入初始条件 $t=0,x=0,x'=v_0$,得$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\r_1C_1+r_2C_2=v_0,\end{cases}$解得

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{-v_0}{r_2 - r_1} = \dfrac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}}, \\ C_2 = \dfrac{v_0}{r_2 - r_1} = -\dfrac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}}. \end{cases}$$

故
$$x = \frac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}}\left(e^{\frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2}t} - e^{\frac{-k_2 - \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2}t}\right)$$
$$= \frac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}} e^{\frac{-k_2 - \sqrt{k_2^2 - 4k_1}}{2}t}\left(1 - e^{-\sqrt{k_2^2 + 4k_1}\,t}\right).$$

4. 在图 12－3 所示的电路中先将开关 K 拨向 A，达到稳定状态后再将开关 K 拨向 B，求电压 $u_C(t)$ 及电流 $i(t)$. 已知 $E = 20$ V，$C = 0.5\times 10^{-6}$ F(法)，$L = 0.1$ H(亨)，$R = 2\ 000\ \Omega$.

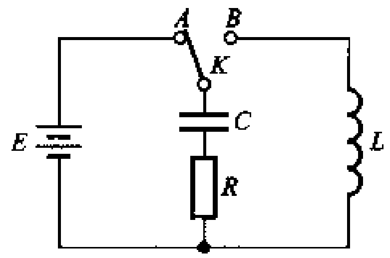


图 12－3

解 由回路定律，得
$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri = 0.$$
因 $\frac{q}{C} = u_C$，即 $q = Cu_C$，$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$，

则 $\frac{di}{dt} = C\frac{d^2u_C}{dt^2}$. 于是有
$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C + RC\frac{du}{dt} = 0$$

即
$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0,$$

且
$$u_C\big|_{t=0} = E, \left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

已知 $\frac{R}{L} = \frac{2\ 000}{0.1} = 2\times 10^4$，$\frac{1}{LC} = \frac{1}{0.1\times 0.5\times 10^{-6}} = 2\times 10^7$，

故微分方程为
$$u_C'' + 2\times 10^4 u_C' + 2\times 10^7 u_C = 0.$$

其特征方程为
$$r^2 + 2\times 10^4 r + 2\times 10^7 = 0,$$

解得
$$r_1 \doteq -1.9\times 10^4, r_2 \doteq -10^3$$

故
$$u_C = C_1 e^{-1.9\times 10^4 t} + C_2 e^{-10^3 t}$$

且有
$$u_C' = -1.9\times 10^4 C_1 e^{-1.9\times 10^4 t} - 10^3 C_2 e^{-10^3 t}$$

代入初始条件 $t=0, u_C=20, u_C'=0$，得$\begin{cases} C_1+C_2=20, \\ -1.9\times 10^4 C_1-10^3 C_2=0, \end{cases}$解得 $C_1=-\frac{10}{9}, C_2=\frac{190}{9}$.

故

$$u_C=\frac{10}{9}(19\mathrm{e}^{-10^3 t}-\mathrm{e}^{-1.9\times 10^4 t}),$$

$$\begin{aligned} i &= Cu_C'=0.5\times 10^{-6}\times\frac{10}{9}(-19\times 10^3\mathrm{e}^{-10^3 t}+1.9\times 10^4\mathrm{e}^{-1.9\times 10^4 t}) \\ &= \frac{19}{18}\times 10^{-2}(\mathrm{e}^{-1.9\times 10^4 t}-\mathrm{e}^{-10^3 t}). \end{aligned}$$

5. 设圆柱形浮筒，直径为 0.5 m，铅直放在水中，当稍向下压后突然放开，浮筒在水中上下振动的周期为 2 s，求浮筒的质量.

解 设 x 轴的正向铅直向下，原点在水面处.平衡状态下浮筒上一点 A 在水平面处，又设在时刻 t，点 A 的位置为 $x=x(t)$，此时它受到的恢复力的大小为 $1\,000g\pi R^2|x|$（R 是浮筒的半径），恢复力的方向与位移方向相反，故有

$$mx''=-1\,000g\pi R^2 x,$$

其中 m 是浮筒的质量.

记 $\omega^2=\frac{1\,000g\pi R^2}{m}$，则得微分方程

$$x''+\omega^2 x=0.$$

解特征方程 $r^2+\omega^2=0$，得 $r_{1,2}=\pm\omega i$，故

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t=A\sin(\omega t+\varphi), A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}, \sin\varphi=\frac{C_1}{A}.$$

由于振动周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2$，故 $\omega=\pi$，即

$$\frac{1\,000g\pi R^2}{m}=\pi^2,$$

从中解出

$$m=\frac{1\,000gR^2}{\pi}\doteq 195(\mathrm{kg}).$$

习 题 12－9

1. 求下列各微分方程的通解：

(1) $2y''+y'-y=2\mathrm{e}^x$； (2) $y''+a^2y=\mathrm{e}^x$；

(3) $2y''+5y'=5x^2-2x-1$； (4) $y''+3y'+2y=3x\mathrm{e}^{-x}$；

(5) $y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$；　　(6) $y''-6y'+9y=(x+1)e^{3x}$；

(7) $y''+5y'+4y=3-2x$；　　(8) $y''+4y=x\cos x$；

(9) $y''+y=e^x+\cos x$；　　(10) $y''-y=\sin^2 x$.

解　(1) 由 $2r^2+r-1=0$ 解得 $r_1=\frac{1}{2}, r_2=-1$. 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-x}.$$

因 $f(x)=2e^x$，$\lambda=1$ 不是特征方程的根，故可设 $y^*=ae^x$ 是原方程的一个特解，代入原方程得

$$2ae^x+ae^x-ae^x=2e^x.$$

消去 e^x，有 $a=1$，即

$$y^*=e^x.$$

故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-x}+e^x.$$

(2) 由 $r^2+a^2=0$，解得 $r_{1,2}=\pm ai$. 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos ax+C_2\sin ax.$$

因 $f(x)=e^x$，$\lambda=1$ 不是特征方程的根，故设 $y^*=be^x$ 是原方程的一个特解，代入方程得

$$be^x+a^2be^x=e^x,$$

消去 e^x，有　　$b=\frac{1}{1+a^2}$，即 $y^*=\frac{e^x}{1+a^2}$.

故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{e^x}{1+a^2}.$$

(3) 由 $2r^2+5r=0$，解得 $r_1=0, r_2=-\frac{5}{2}$，故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}.$$

因 $f(x)=5x^2-2x-1$，$\lambda=0$ 是特征方程的单根，故设 $y^*=x(b_0x^2+b_1x+b_2)$是原方程的一个特解，代入方程并整理，得

$$15b_0x^2+(12b_0+10b_1)x+4b_1+5b_2=5x^2-2x-1.$$

比较系数得　　$b_0=\frac{1}{3}, b_1=-\frac{3}{5}, b_2=\frac{7}{25}$，

即　　$y^*=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x.$

故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x.$$

(4) 由 $r^2+3r+2=0$ 解得 $r_1=-1,r_2=-2$,故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}.$$

因 $f(x)=3xe^{-x},\lambda=-1$ 是特征方程的单根,故可设

$$y^*=xe^{-x}(ax+b)=e^{-x}(ax^2+bx)$$

是原方程的一个特解,代入方程并消去 e^{-x},得

$$2ax+(2a+b)=3x.$$

比较系数,得 $a=\frac{3}{2},b=-3$,即

$$y^*=e^{-x}\left(\frac{3}{2}x^2-3x\right).$$

故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{-x}\left(\frac{3}{2}x^2-3x\right).$$

(5) 由 $r^2-2r+5=0$,解得 $r_{1,2}=1\pm 2i$,故对应的齐次方程的通解为

$$Y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

因 $f(x)=e^x\sin 2x=e^x(0\cdot\cos 2x+1\cdot\sin 2x),\lambda+i\omega=1+2i$ 是特征方程的单根,故可设

$$y^*=xe^x(a\cos 2x+b\sin 2x)$$

是原方程的一个特解,代入方程并消去 e^x,得

$$4b\cos 2x-4a\sin 2x=\sin 2x.$$

比较系数,得 $a=-\frac{1}{4},b=0$,即

$$y^*=xe^x\left(-\frac{1}{4}\cos 2x\right)=-\frac{1}{4}xe^x\cos 2x.$$

故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{1}{4}xe^x\cos 2x.$$

(6) 由 $r^2-6r+9=0$ 得 $r_{1,2}=3$,故对应的齐次方程的通解为

$$Y=e^{3x}(C_1+C_2x).$$

因 $f(x)=e^{2x}(x+1),\lambda=2$ 不是特征方程的根,故可设

$$y^*=e^{2x}(ax+b)$$

是原方程的一个特解,代入方程并消去 e^{2x},得

$$ax+b-2a=x+1.$$

比较系数,得 $a=1,b=3$,即

$$y^* = e^{2x}(x+3).$$

故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + e^{2x}(x+3).$$

(7) 由 $r^2+5r+4=0$ 解得 $r_1=-1, r_2=-4$,故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}.$$

因 $f(x)=3-2x$, $\lambda=0$ 不是特征方程的根,故可设

$$y^* = ax + b$$

是原方程的一个特解,代入方程,得

$$4ax + 5a + 4b = -2x + 3.$$

比较系数得 $a=-\frac{1}{2}, b=\frac{11}{8}$,即

$$y^* = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{8}.$$

故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x} - \frac{1}{2}x + \frac{11}{8}.$$

(8) 由 $r^2+4=0$ 解得 $r_{1,2}=\pm 2i$,故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

因 $f(x)=x\cos x$, $\lambda + i\omega = i$ 不是特征方程的根,故可设

$$y^* = (ax+b)\cos x + (cx+\mathrm{d})\sin x$$

是原方程的一个特解,代入方程,得

$$(3ax+3b+2c)\cos x + (3cx+3d-2a)\sin x = x\cos x.$$

比较系数有$\begin{cases} 3a=1, \\ 3b+2c=0, \\ 3c=0, \\ 3d-2a=0, \end{cases}$ 解得$\begin{cases} a=\frac{1}{3}, \\ b=0, \\ c=0, \\ d=\frac{2}{9}, \end{cases}$ 即

$$y^* = \frac{1}{3}x\cos x + \frac{2}{9}\sin x.$$

故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3}x\cos x + \frac{2}{9}\sin x.$$

(9) 由 $r^2+1=0$ 解得 $r_{1,2}=\pm i$,故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1\cos x + C_2 \sin x.$$

因 $f(x)=e^x+\cos x$,对应于方程 $y''+y=e^x$,可设特解 $y_1^*=Ae^x$;对应于方程

$y''+y=\cos x$（$\lambda+i\omega=i$ 是特征方程的根）可设特解 $y_2^*=x(B\cos x+C\sin x)$，故由叠加原理，设

$$y^*=Ae^x+x(B\cos x+C\sin x)$$

是原方程的一个特解，代入方程，得

$$2Ae^x+2C\cos x-2B\sin x=e^x+\cos x.$$

比较系数，得 $A=\frac{1}{2}$，$B=0$，$C=\frac{1}{2}$，即

$$y^*=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}x\sin x.$$

故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}x\sin x.$$

(10) 由 $r^2-1=0$ 解得 $r_{1,2}=\pm 1$，故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

因 $f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$，对应于方程 $y''-y=\frac{1}{2}$，可设特解 $y_1^*=A$；对应于方程 $y''-y=-\frac{1}{2}\cos 2x$，可设特解 $y_2^*=B\cos 2x+C\sin 2x$，故由叠加原理，设

$$y^*=A+B\cos 2x+C\sin 2x$$

是原方程的一个特解，代入方程，得

$$-A-5B\cos 2x-5C\sin 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x.$$

比较系数得 $A=-\frac{1}{2}$，$B=\frac{1}{10}$，$C=0$，即

$$y^*=-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cos 2x.$$

故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cos 2x.$$

2. 求下列各微分方程满足已给初始条件的特解：

(1) $y''+y+\sin 2x=0$，$y|_{x=\pi}=1$，$y'|_{x=\pi}=1$；

(2) $y''-3y'+2y=5$，$y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=2$；

(3) $y''-10y'+9y=e^{2x}$，$y|_{x=0}=\frac{6}{7}$，$y'|_{x=0}=\frac{33}{7}$；

(4) $y''-y=4xe^x$，$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=1$；

(5) $y''-4y'=5$，$y|_{x=0}=1$；$y'|_{x=0}=0$.

解 (1) 由 $r^2+1=0$ 解得 $r_{1,2}=\pm i$,故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

因 $f(x)=-\sin 2x=e^{0x}(0\cdot\cos 2x-\sin 2x)$,$\lambda+i\omega=2i$.不是特征方程的根,故可设

$$y^*=A\cos 2x+B\sin 2x$$

是原方程的一个特解,代入方程得

$$-3A\cos 2x-3B\sin 2x=-\sin 2x.$$

比较系数得 $A=0,B=\frac{1}{3}$,即

$$y^*=\frac{1}{3}\sin 2x.$$

故原方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x.$$

且有 $$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{2}{3}\cos 2x.$$

代入初始条件 $x=\pi,y=1,y'=1$,有

$$\begin{cases}-C_1=1,\\ -C_2+\frac{2}{3}=1,\end{cases}\text{即}\begin{cases}C_1=-1,\\ C_2=-\frac{1}{3}.\end{cases}$$

故所求特解为

$$y=-\cos x-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x.$$

(2) 由 $r^2-3r+2=0$ 解得 $r_1=1,r_2=2$,故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

因 $f(x)=5$,$\lambda=0$ 不是特征方程的根,故可设 $y^*=A$ 是原方程的一个特解,代入方程得 $A=\frac{5}{2}$,即 $y^*=\frac{5}{2}$.

于是原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{5}{2},$$

且有 $$y'=C_1e^x+2C_2e^{2x}.$$

代入初始条件 $x=0,y=1,y'=2$,有

$$\begin{cases}C_1+C_2+\frac{5}{2}=1,\\ C_1+2C_2=2.\end{cases}\quad\text{解得}\quad\begin{cases}C_1=-5,\\ C_2=\frac{7}{2}.\end{cases}$$

故所求特解为

$$y=-5e^{x}+\frac{7}{2}e^{2x}+\frac{5}{2}.$$

(3) 由 $r^2-10r+9=0$ 解得 $r_1=1,r_2=9$,故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{x}+C_2e^{9x}.$$

因 $f(x)=e^{2x}$,$\lambda=2$ 不是特征方程的根,故可设 $y^*=Ae^{2x}$ 是原方程的一个特解,代入方程并消去 e^{2x},得 $A=-\frac{1}{7}$,即 $y^*=-\frac{1}{7}e^{2x}$.

于是原方程的通解为

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{9x}-\frac{1}{7}e^{2x},$$

且有

$$y'=C_1e^{x}+9C_2e^{9x}-\frac{2}{7}e^{2x}.$$

代入初始条件 $x=0,y=\frac{6}{7},y'=\frac{33}{7}$,有

$$\begin{cases}C_1+C_2-\frac{1}{7}=\frac{6}{7},\\ C_1+9C_2-\frac{2}{7}=\frac{33}{7},\end{cases}\quad 解得\quad \begin{cases}C_1=\frac{1}{2},\\ C_2=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

故所求特解为

$$y=\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{2}e^{9x}-\frac{1}{7}e^{2x}.$$

(4) 由 $r^2-1=0$ 得特征根 $r_{1,2}=\pm1$,故对应的齐次方程的通解为

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}.$$

因 $f(x)=4xe^{x}$,$\lambda=1$ 是特征方程的单根,故可设 $y^*=xe^{x}(Ax+B)=e^{x}(Ax^2+Bx)$是原方程的一个特解,代入方程并消去 e^{x},得

$$4Ax+2A+2B=4x.$$

比较系数得 $A=1,B=-1$,即

$$y^*=e^{x}(x^2-x).$$

于是原方程的通解为

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+e^{x}(x^2-x),$$

即

$$y=e^{x}(x^2-x+C_1)+C_2e^{-x},$$

且有

$$y'=e^{x}(x^2+x-1+C_1)-C_2e^{-x}.$$

代入初始条件 $x=0,y=0,y'=1$,有

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ C_1-C_2-1=1,\end{cases}\quad 解得\quad \begin{cases}C_1=1,\\ C_2=-1.\end{cases}$$

故所求特解为

$$y=e^{x}(x^2-x+1)-e^{-x}.$$

(5) 由 $r^2-4r=0$,解得 $r_1=0, r_2=4$.故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1+C_2e^{4x}.$$

因 $f(x)=5=5\cdot e^{0x}$,$\lambda=0$ 是特征方程的单根,故可设 $y^*=Ax$ 是原方程的一个特解,代入方程得 $A=-\frac{5}{4}$,即 $y^*=-\frac{5}{4}x$.

于是原方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{4x}-\frac{5}{4}x,$$

且有

$$y'=4C_2e^{4x}-\frac{5}{4}.$$

代入初始条件 $x=0, y=1, y'=0$,有

$$\begin{cases} C_1+C_2=1, \\ 4C_2-\frac{5}{4}=0, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} C_1=\frac{11}{16}, \\ C_2=\frac{5}{16}. \end{cases}$$

故所求特解为

$$y=\frac{11}{16}+\frac{5}{16}e^{4x}-\frac{5}{4}x.$$

3. 大炮以仰角 α、初速 v_0 发射炮弹,若不计空气阻力,求弹道曲线.

解 取炮口在原点,炮弹前进的水平方向为 x 轴,铅直向上为 y 轴,设在时刻 t,炮弹位于$(x(t), y(t))$.按题意,有

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2}=-g, & (1) \\ \frac{d^2x}{dt^2}=0. & (2) \end{cases} \quad \text{且} \quad \begin{cases} y|_{t=0}=0, & y'|_{t=0}=v_0\sin\alpha, \\ x|_{t=0}=0, & x'|_{t=0}=v_0\cos\alpha. \end{cases}$$

解方程(1),得

$$y=-\frac{g}{2}t^2+C_1t+C_2,$$

代入初始条件 $t=0, y=0, y'=v_0\sin\alpha$,得 $C_2=0, C_1=v_0\sin\alpha$,即

$$y=v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{g}{2}t^2;$$

解方程(2),得

$$x=C_3t+C_4,$$

代入初始条件 $t=0, x=0, x'=v_0\cos\alpha$,得 $C_4=0, C_3=v_0\cos\alpha$,即

$$x=v_0\cos\alpha\cdot t.$$

故弹道曲线为

$$\begin{cases} x=v_0\cos\alpha\cdot t, \\ y=v_0\sin\alpha\cdot t+\frac{g}{2}t^2. \end{cases}$$

4. 在 R、L、C 含源串联电路中,电动势为 E 的电源对电容器 C 充电.已知 $E=20\text{ V}$, $C=0.2\ \mu\text{F}$(微法), $L=0.1\text{ H}$(亨), $R=1\ 000\ \Omega$,试求合上开关 K 后的电流 $i(t)$ 及电压 $u_C(t)$.

解 由回路定律知

$$LCu_C''+RCu_C'+u_C=E.$$

即
$$u_C''+\frac{R}{L}u_C'+\frac{1}{LC}u_C=\frac{E}{LC}.$$

且依题意,有初始条件, $u_C|_{t=0}=0$, $u_C'|_{t=0}=0$.

已知 $R=1\ 000(\Omega)$, $L=0.1(\text{H})$, $C=0.2(\text{mF})=0.2\times10^{-6}(\text{F})$, $E=20(\text{V})$,故微分方程为

$$u_C''+10^4u_C'+5\times10^7u_C=10^9,$$

其对应的齐次方程的特征方程为

$$r^2+10^4r+5\times10^7=0,$$

解得
$$r_{1,2}=-\frac{10^4}{2}\pm\frac{10^4}{2}i=-5\times10^3\pm5\times10^3i.$$

因 $f(t)=10^9$.可令 $u_C^*=A$ 是原方程的特解,代入方程,得 $A=20$,即 $u_C^*=20$.故方程的通解为

$$u_C=e^{-5\times10^3t}[C_1\cos(5\times10^3t)+C_2\sin(5\times10^3t)]+20,$$

代入初始条件, $t=0$, $u_C=0$,有 $C_1+20=0$,即 $C_1=-20$.

又
$$u_C'=-5\times10^3e^{-5\times10^3t}[-20\cos(5\times10^3t)+C_2\sin(5\times10^3t)]+$$
$$e^{-5\times10^3t}[20\times5\times10^3\sin(5\times10^3t)+5\times10^3C_2\cos(5\times10^3t)]$$

代入初始条件 $t=0$, $u_C'=0$.有 $-5\times10^3(-20)+5\times10^3C_2=0$,即 $C_2=-20$.

故
$$u_C=20-20e^{-5\times10^3t}[\cos(5\times10^3t)+\sin(5\times10^3t)](\text{V}),$$
$$i=Cu_C'=0.2\times10^{-6}u_C'$$
$$=4\times10^{-2}e^{-5\times10^3t}\sin(5\times10^3t)(\text{A}).$$

5. 一链条悬挂在一钉子上,起动时一端离开钉子 8 m 另一端离开钉子12 m,分别在以下两种情况下求链条滑下来所需要的时间:

(1) 若不计钉子对链条所产生的摩擦力;

(2) 若摩擦力为 1 m 长的链条的重量.

解 设链条的线密度为 $\rho(\text{kg/m})$,则链条的质量为 $20\rho(\text{kg})$.又设在时刻 t,链条的一端离钉子 $x=x(t)$,则另一端离钉子 $20-x$,当 $t=0$ 时, $x=12$.

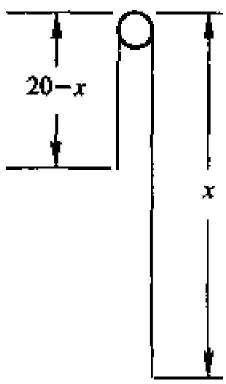


图 12-4

(1) 若不计摩擦力,则运动过程中的链条所受力的大小为$[x-(20-x)]\rho g$,按牛顿定律,有

$$20\rho x''=[x-(20-x)]\rho g,$$

即
$$x''-\frac{g}{10}x=-g.$$

且有初始条件
$$x|_{t=0}=12,x'|_{t=0}=0.$$

由特征方程 $r^2-\frac{g}{10}=0$,解得 $r_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{g}{10}}$,又将 $x^*=A$ 代入方程,得 $A=10$,即 $x^*=10$.求得方程通解

$$x=C_1e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+C_2e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+10,$$

代入初始条件 $t=0,x=12,x'=0$,得 $C_1=C_2=1$,故

$$x=e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+10=2\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{10}}t\right)+10.$$

取 $x=20$,得 $\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{10}}t\right)=5$,即

$$t=\sqrt{\frac{10}{g}}\mathrm{arch}\,5=\sqrt{\frac{10}{g}}\ln(5+2\sqrt{6})\quad(\mathrm{s}).$$

(2) 摩擦力为 1 m 长链条的重量即为 ρg,则运动过程中的链条所受力的大小为$[x-(20-x)]\rho g-\rho g$,按牛顿定律,有

$$20\rho x''=[x-(20-x)]\rho g-\rho g,$$

即
$$x''-\frac{g}{10}x=-\frac{21}{10}g$$

且有初始条件
$$x|_{t=0}=12,x'|_{t=0}=0.$$

满足该条件的特解为

$$x=\frac{3}{4}\left(e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}\right)+\frac{21}{2}=\frac{3}{2}\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{10}}t\right)+\frac{21}{2}.$$

取 $x=20$,得 $\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{10}}t\right)=\frac{19}{3}$,即

$$t=\sqrt{\frac{10}{g}}\mathrm{arch}\,\frac{19}{3}=\sqrt{\frac{10}{g}}\ln\left(\frac{19}{3}+\frac{4}{3}\sqrt{22}\right).$$

6. 设函数 $\varphi(x)$连续,且满足

$$\varphi(x)=e^x+\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t-x\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t,$$

求 $\varphi(x)$.

解　由所给方程可得 $\varphi(0)=1$,在该方程两端对 x 求导,得

$$\varphi'(x)=\mathrm{e}^x+x\varphi(x)-\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t-x\varphi(x),$$

即
$$\varphi'(x)=\mathrm{e}^x-\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

可见
$$\varphi'(0)=1.$$

又在方程 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^x-\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t$ 的两端对 x 求导,得

$$\varphi''(x)=\mathrm{e}^x-\varphi(x).$$

若记 $\varphi(x)=y$,则有初值问题

$$\begin{cases}y''+y=\mathrm{e}^x,\\ y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=1.\end{cases}\tag{1}$$

上述非齐次方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$,解得 $r_{1,2}=\pm i$,而 $f(x)=\mathrm{e}^x$,$\lambda=1$ 不是特征方程的根,故令 $y^*=A\mathrm{e}^x$是方程(1)的特解,代入方程(1)并消去 e^x,得 $A=\frac{1}{2}$,于是方程(1)有通解

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x,$$

且有
$$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$$

代入初始条件 $x=0,y=1,y'=1$,有

$$\begin{cases}C_1+\frac{1}{2}=1,\\ C_2+\frac{1}{2}=1,\end{cases}\quad 即\quad C_1=C_2=\frac{1}{2}.$$

于是得

$$y=\varphi(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+\mathrm{e}^x).$$

*习 题 12-10

求下列欧拉方程的通解:

1. $x^2y''+xy'-y=0$;　　2. $y''-\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^2}=\frac{2}{x}$;

3. $x^3y'''+3x^2y''-2xy'+2y=0$;　　4. $x^2y''-2xy'+2y=\ln^2x-2\ln x$;

5. $x^2y''+xy'-4y=x^3$;　　6. $x^2y''-xy'+4y=x\sin(\ln x)$;

7. $x^2y''-3xy'+4y=x+x^2\ln x$;　　8. $x^3y'''+2xy'-2y=x^2\ln x+3x$.

说明　令 $x=\mathrm{e}^t$或 $t=\ln x$,则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$,即 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. 记$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=D$,$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}=$

$D^2,\dfrac{d^3}{dt^3}=D^3$，则

$$x\frac{dy}{dx}=Dy,$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=D(D-1)y,$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}=D(D-1)(D-2)y.$$

本节习题中 8 个欧拉方程均用此法转化为常系数线性方程求解.

解 1. 令 $x=e^t$，记 $D=\dfrac{d}{dt}$，则原方程化为

$$[D(D-1)+D-1]y=0, \tag{1}$$

特征方程为 $r(r-1)+r-1=0$，即 $r^2-1=0$，有特征根 $r_{1,2}=\pm1$，故方程(1)有通解

$$y=C_1e^t+C_2e^{-t},$$

即原方程的通解为 $$y=C_1x+\frac{C_2}{x}.$$

2. 原方程可改写成 $x^2y''-xy'+y=2x$. 令 $x=e^t$，记 $D=\dfrac{d}{dt}$，则方程化为

$$[D(D-1)-D+1]y=2e^t. \tag{2}$$

方程(2)对应的齐次方程的特征方程为 $r(r-1)-r+1=0$，即 $r^2-2r+1=0$，有特征根 $r_{1,2}=1$. 故方程(2)对应的齐次方程的通解为

$$Y=e^t(C_1+C_2t).$$

因 $f(t)=2e^t$，$\lambda=1$ 是特征(二重)根. 设 $y^*=At^2e^t$，则

$$Dy=A(t^2+2t)e^t,D^2y=A(t^2+4t+2)e^t,$$

代入方程(2)中可得 $A=1$，即 $y^*=t^2e^t$，故方程(2)的通解为

$$y=e^t(C_1+C_2t)+t^2e^t,$$

即原方程的通解为

$$y=x(C_1+C_2\ln x)+x\ln^2x.$$

3. 令 $x=e^t$，记 $D=\dfrac{d}{dt}$，则方程可化为

$$[D(D-1)(D-2)+3D(D-1)-2D+2]y=0. \tag{3}$$

其特征方程为 $r(r-1)(r-2)+3r(r-1)-2r+2=0$，即 $(r-1)^2(r+2)=0$，有根 $r_{1,2}=1,r_3=-2$.

故方程(3)的通解为

$$y=e^t(C_1+C_2t)+C_3e^{-2t},$$

即原方程的通解为

$$y=x(C_1+C_2\ln x)+\frac{C_3}{x^2}.$$

4. 令 $x=e^t$，记 $D=\frac{d}{dt}$，则方程可化为$[D(D-1)-2D+2]y=t^2-2t$，即

$$(D^2-3D+2)y=t^2-2t, \tag{4}$$

方程(4)对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0$，有根 $r_1=1, r_2=2$，故齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^t+C_2e^{2t}.$$

因 $f(t)=t^2-2t$，$\lambda=0$ 不是特征方程的根，故可令 $y^*=At^2+Bt+C$ 是(4)的特解，代入方程(4)，比较系数得 $A=B=\frac{1}{2}, C=\frac{1}{4}$，即

$$y^*=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}.$$

于是方程(4)的通解为

$$y=C_1e^t+C_2e^{2t}+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4},$$

即原方程的通解为

$$y=C_1x+C_2x^2+\frac{1}{2}\ln^2x+\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}.$$

5. 令 $x=e^t$，记 $D=\frac{d}{dt}$，则方程可化为$[D(D-1)+D-4]y=e^{3t}$，即

$$(D^2-4)y=e^{3t}. \tag{5}$$

方程(5)对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-4=0$，有根 $r_{1,2}=\pm2$，故齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}=C_1x^2+\frac{C_2}{x^2}.$$

因 $f(t)=e^{3t}$，$\lambda=3$ 不是特征方程的根，故可令 $y^*=Ae^{3t}$ 是方程(5)的特解，即 $y^*=Ax^3$ 是原方程的特解，代入原方程 $x^2y''+xy'-4y=x^3$ 中，得 $A=\frac{1}{5}$，即 $y^*=\frac{1}{5}x^3$.

故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1x^2+\frac{C_2}{x^2}+\frac{1}{5}x^3.$$

6. 令 $x=e^t$，记 $D=\frac{d}{dy}$，则原方程化为$[D(D-1)-D+4]y=e^t\sin t$，即

$$(D^2-2D+4)y=e^t\sin t. \tag{6}$$

方程(6)对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-2r+4=0$,有根 $r_{1,2}=1\pm\sqrt{3}i$,故齐次方程的通解为

$$Y=e^t[C_1\cos(\sqrt{3}t)+C_2\sin(\sqrt{3}t)].$$

因 $f(x)=e^t\sin t$,$\lambda+i\omega=1+i$ 不是特征方程的根,故可令 $y^*=e^t(A\cos t+B\sin t)$是方程(6)的特解,代入方程(6)并比较系数,可得 $A=0,B=\frac{1}{2}$,即

$$y^*=\frac{e^t}{2}\sin t,$$

于是方程(6)的通解为

$$y=e^t[C_1\cos(\sqrt{3}t)+C_2\sin(\sqrt{3}t)]+\frac{e^t}{2}\sin t,$$

即原方程的通解为

$$y=x[C_1\cos(\sqrt{3}\ln x)+C_2\sin(\sqrt{3}\ln x)]+\frac{x}{2}\sin(\ln x).$$

7. 令 $x=e^t$,记 $D=\frac{d}{dy}$,则原方程可化为$[D(D-1)-3D+4]y=e^t+te^{2t}$,即

$$(D^2-4D+4)y=e^t+te^{2t}. \tag{7}$$

方程(7)对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-4r+4=0$,有根 $r_{1,2}=2$,故齐次方程的通解为

$$Y=e^{2t}(C_1+C_2t).$$

因 $\lambda=1$ 不是特征方程的根,故方程$(D^2-4D+4)y=e^t$的特解 $y_1^*=Ae^t$;
而 $\lambda=2$ 是特征方程的(二重)根,故方程$(D^2-4D+4)y=te^{2t}$的特解可令作 $y_2^*=t^2e^{2t}(Bt+C)$.由叠加原理知,可令 $y^*=y_1^*+y_2^*=Ae^t+(Bt^3+Ct^2)e^{2t}$是方程(7)的特解,代入方程(7),得

$$Ae^t+(6Bt+2C)e^{2t}=e^t+te^{2t}.$$

比较系数,得 $A=1,B=\frac{1}{6},C=0$,即

$$y^*=e^t+\frac{t^3}{6}e^{2t}.$$

于是方程(7)的通解为

$$y=e^{2t}(C_1+C_2t)+e^t+\frac{t^3}{6}e^{2t},$$

即原方程的通解为

$$y=x^2(C_1+C_2\ln x)+x+\frac{1}{6}x^2\ln^3 x.$$

8. 令 $x=e^t$，记 $D=\frac{d}{dt}$，则原方程可化为 $[D(D-1)(D-2)+2D-2]y=te^{2t}+3e^t$，即

$$[(D-1)(D^2-2D+2)]y=te^{2t}+3e^t. \tag{8}$$

方程(8)对应的齐次方程的特征方程为 $(r-1)(r^2-2r+2)=0$，有根 $r_1=1$，$r_{2,3}=1\pm i$，故齐次方程的通解为

$$Y=e^t(C_1+C_2\cos t+C_3\sin t).$$

对方程 $[(D-1)(D^2-2D+2)]y=te^{2t}$，因 $\lambda=2$ 不是特征方程的根，可令 $y_1^*=(At+B)e^t$；

对方程 $[(D-1)(D^2-2D+2)]y=3e^t$，因 $\lambda=1$ 是特征方程的单根，可令 $y_2^*=Cte^t$.

由叠加原理，可令 $y^*=y_1^*+y_2^*=(At+B)e^{2t}+Cte^t$ 是方程(8)的特解，即令

$$y^*=x^2(A\ln x+B)+Cx\ln x$$

是原方程的特解，并有

$$y^{*\prime}=2Ax\ln x+(A+2B)x+C\ln x+C,$$

$$y^{*\prime\prime}=2A\ln x+(3A+2B)+\frac{C}{x},$$

$$y^{*\prime\prime\prime}=\frac{2A}{x}-\frac{C}{x^2}.$$

代入原方程 $x^3y'''+2xy'-2y=x^2\ln x+3x$ 中，得

$$2Ax^2\ln x+(4A+2B)x^2+Cx=x^2\ln x+3x.$$

比较系数得 $A=\frac{1}{2}$，$B=-1$，$C=3$，即

$$y^*=x^2\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)+3x\ln x.$$

故原方程的通解为

$$y=x[C_1+C_2\cos(\ln x)+C_3\sin(\ln x)]+x^2\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)+3x\ln x.$$

习　题　12－11

1. 试用幂级数求下列各微分方程的解：

(1) $y'-xy-x=1$；

(2) $y''+xy'+y=0$；

(3) $xy''-(x+m)y'+my=0$（m 为自然数）；

(4) $(1-x)y'=x^2-y$；

(5) $(x+1)y'=x^2-2x+y$.

解 (1) 设方程的解为 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$($a_0$ 为任意常数),代入方程,则有如下竖式(注意对齐同次幂项)

$$
\begin{array}{rl}
y'= & a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+(n+1)a_{n+1}x^n+\cdots \\
-xy= & \qquad -a_0x-a_1x^2-\cdots \qquad\qquad -a_{n-1}x^n-\cdots \\
-x= & \qquad -x \\
\hline
\end{array}
$$

$$1=a_1+(2a_2-a_0-1)x+(3a_3-a_1)x^2+\cdots+[(n+1)a_{n+1}-a_{n-1}]x^n+\cdots$$

比较系数可得

$$a_1=1,\qquad a_2=\frac{a_0+1}{2},$$

$$a_3=\frac{1}{3},\qquad a_4=\frac{a_2}{4}=\frac{a_0+1}{2\times4},$$

$$a_5=\frac{a_3}{5}=\frac{1}{3\times5},\qquad a_6=\frac{a_4}{6}=\frac{a_0+1}{2\times4\times6},$$

$\cdots$

$$a_{2n-1}=\frac{1}{3\times5\times\cdots\times(2n-1)},\quad a_{2n}=\frac{a_0+1}{2\times4\times6\times\cdots\times2n}=\frac{a_0+1}{n!\ 2^n}.$$

不难求出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}x^{2n-1}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}$ 的收敛域都是$(-\infty,+\infty)$,故

$$
\begin{aligned}
y&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}x^{2n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{3\times5\times\cdots\times(2n-1)}+(a_0+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!\ 2^n}-1\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{3\times5\times\cdots\times(2n-1)}+(a_0+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n-1.
\end{aligned}
$$

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n=e^{\frac{x^2}{2}}$,记 $a_0+1=C$,$1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)=(2n-1)!!$,则

$$y=Ce^{\frac{x^2}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!!}x^{2n-1}-1,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) 设 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是方程的解,其中 a_0,a_1 是任意常数,则

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n,$$

代人方程 $y''+xy'+y=0$,得

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+na_n+a_n]x^n=0.$$

故必有

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n=0,$$

即
$$a_{n+2}=-\frac{a_n}{n+2}\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

可见,当 $n=2(k-1)$时,$a_{2k}=\left(-\frac{1}{2k}\right)a_{2k-2}=\left(-\frac{1}{2k}\right)\left(-\frac{1}{2k-2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}\right)a_0=\frac{a_0(-1)^k}{k!\ 2^k}$;

当 $n=2k-1$ 时,$a_{2k+1}=\left(-\frac{1}{2k+1}\right)a_{2k-1}=\left(-\frac{1}{2k+1}\right)\left(-\frac{1}{2k-1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{3}\right)a_1=\frac{a_1(-1)^k}{(2k+1)!!}$.

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}$与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$的收敛域均为$(-\infty,+\infty)$,故

$$\begin{aligned}y&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0(-1)^n}{n!\ 2^n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_1(-1)^n}{(2n+1)!!}x^{2n+1}\end{aligned}$$

即
$$y=a_0e^{-\frac{x^2}{2}}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}x^{2n+1},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(3) 本题可先求方程的两个线性无关的特解,而后写出通解.

设 $y_1=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,则 $y_1'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$,$y_1''=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$. 代人方程,有

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-(1+m)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+m\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

即

$$m(a_0-a_1)+\sum_{n=1}^{\infty}[ma_n+(n+1)na_{n+1}-na_n-m(n+1)a_{n+1}]x^n=0.$$

故有 $m(a_0-a_1)=0,ma_n+(n+1)na_{n+1}-na_n-m(n+1)a_{n+1}=0,$

即
$$a_0=a_1,\quad(m-n)[a_n-(n+1)a_{n+1}]=0.$$

从而
$$a_1=a_0,\quad a_{n+1}=\frac{a_n}{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$$

于是 $$a_1=a_0,\quad a_2=\frac{a_0}{2},a_3=\frac{a_0}{2\times 3},\cdots,a_n=\frac{a_0}{n!},\cdots.$$

所以 $$y_1=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=a_0e^x.$$

取 $a_0=1$,则 $y_1=e^x$ 为方程的一个特解.设 $y_2=uy_1=ue^x$ 是另一特解,代入方程,消去 e^x 整理得

$$xu''+(x-m)u'=0.$$

解此方程,由 $$\frac{du'}{u'}=\frac{m-x}{x}dx,$$

得 $$\int\frac{du'}{u'}=m\int\frac{dx}{x}-\int dx,$$

即 $$\ln u'=m\ln x-x,$$

$$u'=x^me^{-x},$$

有 $$u=\int x^me^{-x}dx,$$

故 $$y_2=ue^x=e^x\int x^me^{-x}dx.$$

如果记 $I_m=\int x^me^{-x}dx$,则由分部积分公式

$$\begin{aligned}I_m&=-x^me^{-x}+m\int x^{m-1}e^{-x}dx\\&=-x^me^{-x}+mI_{m-1}.\end{aligned}$$

$$I_0=\int e^{-x}dx=-e^{-x}.$$

从而 $$\begin{aligned}y_2&=e^xI_m=-x^m+m(e^xI_{m-1})=-x^m+me^x[-x^{m-1}e^{-x}+(m-1)I_{m-2}]\\&=-[x^m+mx^{m-1}+m(m-1)x^{m-2}+\cdots+m!\ x+m!]\\&=-m!\left[\frac{x^m}{m!}+\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}+\frac{x^{m-2}}{(m-2)!}+\cdots+x+1\right]\\&=-m!\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}.\end{aligned}$$

故原方程的通解为

$$\begin{aligned}y&=C_1y_1+C_2y_2=C_1e^x+C_2(-m!)\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}\\&=C_1e^x+C_2'\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}.\end{aligned}$$

(4) 设 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是方程的解,代入方程,得

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=x^2-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

有 $$\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n=x^2,$$

将上式左边第一个级数写成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$，则有

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}+(1-n)a_n]x^n=x^2.$$

比较系数，得

$$a_1+a_0=0,\quad 2a_2=0,\quad 3a_3-a_2=1,$$
$$(n+1)a_{n+1}+(1-n)a_n=0\quad(n\geqslant 3).$$

即 $\quad a_1=a_0,\quad a_2=0,\quad a_3=\frac{1}{3},\quad a_{n+1}=\frac{n-1}{n+1}a_n\quad(n\geqslant 3)$，或写成

$$a_n=\frac{n-2}{n}a_{n-1}=\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{n(n-1)}\quad(n\geqslant 4).$$

于是 $$y=a_0-a_0x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{10}x^5+\cdots+\frac{2}{n(n-1)}x^n+\cdots,$$

或写成 $$y=a_0(1-x)+x^3\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{6}x+\frac{1}{10}x^2+\cdots+\frac{2}{(n+2)(n+3)}x^n+\cdots\right].$$

(5) 设方程的解为 $y=C+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，则 $y'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$. 代入方程，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-C-\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=x^2-2x,$$

即 $$\sum_{n=1}^{\infty}[na_n+(n+1)a_{n+1}-a_n]x^n+a_1-C=x^2-2x.$$

比较系数得 $$a_1-C=0,2a_2=-2,a_2+3a_3=1,$$
$$(n-1)a_n+(n+1)a_{n+1}=0\quad(n\geqslant 3),$$

即

$$a_1=C,a_2=-1,a_3=\frac{2}{3},a_{n+1}=-\frac{n-1}{n+1}a_n\quad(n\geqslant 3)\text{或写成}$$

$$a_n=-\frac{n-2}{n}a_{n-1}=\left(-\frac{n-2}{n}\right)\left(-\frac{n-3}{n-1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(-\frac{2}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}=\frac{(-1)^{n-1}4}{n(n-1)}\quad(n\geqslant 4).$$

于是 $$y=C+Cx-x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{15}x^6+\cdots.$$

2. 试用幂级数求下列方程满足所给初始条件的特解：

(1) $y'=y^2+x^3,y|_{x=0}=\frac{1}{2}$；

(2) $(1-x)y'+y=1+x,y|_{x=0}=0$；

(3) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+x\cos t=0, x|_{t=0}=a, \dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=0$.

解 (1) 因 $y|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$,故设方程的特解为 $y=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$,则

$y'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=a_1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$. 代入方程,有

$$\begin{aligned}a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n &= x^3+\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right)^2\\&=x^3+\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right)^2\\&=x^3+\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+[a_1^2x^2+2a_1a_2x^3+(a_2^2+\\&\quad 2a_1a_3)x^4+(\sum_{i+j=n}a_ia_j)x^n+\cdots].\end{aligned}$$

即
$$a_1+(2a_2-a_1)x+(3a_3-a_2-a_1^2)x^2+(4a_4-a_3-2a_1a_2)x^3$$
$$+\cdots+\left[(n+1)a_{n+1}-a_n-\sum_{i+j=n}a_ia_j\right]x^n+\cdots=\frac{1}{4}+x^3.$$

比较系数,得 $a_1=\dfrac{1}{4}, 2a_2-a_1=0, 3a_3-a_2-a_1^2=0, 4a_4-a_3-2a_1a_2=1$,

$$\cdots,(n+1)a_{n+1}-a_n-\sum_{i+j=n}a_ia_j=0.\ (n\geqslant 4).$$

依次解得 $a_1=\dfrac{1}{4},\quad a_2=\dfrac{1}{8},\quad a_3=\dfrac{1}{16},\quad a_4=\dfrac{9}{32},\cdots$.

故 $y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{16}x^3+\dfrac{9}{32}x^4+\cdots$.

(2) 因 $y\Big|_{x=0}=0$,故设 $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$. 是方程的特解,则 $y'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$,

代入方程,有

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=1+x,$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=1+x,$$

或写成

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}+(1-n)a_n]x^n=1+x.$$

比较系数,得 $a_1=1, a_2=\dfrac{1}{2}, a_{n+1}=\dfrac{n-1}{n+1}a_n\ (n\geqslant 2)$,或写成

$$a_n=\frac{n-2}{n}a_{n-2}=\frac{(n-2)(n-3)\cdots 1}{n(n-1)\cdots 3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{n(n-1)}\quad (n\geqslant 3).$$

故 $$y=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}x^n+\cdots.$$

(3) 因 $x\Big|_{t=0}=a, x'\Big|_{t=0}=0$,故设 $x=a+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nt^n$ 是方程的特解,

则 $$x''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}=2a_2+2\cdot 3a_3t+3\cdot 4t^2+\cdots+(n+1)(n+2)t^n\cdots,$$

而 $$\cos t=1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}+\cdots,$$

代入方程,有

$$(2a_2+6a_3t+12a_4t^2+\cdots)+(a+a_2t^2+a_3t^3+\cdots)\left(1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4-\frac{1}{6!}t^6+\cdots\right)=0.$$

利用幂级数的乘法运算并合并同次幂的项,比较系数得

$$a_2=-\frac{a}{2},\qquad a_3=0,$$

$$a_4=\frac{2a}{4!},\qquad a_5=0,$$

$$a_6=-\frac{9a}{6!},\qquad a_7=0,$$

$$a_8=\frac{55a}{8!},\qquad a_9=0,$$

$$\cdots\cdots$$

故 $$x=a\left(1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{2}{4!}t^4-\frac{9}{6!}t^6+\frac{55}{8!}t^8-\cdots\right).$$

*习 题 12－12

1. 求下列微分方程组的通解:

(1) $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=z,\\ \dfrac{dz}{dx}=y;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=y,\\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=x;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=-x+y+3,\\ \dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}=x+y-3;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+5x+y=e^t,\\ \dfrac{dy}{dt}-x-3y=e^{2t};\end{cases}$

(5) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+2x+\dfrac{dy}{dt}+y=t,\\ 5x+\dfrac{dy}{dt}+3y=t^2;\end{cases}$

(6) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-3x+2\dfrac{dy}{dt}+4y=2\sin t,\\ 2\dfrac{dx}{dt}+2x+\dfrac{dy}{dt}-y=\cos t.\end{cases}$

说明 1° 求解线性微分方程组一般采用"消去法"：

从方程组中消去一些未知函数及其各阶导数，得到只含一个未知函数的线性微分方程，然后求出该线性微分方程的通解. 对于学过《线性代数》的读者，可以记 $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，将微分方程组写成代数线性方程组的形式，然后用类似于克拉默法则的方法，消去一些未知函数而获得一个未知函数的微分方程，本题为(4)(5)(6)题采用这种方法来解.

2° 当用"消去法"求得一个未知函数的通解后，求另一未知函数的通解时，一般不必再积分，否则会出现新的任意常数.

解 (1) 将 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z, & ①\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y, & ②\end{cases}$ 中①式的两端关于 x 求导，得 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，代入②式得 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=y$，即

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-y=0,$$

由它的特征方程 $r^2-1=0$，解得 $r_{1,2}=\pm1$. 于是得

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

从而由①，得

$$z=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1\mathrm{e}^x-C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

故方程组的通解为

$$\begin{cases}y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x},\\ z=C_1\mathrm{e}^x-C_2\mathrm{e}^{-x}.\end{cases}$$

(2) 将 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=y, & ①\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=x, & ②\end{cases}$ 中①式两端关于 t 求二阶导数，得 $\frac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$，代入②式得 $\frac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}=x$，即

$$\frac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}-x=0$$

由它的特征方程 $r^4-1=0$，解得 $r_{1,2}=\pm1$，$r_{3,4}=\pm i$. 于是得

$$x=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t$$

再由①，得

$$y=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t.$$

故方程组的通解为 $\begin{cases}x=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t,\\ y=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t.\end{cases}$

(3) 将 $\begin{vmatrix} x'+y'=-x+y+3, & ① \\ x'-y'=x+y-3, & ② \end{vmatrix}$ 的①+②得 $\qquad x'=y \qquad ③$

代入①式，得 $x'+x''=-x+x'+3$，即

$$x''+x=3. \qquad ④$$

由它对应的齐次方程的特征方程 $r^2+1=0$，解得 $r_{1,2}=\pm i$，且易见 $x^*=3$ 是④的特解，于是

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t+3.$$

由③得
$$y=x'=-C_1\sin t+C_2\cos t,$$

故方程组的通解为
$$\begin{cases} x=C_1\cos t+C_2\sin t+3, \\ y=-C_1\sin t+C_2\cos t. \end{cases}$$

(4) 记 $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，则方程组可表示为

$$\begin{cases} (D+5)x+y=\mathrm{e}^t, & ① \\ -x+(D-3)y=\mathrm{e}^{2t}, & ② \end{cases}$$

记 $\Delta=\begin{vmatrix} D+5 & 1 \\ -1 & D-3 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} \mathrm{e}^t & 1 \\ \mathrm{e}^{2t} & D-3 \end{vmatrix}$，则有 $\Delta x=\Delta_x$，即

$$(D^2+2D-14)x=-2\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t}. \qquad ③$$

由其对应的齐次方程的特征方程 $r^2+2r-14=0$，解得 $r_{1,2}=-1\pm\sqrt{15}i$，并令 $x^*=A\mathrm{e}^t+B\mathrm{e}^{2t}$ 是方程③的特解，代入③并比较系数，得

$$x^*=\frac{2}{11}\mathrm{e}^t+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{2t},$$

于是得

$$x=C_1\mathrm{e}^{(-1+\sqrt{15})t}+C_2\mathrm{e}^{(-1-\sqrt{15}t)}+\frac{2}{11}\mathrm{e}^t+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{2t},$$

并由①得

$$y=\mathrm{e}^t-(D+5)x, \quad 即$$

$$y=(-4-\sqrt{15})C_1\mathrm{e}^{(-1+\sqrt{15})t}-(4-\sqrt{15})C_2\mathrm{e}^{(-1-\sqrt{15})t}-\frac{1}{11}\mathrm{e}^t-\frac{7}{6}\mathrm{e}^{2t}.$$

(5) 记 $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，方程组可表示为

$$\begin{cases} (D+2)x+(D+1)y=t, & ① \\ 5x+(D+3)y=t^2, & ② \end{cases}$$

则有
$$\begin{vmatrix} D+2 & D+1 \\ 5 & D+3 \end{vmatrix} y=\begin{vmatrix} D+2 & t \\ 5 & t^2 \end{vmatrix},$$

即
$$(D^2+1)y=2t^2-3t. \qquad ③$$

③所对应的齐次方程的特征方程的根为 $r_{1,2}=\pm i$，令 $y^*=At^2+Bt+C$，代入③并比较系数，可得 $A=2, B=-3, C=-4$. 于是

$$y=C_1\cos t+C_2\sin t+2t^2-3t-4.$$

再由②得 $x=\frac{1}{5}[t^2-(D+3)y]$，即

$$x=-\frac{3C_1+C_2}{5}\cos t+\frac{C_1-3C_2}{5}\sin t-t^2+t+3.$$

(6) 记 $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，方程组可表示为

$$\begin{cases}(D-3)x+(2D+4)y=2\sin t, & ① \\ (2D+2)x+(D-1)y=\cos t, & ②\end{cases}$$

则有
$$\begin{vmatrix}D-3 & 2D+4\\ 2D+2 & D-1\end{vmatrix}x=\begin{vmatrix}2\sin t & 2D+4\\ \cos t & D-1\end{vmatrix},$$

即
$$(3D^2+16D+5)x=2\cos t. \qquad ③$$

③所对应的齐次方程的特征方程为 $3r^2+16r+5=0$，有根 $r_1=-5, r_2=-\frac{1}{3}$.

令③的特解 $x^*=A\cos t+B\sin t$，代入③并比较系数，可得 $A=\frac{1}{65}, B=\frac{8}{65}$. 于是

$$x=C_1\mathrm{e}^{-5t}+C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t}+\frac{1}{65}\cos t+\frac{8}{65}\sin t.$$

再由①$-2\times$②，得

$$-(3D+7)x+6y=2\sin t-2\cos t,$$

即
$$y=\frac{1}{6}[2\sin t-2\cos t+(3D+7)x]$$
$$=-\frac{4}{3}C_1\mathrm{e}^{-5t}+C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t}+\frac{61\sin t-33\cos t}{130}.$$

2. 求下列微分方程组满足所给初始条件的特解：

(1) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y, x|_{t=0}=0,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x, y|_{t=0}=1;\end{cases}$
(2) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-x=0, x|_{t=0}=1,\\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+y=0, y|_{t=0}=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+3x-y=0, x|_{t=0}=1,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-8x+y=0, y|_{t=0}=4;\end{cases}$
(4) $\begin{cases}2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-4x+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y=\mathrm{e}^t, x|_{t=0}=\frac{3}{2},\\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+3x+y=0, y|_{t=0}=0;\end{cases}$

(5) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+2x-\dfrac{dy}{dt}=10\cos t, x|_{t=0}=2,\\ \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}+2y=4e^{-2t}, y|_{t=0}=0;\end{cases}$

(6) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-x+\dfrac{dy}{dt}+3y=e^{-t}-1, x|_{t=0}=\dfrac{48}{49},\\ \dfrac{dx}{dt}+2x+\dfrac{dy}{dt}+y=e^{2t}+t, y|_{t=0}=\dfrac{95}{98}.\end{cases}$

解 (1) 记 $D=\dfrac{d}{dt}$,原方程组即为

$$\begin{cases}Dx-y=0, & ①\\ x+Dy=0. & ②\end{cases}$$

则有
$$\begin{vmatrix}D & -1\\ 1 & D\end{vmatrix}x=0,$$
即
$$(D^2+1)x=0. \quad ③$$
由③的特征方程 $r^2+1=0$,解得 $r_{1,2}=\pm i$,于是
$$x=C_1\cos t+C_2\sin t.$$
代入初始条件 $t=0,x=0$,得 $C_1=0$.故 $x=C_2\sin t$.

又由①得
$$y=Dx=C_2\cos t,$$
代入初始条件 $t=0,y=1$,得 $C_2=1$.

故方程组的特解为
$$\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\cos t.\end{cases}$$

(2) 记 $D=\dfrac{d}{dt}$,原方程组即为
$$\begin{cases}(D^2-1)x+2Dy=0, & ①\\ Dx+y=0. & ②\end{cases}$$
则有
$$\begin{vmatrix}D^2-1 & 2D\\ D & 1\end{vmatrix}x=0,\text{即}$$
$$(D^2+1)x=0. \quad ③$$
由③的特征方程 $r^2+1=0$,解得 $r_{1,2}=\pm i$,于是
$$x=C_1\cos t+C_2\sin t.$$
代入初始条件 $t=0,x=1$,得 $C_1=1$,即 $x=\cos t+C_2\sin t$.

又由②得
$$y=-Dx=\sin t-C_2\cos t,$$
代入初始条件 $t=0,y=0$,得 $C_2=0$.

故方程组的特解为
$$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t.\end{cases}$$

(3) 记 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$,方程组即为
$$\begin{cases}(D+3)x-y=0, & ①\\ -8x+(D+1)y=0. & ②\end{cases}$$
则有
$$\begin{vmatrix}D+3 & -1\\ -8 & D+1\end{vmatrix}x=0,$$
即
$$(D^2+4D-5)x=0. \qquad ③$$
由③的特征方程 $r^2+4r-5=0$ 解得 $r_1=1,r_2=-5$.于是
$$x=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-5t}.$$
又由①得
$$y=(D+3)x=4C_1\mathrm{e}^t-2C_2\mathrm{e}^{-5t}.$$
代入初始条件 $t=0,x=1,y=4$,就有
$$\begin{cases}C_1+C_2=1,\\ 4C_1-2C_2=4,\end{cases}$$
解得 $C_1=1,C_2=0$.故方程组的特解为
$$\begin{cases}x=\mathrm{e}^t,\\ y=4\mathrm{e}^t.\end{cases}$$

(4) 记 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$,方程组即为
$$\begin{cases}(2D-4)x+(D-1)y=\mathrm{e}^t, & ①\\ (D+3)x+y=0. & ②\end{cases}$$
则有
$$\begin{vmatrix}2D-4 & D-1\\ D+3 & 1\end{vmatrix}x=\begin{vmatrix} & D-1\\ 0 & 1\end{vmatrix}$$
即
$$(D^2+1)x=-\mathrm{e}^t. \qquad ③$$
由方程③对应的齐次方程的特征方程 $r^2+1=0$ 解得
$$r_{1,2}=\pm i.\text{令 } x^*=A\mathrm{e}^t,$$
代入方程③并比较系数得 $A=-\dfrac{1}{2}$,即 $x^*=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t$.于是
$$x=C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{1}{2}\mathrm{e}^t.$$
又由②得 $y=-(D+3)x=(C_1-3C_2)\sin t-(3C_1+C_2)\cos t+2\mathrm{e}^t$.

代入初始条件 $t=0,x=\dfrac{3}{2},y=0$,就有
$$\begin{cases}C_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2},\\ -3C_1-C_2+2=0,\end{cases}$$

解得 $C_1=2, C_2=-4$. 故方程组的特解为

$$\begin{cases} x=2\cos t-4\sin t-\dfrac{1}{2}e^t, \\ y=14\sin t-2\cos t+2e^t. \end{cases}$$

(5) 记 $D=\dfrac{d}{dt}$,方程组即为

$$\begin{cases} (D+2)x-Dy=10\cos t, & ① \\ Dx+(D+2)y=4e^{-2t}. & ② \end{cases}$$

则有
$$\begin{vmatrix} D+2 & -D \\ D & D+2 \end{vmatrix} y=\begin{vmatrix} D+2 & 10\cos t \\ D & 4e^{-2t} \end{vmatrix},$$

即
$$(D^2+2D+2)y=5\sin t \qquad ③$$

由方程③对应的齐次方程的特征方程 $r^2+2r+2=0$,解得 $r_{1,2}=-1\pm i$. 令 $y^*=A\cos t+B\sin t$,代入方程③并比较系数,得 $A=-2, B=1$. 于是

$$y=e^{-t}(C_1\cos t+C_2\sin t)-2\cos t+\sin t.$$

又由① - ②得

$$\begin{aligned} x &=5\cos t-2e^{-2t}+(D+1)y \\ &=e^{-t}(C_2\cos t-C_1\sin t)+4\cos t+3\sin t-2e^{-2t}. \end{aligned}$$

代入初始条件 $t=0, x=2, y=0$,有

$$\begin{cases} C_2+4-2=2, \\ C_1-2=0, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} C_2=0, \\ C_1=2. \end{cases}$$

故方程组的特解为
$$\begin{cases} x=4\cos t+3\sin t-2e^{-2t}-2e^{-t}\sin t, \\ y=-2\cos t+\sin t+2e^{-t}\cos t. \end{cases}$$

(6) 记 $D=\dfrac{d}{dt}$,方程组即为

$$\begin{cases} (D-1)x+(D+3)y=e^{-t}-1, & ① \\ (D+2)x+(D+1)y=e^{2t}+t. & ② \end{cases}$$

则有
$$\begin{vmatrix} D-1 & D+3 \\ D+2 & D+1 \end{vmatrix} x=\begin{vmatrix} e^{-t}-1 & D+3 \\ e^{2t}+1 & D+1 \end{vmatrix},$$

即
$$(5D+7)x=5e^{2t}+3t+2 \qquad ③$$

亦即
$$Dx+\frac{7}{5}x=e^{2t}+\frac{3}{5}t+\frac{2}{5}.$$

由一阶线性方程的通解公式,得

$$\begin{aligned} x &= e^{-\int\frac{7}{5}dt}\left[\int\left(e^{2t}+\frac{3}{5}t+\frac{2}{5}\right)e^{\int\frac{7}{5}dt}dt+C\right] \\ &=Ce^{-\frac{7}{5}t}+\frac{5}{17}e^{2t}+\frac{3}{7}t-\frac{1}{49} \end{aligned}$$

代入初始条件 $t=0,x=\frac{48}{49}$,得 $C=\frac{12}{17}$.于是

$$x=\frac{12}{17}e^{-\frac{7}{5}t}+\frac{5}{17}e^{2t}+\frac{3}{7}t-\frac{1}{49}.$$

由①-②得

$$\begin{aligned}y&=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}(e^{-t}-e^{2t}-t-1)\\&=\frac{18}{17}e^{-\frac{7}{5}t}-\frac{1}{17}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{7}t-\frac{26}{49}.\end{aligned}$$

总习题十二

1. 填空

(1) $xy'''+2x^2y'^2+x^3y=x^4+1$ 是____阶微分方程;

(2) 若 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 是全微分方程,则函数 M、N 应满足________.

(3) 与积分方程 $y=\int_{x_0}^{x}f(x,y)dx$ 等价的微分方程初值问题是____________.

(4) 已知 $y=1$、$y=x$、$y=x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解,则该方程的通解为____________.

解 (1) 3.

(2) $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

(3) $y'=f(x,y),y|_{x=x_0}=0$.

注 1° 方程中 $\int_{x_0}^{x}f(x,y)dx$ 的积分上限 x 是积分方程的变量,它是与 y 相对应的;而积分表达式中 $f(x,y)dx$ 中的 x 是积分变量,不能将它与积分上限相混淆,故积分方程应理解为 $y=\int_{x_0}^{x}f(t,y)dt$.

2° 由于积分方程 $y=\int_{x_0}^{x}f(t,y)dt$ 确定了隐函数 $y=y(x)$,因此积分方程中的 y 取 $y=y(x)$后,有恒等式

$$y(x)\equiv\int_{x_0}^{x}f[t,y(t)]dt.$$

于是上式两端对 x 求导,就得 $y'(x)=f[x,y(x)]$,即 $y'=f(x,y)$.显然,当

$x=x_0$时，$y=\int_{x_0}^{x_0} f(x,y)\mathrm{d}x=0$，即 $y|_{x=x_0}=0$.

(4) $y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)+1$.

因为由叠加原理知 $x-1$ 与 x^2-1 是非齐次方程对应的齐次方程的解，且它们是线性无关的.于是根据线性方程通解结构得出以上结论.

2. 求以下列各式所表示的函数为通解的微分方程：

(1) $(x+C)^2+y^2=1$(其中 C 为任意常数)；

(2) $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$(其中 C_1、C_2 为任意常数).

解 (1) 将$(x+C)^2+y^2=1$两端关于 x 求导，得

$$x+C+yy'=0,$$

即有

$$C=-x-yy',$$

将其代入$(x+C)^2+y^2=1$中，得

$$y^2(1+y'^2)=1.$$

(2) 将 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$关于$x$ 求二次导数，得

$$\begin{cases} y'=C_1\mathrm{e}^x+2C_2\mathrm{e}^{2x}, \\ y''=C_1\mathrm{e}^x+4C_2\mathrm{e}^{2x}. \end{cases}$$

把以上两式看成是以 C_1 与 C_2 为未知量的线性方程组，解得

$$C_1=(2y'-y'')\mathrm{e}^{-x},\quad C_2=\frac{1}{2}(y''-y')\mathrm{e}^{-2x},$$

代入 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$中，得

$$y=(2y'-y'')+\frac{1}{2}(y''-y'),$$

即

$$y''-3y'+2y=0.$$

3. 求下列微分方程的通解：

(1) $xy'+y=2\sqrt{xy}$；

(2) $xy'\ln x+y=ax(\ln x+1)$；

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{2(\ln y-x)}$；

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy-x^3y^3=0$；

(5) $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0$；

(6) $yy''-y'^2-1=0$；

(7) $y''+2y'+5y=\sin 2x$；

(8) $y'''+y''-2y'=x(\mathrm{e}^x+4)$；

(9) $(y^4-3x^2)\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}x=0$；

(10) $y'+x=\sqrt{x^2+y}$.

解 (1) 将原方程化为伯努利方程 $y'+\dfrac{1}{x}y=2x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$，并方程两端同乘以 $y^{-\frac{1}{2}}$，得 $\quad y^{-\frac{1}{2}}y'+\dfrac{1}{x}y^{\frac{1}{2}}=2x^{-\frac{1}{2}}$.

令 $y^{\frac{1}{2}}=z$,则 $z'=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'$,且原方程化为

$$z'+\frac{1}{2x}z=x^{-\frac{1}{2}}.$$

由一阶线性方程的通解公式,得

$$\begin{aligned}z&=e^{-\int\frac{1}{2x}dx}\left(\int x^{-\frac{1}{2}}e^{\int\frac{1}{2x}dx}dx+C\right)=x^{-\frac{1}{2}}\left(\int x^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx+C\right)\\&=x^{-\frac{1}{2}}(x+C).\end{aligned}$$

代入 $z=\sqrt{y}$,即得原方程的通解 $x-\sqrt{xy}=C$.

(2) 原方程可化为 $y'+\frac{1}{x\ln x}y=a\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)$,

由一阶线性方程的通解公式,得

$$\begin{aligned}y&=e^{-\int\frac{1}{x\ln x}dx}\left[\int a\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)e^{\int\frac{1}{x\ln x}dx}dx+C\right]\\&=\frac{1}{\ln x}\left[\int a(\ln x+1)dx+C\right]=\frac{1}{\ln x}(ax\ln x+C)\\&=ax+\frac{C}{\ln x}.\end{aligned}$$

故方程的通解为 $$y=ax+\frac{C}{\ln x}.$$

(3) 原方程可表示为 $\frac{dx}{dy}+\frac{2}{y}x=\frac{2\ln y}{y}$,

由一阶线性方程的通解公式,得

$$\begin{aligned}x&=e^{-\int\frac{2}{y}dy}\left(\int\frac{2\ln y}{y}e^{\int\frac{2}{y}dy}dy+C\right)\\&=\frac{1}{y^2}\left(\int 2y\ln y\,dy+C\right)=\frac{1}{y^2}\left(y^2\ln y-\frac{1}{2}y^2+C\right)\\&=\ln y-\frac{1}{2}+\frac{C}{y^2}.\end{aligned}$$

故方程的通解为 $$x=\frac{C}{y^2}+\ln y-\frac{1}{2}.$$

(4) 原方程为伯努利方程 $y'+xy=x^3y^3$.该方程两端同除以 y^3 后成为

$$\frac{y'}{y^3}+x\frac{1}{y^2}=x^3.$$

令 $\frac{1}{y^2}=z$.则 $-2\frac{y'}{y^3}=z'$,且原方程化为

$$z'-2xz=-2x^3.$$

得 $$z=e^{\int 2x dx}\left(\int -2x^3e^{-\int 2x dx}dx+C\right)=e^{x^2}\left(\int -2x^3e^{-x^2}dx+C\right)$$

$$= e^{x^2}\left(x^2e^{-x^2} - \int 2xe^{-x^2}dx + C\right) = e^{x^2}(x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + C)$$
$$= x^2 + 1 + Ce^{x^2}.$$
代入 $z = \frac{1}{y^2}$,即得原方程的通解
$$\frac{1}{y^2} = Ce^{x^2} + x^2 + 1.$$
(5) 由于 $\frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = \frac{1}{\frac{x^2}{y^2}+1}\cdot\frac{ydx - xdy}{y^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}d\left(\frac{x}{y}\right) = d\left(\arctan\frac{x}{y}\right)$,

故原方程可表示为
$$d\left(\frac{x^2}{2}\right) + d\left(\frac{y^2}{2}\right) + d\left(\arctan\frac{x}{y}\right) = 0,$$
即
$$d\left(\frac{x^2+y^2}{2} + \arctan\frac{x}{y}\right) = 0.$$
所以原方程的通解为
$$x^2 + y^2 + 2\arctan\frac{x}{y} = C.$$
(6) 此方程不显含 x,令 $y' = p$,则 $y'' = p\frac{dp}{dy}$,且原方程化为
$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 - 1 = 0.$$
分离变量并积分
$$\frac{pdp}{p^2+1} = \frac{dy}{y}$$
得
$$\frac{1}{2}\ln(p^2+1) = \ln y + \ln C_1,$$
即
$$p^2 + 1 = (C_1y)^2,$$
故
$$p = \pm\sqrt{(C_1y)^2 - 1}.$$
对于 $y' = \sqrt{(C_1y)^2 - 1}$,分离变量并积分
$$x = \int dx = \int\frac{dy}{\sqrt{(C_1y)^2-1}} = \frac{1}{C_1}\int\frac{d(C_1y)}{\sqrt{(C_1y)^2-1}} = \frac{1}{C_1}[\operatorname{arch}(C_1y) - C_2],$$
即
$$C_1y = \operatorname{ch}(C_1x + C_2).$$
对于 $y' = -\sqrt{(C_1y)^2-1}$,类似地可得 $C_1y = \operatorname{ch}[-(C_1x + C_2)] = \operatorname{ch}(C_1x + C_2)$.

故原方程的通解为

$$y=\frac{1}{C_1}\operatorname{ch}(C_1x+C_2).$$

(7) 原方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+2r+5=0$，有根 $r_{1,2}=-1\pm 2i$，故对应齐次方程的通解为 $Y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

因 $f(x)=\sin 2x$，$\lambda+i\omega=2i$ 不是特征方程的根，故令 $y^*=A\cos 2x+B\sin 2x$ 是原方程的特解. 将 y^* 代入原方程，可得

$$(A+4B)\cos 2x+(B-4A)\sin 2x=\sin 2x.$$

比较系数，得 $\begin{cases}A+4B=0,\\B-4A=1,\end{cases}$ 即 $A=-\dfrac{4}{17}, B=\dfrac{1}{17}$.

于是
$$y^*=-\frac{4}{17}\cos 2x+\frac{1}{17}\sin 2x.$$

故原方程的通解为

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{4}{17}\cos 2x+\frac{1}{17}\sin 2x.$$

(8) 原方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^3+r^2-2r=0$，有根 $r_1=0$，$r_2=1$，$r_3=-2$，故对应齐次方程的通解为 $Y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-2x}$.

对于方程
$$y'''+y''-2y'=xe^x, \quad ①$$
因 $f_1(x)=xe^x$，其中 $\lambda=1$ 是特征方程的(单)根，故令 $y_1^*=x(A_1x+B_1)e^x$，代入①中并消去 e^x，得
$$6A_1x+8A_1+3B_1=x,$$
比较系数得 $\begin{cases}6A_1=1,\\8A_1+3B_1=0,\end{cases}$ 即 $A_1=\dfrac{1}{6}, B_1=-\dfrac{4}{9}$.

于是
$$y_1^*=\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{4}{9}x\right)e^x.$$

对于方程
$$y'''+y''-2y'=4x, \quad ②$$
因 $f_2(x)=4x$，其中 $\lambda=0$ 是特征方程的(单)根，故令 $y_2^*=x(A_2x+B_2)$，代入②中，得
$$-4A_2x+2A_2-2B_2=4x.$$
比较系数得
$$A_2=-1, B_2=-1.$$
于是
$$y_2^*=-x^2-x.$$

根据线性方程解的叠加原理得 $y^*=y_1^*+y_2^*$ 是原方程的特解. 故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1+C_2e^x+C_3e^{-2x}+\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{4}{9}x\right)e^x-x^2-x.$$

(9) 原方程可改写成 $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{3}{y}x=-y^3x^{-1}$，这是伯努利方程. 在此方程两端同乘以 x，得 $x\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{3}{y}x^2=-y^3$.

令 $x^2=z$，则$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，且原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-\frac{6}{y}z=-2y^3.$$

解得 $$z=\mathrm{e}^{\int\frac{6}{y}\mathrm{d}y}\left(\int -2y^3\mathrm{e}^{-\int\frac{6}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)=y^6\left(\int -\frac{2}{y^3}\mathrm{d}y+C\right)$$

$$=y^6\left(\frac{1}{y^2}+C\right)-y^4+Cy^6.$$

代入 $z=x^2$，得原方程的通解 $x^2=y^4+Cy^6$.

(10) 令 $u=\sqrt{x^2+y}$，即 $y=u^2-x^2$，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-2x$.

且原方程化为 $2u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-x=u$，即 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{u}\right)=\frac{1}{2}$.

又令$\frac{u}{x}=v$，即 $u=xv$，则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=v+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.且原方程化为

$$v+x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{2v}=\frac{1}{2}.$$

分离变量得 $$\frac{v\mathrm{d}v}{2v^2-v-1}=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

积分

$$-\frac{1}{2}\ln x=\int\frac{v\mathrm{d}v}{2v^2-v-1}=\frac{1}{3}\left(\int\frac{1}{v-1}\mathrm{d}v+\int\frac{1}{2v+1}\mathrm{d}v\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[\ln(v-1)+\frac{1}{2}\ln(2v-1)\right]+C_1=\frac{1}{6}\ln[(v-1)^2(2v-1)]+C_1$$

即 $$(v-1)^2(2v-1)x^3=C' \quad (C'=\mathrm{e}^{-6C_1}).$$

代入 $v=\frac{u}{x}$，得

$$2u^3-3xu^2+x^3=C'.$$

再代入 $u=\sqrt{x^2+y}$，得原方程的通解

$$2(x^2+y)^{\frac{3}{2}}-3x(x^2+y)+x^3=C',$$

即 $$(x^2+y)^{\frac{3}{2}}=x^3+\frac{3}{2}xy+C \quad \left(C=\frac{C'}{2}\right).$$

4. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $y^3\mathrm{d}x+2(x^2-xy^2)\mathrm{d}y=0$，$x=1$ 时 $y=1$；

(2) $y''-ay'^2=0$，$x=0$ 时 $y=0$，$y'=-1$；

(3) $2y''-\sin 2y=0$，$x=0$ 时 $y=\frac{\pi}{2}$，$y'=1$；

(4) $y''+2y'+y=\cos x$, $x=0$ 时 $y=0$, $y'=\dfrac{3}{2}$.

解 (1) 原方程可以表示成伯努利方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{2}{y}x=-\frac{2}{y^3}x^2,$$

即

$$x^{-2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{2}{y}x^{-1}=-\frac{2}{y^3}.$$

令 $z=x^{-1}$,则$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=-x^{-2}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$,且原方程化为一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\frac{2}{y}z=\frac{2}{y^3}.$$

解得

$$z=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\left(\int\frac{2}{y^3}\mathrm{e}^{\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)=\frac{1}{y^2}\left(\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y+C\right)$$

$$=\frac{1}{y^2}(2\ln y+C).$$

将 $z=x^{-1}$代入上式,得 $x^{-1}=\dfrac{1}{y^2}(2\ln y+C)$,即原方程的通解

$$y^2=x(2\ln y+C).$$

由初始条件 $x=1$, $y=1$,得 $C=1$,故所求特解为

$$y^2=x(2\ln y+1).$$

(2) 令 $y'=p$,则原方程化为 $p'-ap^2=0$. 分离变量并积分

$$\int\frac{\mathrm{d}p}{p^2}=\int a\,\mathrm{d}x$$

得

$$-\frac{1}{p}=ax+C_1,$$

即

$$p=-\frac{1}{ax+C_1}.$$

代入初始条件 $x=0$, $p=-1$,得 $C_1=1$,从而有

$$y'=-\frac{1}{ax+1},$$

于是

$$y=-\int\frac{1}{ax+1}\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)+C_2.$$

代入初始条件 $x=0$, $y=0$,得 $C_2=0$. 故所求特解为

$$y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1).$$

(3) 在方程 $2y''-\sin 2y=0$ 两端同乘以 y',则有

$$2y'y''-\sin 2yy'=0,$$

即
$$\left(y'^2+\frac{1}{2}\cos 2y\right)'=0,$$
于是
$$y'^2+\frac{1}{2}\cos 2y=C_1.$$
代入初始条件 $y=\frac{\pi}{2}, y'=1$，得 $C_1=\frac{1}{2}$. 故有 $y'^2+\frac{1}{2}\cos 2y=\frac{1}{2}$，即
$$y'^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2y=\sin^2 y,$$
并因 $y=\frac{\pi}{2}$时，$y'=1$，故取
$$y'=\sin y.$$
分离变量并积分
$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\sin y}=\int\mathrm{d}x$$
得
$$\ln\tan\frac{y}{2}=x+C_2.$$
代入初始条件 $x=0, y=\frac{\pi}{2}$，得 $C_2=0$，故所求特解为 $\ln\left(\tan\frac{y}{2}\right)=x$，即
$$y=2\arctan \mathrm{e}^x.$$
(4) 由原方程对应齐次方程的特征方程 $r^2+2r+1=0$，解得 $r_{1,2}=-1$，故对应齐次方程的通解为 $Y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}$.

因 $f(x)=\cos x$，$\lambda+i\omega=0+i$ 不是特征方程的根，故令 $y^*=A\cos x+B\sin x$ 是原方程的特解，并代入原方程，得
$$-2A\sin x+2B\cos x=\cos x.$$
比较系数得 $A=0, B=\frac{1}{2}$，故 $y^*=\frac{1}{2}\sin x$，且原方程的通解为
$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\sin x,$$
并有
$$y'=(C_2-C_1-C_2x)\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\cos x$$
代入初始条件 $x=0, y=0, y'=\frac{3}{2}$，有
$$\begin{cases}C_1=0,\\ C_2-C_1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\end{cases}\text{即 } C_1=0, C_2=1.$$
故所求特解为
$$y=x\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\sin x.$$

5. 已知某曲线经过点(1,1),它的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标,求它的方程.

解 设(x,y)为曲线上的点,则曲线在该点处的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x),$$

切线在纵轴上的截距为 $y-xy'$.并依题意,有

$$y-xy'=x,\quad y|_{x=1}=1.$$

将上述方程写成
$$y'-\frac{1}{x}y=-1,$$

可解得
$$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int-e^{-\int\frac{1}{x}dx}+C\right)=x\left(\int-\frac{1}{x}dx+C\right)$$
$$=x(C-\ln x).$$

代入初始条件 $x=1,y=1$,得 $C=1$.故所求曲线的方程为

$$y=x(1-\ln x).$$

6. 已知某车间的容积为 $30\times30\times6\ m^3$,其中的空气含0.12%的CO_2(以容积计算).现以含$CO_2$0.04%的新鲜空气输入,问每分钟应输入多少,才能在30 min后使车间空气中CO_2的含量不超过0.06%?(假定输入的新鲜空气与原有空气很快混合均匀后,以相同的流量排出.)

解 设每分钟输入 $v(m^3)$的空气.又设在时刻 t 车间中 CO_2 的浓度为 $x=x(t)(\%)$,则在时间间隔$[t,t+dt]$内,车间内 CO_2 的含量的改变量为

$$30\times30\times6\ dx=0.04\times10^{-2}vdt-vxdt$$

即
$$\frac{dx}{x-0.000\,4}=-\frac{v}{5\,400}dt$$

且
$$x|_{t=0}=0.001\,2.$$

将上述微分方程两端积分,得

$$\ln(x-0.000\,4)=-\frac{v}{5\,400}t+\ln C,$$

即
$$x=0.000\,4+Ce^{-\frac{v}{5\,400}t}.$$

代入初始条件 $t=0,x=0.001\,2$,可得 $C=0.000\,8$.于是有

$$x=0.000\,4+0.000\,8e^{-\frac{v}{5\,400}t}.$$

依题意,当 $t=30$ 时,$x\leqslant0.000\,6$,将 $t=30,x=0.000\,6$ 代入上式,解得

$$v=180\ln4\approx250\ (m^3).$$

故每分钟至少输入新鲜空气 250 m^3.

7. 设可导函数 $\varphi(x)$满足

$$\varphi(x)\cos x+2\int_0^x\varphi(t)\sin t\,dt=x+1,$$

求 $\varphi(x)$.

解 在方程 $\varphi(x)\cos x+2\int_0^x \varphi(t)\sin t\,\mathrm{d}t=x+1$ 两端关于 x 求导,得

$$\varphi'(x)\cos x-\varphi(x)\sin x+2\varphi(x)\sin x=1,$$

即

$$\varphi'+\tan x\cdot\varphi=\sec x,$$

且在原方程中取 $x=0$,可得 $\varphi(0)=1$.

由一阶线性方程的通解公式,得

$$\begin{aligned}\varphi &= \mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left(\int\sec x\,\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\ &=\cos x\left(\int\sec^2 x\mathrm{d}x+C\right)=\cos x(\tan x+C)\\ &=\sin x+C\cos x.\end{aligned}$$

代入初始条件 $x=0,\varphi=1$,可得 $C=1$,故

$$\varphi(x)=\sin x+\cos x.$$

8. 设函数 $u=f(r),r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在 $r>0$ 内满足拉普拉斯(Laplace)方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

其中 $f(r)$二阶可导,且 $f(1)=f'(1)=1$.试将拉普拉斯方程化为以 r 为自变量的常微分方程,并求 $f(r)$.

解 因 $u=f(r)=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$,故有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=f'(r)\cdot\frac{x}{r}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=f''(r)\left(\frac{x}{r}\right)^2+f'(r)\cdot\frac{r-x\cdot\frac{x}{r}}{r^2}\\ &=\frac{x^2}{r^2}\cdot f''(r)+\frac{r^2-x^2}{r^3}\cdot f'(r).\end{aligned}$$

同理有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^2}\cdot f''(r)+\frac{r^2-y^2}{r^3}\cdot f'(r),\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{z^2}{r^2}\cdot f''(r)+\frac{r^2-z^2}{r^3}\cdot f'(r).$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}&=\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\cdot f''(r)+\frac{3r^2-x^2-y^2-z^2}{r^3}\cdot f'(r)\\ &=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r).\end{aligned}$$

故拉普拉斯方程化为

$$f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0.$$

令 $f'=p$，则上述方程化为 $p'+\frac{2}{r}p=0$，分离变量并积分

$$\int\frac{\mathrm{d}p}{p}=\int-\frac{2}{r}\mathrm{d}r,$$

得
$$\ln p=-2\ln r+C_1.$$
代入初始条件 $r=1,p=f'(1)=1$，得 $C_1=0$，故 $\ln p=-2\ln r$，即

$$f'(r)=\frac{1}{r^2}.$$

于是
$$f(r)=\int\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r=-\frac{1}{r}+C_2.$$
代入初始条件 $r=1,f(1)=1$，得 $C_2=2$. 故

$$f(r)=2-\frac{1}{r}.$$

9. 设 $y_1(x)$、$y_2(x)$是二阶齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个解，令

$$W(x)=\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x),$$

证明：(1) $W(x)$满足方程 $W'+p(x)W=0$；

(2) $W(x)=W(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}$.

证 (1) 依题意，对 $i=1,2$，有

$$y_i''+p(x)y_i'+q(x)y_i=0,$$

即
$$y_i''+p(x)y_i'=-q(x)y_i.$$
于是
$$\begin{aligned}&W'+p(x)W\\&=(y_1'y_2'+y_1y_2''-y_1''y_2-y_1'y_2')+p(x)(y_1y_2'-y_1'y_2)\\&=y_1[y_2''+p(x)y_2']-y_2[y_1''+p(x)y_1']\\&=y_1[-q(x)y_1]-y_2[-q(x)y_1]=0.\end{aligned}$$
故 W 满足所给微分方程.

(2) 因 $W'+p(x)W=0$，分离变量得$\frac{\mathrm{d}W}{W}=-p(x)\mathrm{d}x$. 将上式两端分别在 $[W_0,W]$与$[x_0,x]$上积分，得

$$\ln W-\ln W_0=-\int_{x_0}^{x}p(x)\mathrm{d}x,\text{其中 } W_0=W(x_0).$$

于是得
$$W=W(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(x)\mathrm{d}x}.$$

*10. 求下列欧拉方程的通解：

(1) $x^2y''+3xy'+y=0$;

(2) $x^2y''-4xy'+6y=x$.

解 (1) 令 $x=e^t$，即 $t=\ln x$，并记 $D=\dfrac{d}{dt}$，则原方程可化为

$$[D(D-1)+3D+1]y=0,$$

即

$$(D^2+2D+1)y=0.$$

该方程的特征方程为 $r^2+2r+1=0$，有根 $r_{1,2}=-1$，于是该方程的通解为

$$y=(C_1+C_2t)e^{-t},$$

故原方程的通解为

$$y=\frac{C_1+C_2\ln x}{x}.$$

(2) 令 $x=e^t$，即 $t=\ln x$，并记 $D=\dfrac{d}{dt}$，则原方程可化为

$$[D(D-1)-4D+6]y=e^t,$$

即

$$(D^2-5D+6)y=e^t.$$

该方程对应齐次方程的特征方程为 $r^2-5r+6=0$，有根 $r_1=2, r_2=3$. 故齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}.$$

因 $f(t)=e^t$. $\lambda=1$ 不是特征方程的根，故可令 $y^*=Ae^t$ 是非齐次方程的特解. 代入 $(D^2-5D+6)y=e^t$ 中并消去 e^t，得 $A=\dfrac{1}{2}$，即

$$y^*=\frac{1}{2}e^t.$$

于是得

$$y=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}+\frac{1}{2}e^t,$$

即原方程的通解为

$$y=C_1x^2+C_2x^3+\frac{x}{2}.$$

*11. 求下列常系数线性微分方程组的通解：

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+2\dfrac{dy}{dt}+y=0,\\ 3\dfrac{dx}{dt}+2x+4\dfrac{dy}{dt}+3y=t;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\dfrac{dx}{dt}+x+\dfrac{dy}{dt}+y=0,\\ \dfrac{dx}{dt}+x+\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}+y=e^t.\end{cases}$

解 (1) 记 $D=\dfrac{d}{dt}$，方程组可表示为

$$\begin{cases} Dx+(2D+1)y=0, & ① \\ (3D+2)x+(4D+3)y=t. & ② \end{cases}$$

则有
$$\begin{vmatrix} D & 2D+1 \\ 3D+2 & 4D+3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 0 & 2D+1 \\ t & 4D+3 \end{vmatrix},$$

即
$$(2D^2+4D+2)x=-t-2 \qquad ③$$

方程③对应齐次方程的特征方程为 $2r^2+4r+2=0$,有根 $r_{1,2}=-1$.因 $f(t)=-t-2$,故令 $x^*=At+B$ 是③的特解,代入③中,即得 $A=\dfrac{1}{2}$,$B=0$.故方程③有通解

$$x=(C_1+C_2t)e^{-t}+\frac{1}{2}t.$$

又由②-2×①可得

$$\begin{aligned} y&=-(D+1)x+t \\ &=-(C_1+C_2+C_2t)e^{-t}-\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故方程组的通解为

$$\begin{cases} x=(C_1+C_2t)e^{-t}+\dfrac{1}{2}t, \\ y=-(C_1+C_2+C_2t)e^{-t}-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

(2) 记 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$,方程组可表示为

$$\begin{cases} (D^2+2D+1)x+(D+1)y=0, \\ (D+1)x+(D^2+2D+1)y=e^t, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} (D+1)^2x+(D+1)y=0, & ① \\ (D+1)x+(D+1)^2y=e^t. & ② \end{cases}$$

则有
$$\begin{vmatrix} (D+1)^2 & D+1 \\ D+1 & (D+1)^2 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 0 & D+1 \\ e^t & (D+1)^2 \end{vmatrix}$$

即
$$(D^3+3D^2+2D)x=-e^t. \qquad ③$$

方程③对应齐次方程的特征方程为 $r(r^2+3r+2)=0$,有根 $r_1=0$,$r_2=-1$,$r_3=-2$.而 $f(t)=-e^t$,$\lambda=1$ 不是特征方程的根,故令 $x^*=Ae^t$ 是方程③的特解,代入③中并消去 e^t,可得 $A=-\dfrac{1}{6}$,即 $x^*=-\dfrac{1}{6}e^t$,于是方程③的通解为

$$x=C_1+C_2e^{-t}+C_3e^{-2t}-\frac{1}{6}e^t.$$

又由方程①得

$$(D+1)y=-(D+1)^2x=-D^2x-2Dx-x$$
$$=-C_1-C_3e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t,$$

即
$$y'+y=-C_1-C_3e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t,$$

可解得
$$y=e^{-\int dt}\left[\int\left(-C_1-C_3e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t\right)e^{\int dt}dt+C_4\right]$$
$$=e^{-t}\left[\int\left(-C_1e^t-C_3e^{-t}+\frac{2}{3}e^{2t}\right)dt+C_4\right]$$
$$=-C_1+C_3e^{-2t}+\frac{1}{3}e^t+C_4e^{-t}.$$

故方程组的通解为

$$\begin{cases}x=C_1+C_2e^{-t}+C_3e^{-2t}-\dfrac{1}{6}e^t,\\ y=C_4e^{-t}-C_1+C_3e^{-2t}+\dfrac{1}{3}e^t.\end{cases}$$

二、硕士研究生入学考试数学试题选解

（五）多元函数微分学

1．(1994．Ⅰ，Ⅱ)二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$ 存在，是 $f(x,y)$ 在该点连续的(　　)．

(A) 充分条件而非必要条件．　　(B) 必要条件而非充分条件．

(C) 充分必要条件．　　(D) 既非充分条件又非必要条件．

解　应选(D)．

2．(1997．Ⅰ)二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点(0,0)处(　　)．

(A) 连续、偏导数存在．　　(B) 连续、偏导数不存在．

(C) 不连续、偏导数存在．　　(D) 不连续、偏导数不存在．

解　$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$，同理，$f_y(0,0)=0$，故偏导数存在．又当 (x,y) 沿 $y=kx$ 趋向于(0,0)时

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+(kx)^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

随着 k 的不同，该极限值也不同，所以极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在，$f(x,y)$ 在(0,0)不连续．应选(C)．

3．(2002．Ⅰ)考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面4条性质：

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，

② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续，

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，

④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在．

若用"$P\Rightarrow Q$"表示可由性质 P 推出性质 Q，则有

(A) ②⇒③⇒①．　　(B) ③⇒②⇒①．

(C) ③⇒④⇒①．　　(D) ③⇒①⇒④．

解　应选(A)(参阅总习题八习题1的注)．

4. (1991. Ⅰ, Ⅱ)由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $dz=$ ______.

解 在所给方程两端分别取全微分，得

$$yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)=0,$$

因此，在点 $(1,0,-1)$ 处 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y$.

5. (1987. Ⅱ)设 $z=f(u,x,y)$，$u=xe^y$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\frac{\partial u}{\partial x}+f_x=f_u\cdot e^y+f_x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(f_u\cdot e^y+f_x)=\left(f_{uu}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f_{uy}\right)e^y+f_u\cdot e^y+f_{xu}\frac{\partial u}{\partial y}+f_{xy}=f_{uu}\cdot xe^{2y}+f_{uy}\cdot e^y+f_u\cdot e^y+f_{xu}\cdot xe^y+f_{xy}.$$

6. (1988. Ⅰ, Ⅱ)设

$$u=yf\left(\frac{x}{y}\right)+xg\left(\frac{y}{x}\right),$$

其中函数 f,g 具有二阶连续导数，求 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

解 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'\left(\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right),$$

所以

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0.$$

7. (1993. Ⅱ)设 $z=x^3f\left(xy,\frac{y}{x}\right)$，$f$ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^4f'_1+x^2f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^4\left(xf''_{11}+\frac{1}{x}f''_{12}\right)+x^2\left(xf''_{21}+\frac{1}{x}f''_{22}\right)=x^5f''_{11}+2x^3f''_{12}+xf''_{22},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4x^3f'_1+x^4\left(yf''_{11}-\frac{y}{x^2}f''_{12}\right)+2xf'_2+x^2\left(yf''_{21}-\frac{y}{x^2}f''_{22}\right)$$

$$=4x^3f'_1+2xf'_2+x^4f''_{11}-yf''_{22}.$$

8. (1995. Ⅰ, Ⅱ)设 $u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,e^y,z)=0$，$y=\sin x$，其中 f,φ

都具有一阶连续偏导数，且$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$，求$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$. 易见$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos x$.

由
$$2x\varphi_1' + \mathrm{e}^{y}\cos x \cdot \varphi_2' + \varphi_3' \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0,$$
得
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1' + \mathrm{e}^{y}\cos x \cdot \varphi_2'),$$
故
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cos x - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1' + \mathrm{e}^{\sin x}\cos x \cdot \varphi_2').$$

9. (1996. Ⅰ, Ⅱ)设变换$\begin{cases} u = x - 2y, \\ v = x + ay \end{cases}$可把方程
$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$
简化为$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$，求常数 a.

解法一 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$，$\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2\frac{\partial z}{\partial u} + a\frac{\partial z}{\partial v}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4a\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$
将上述结果代入原方程，经整理后得
$$(10 + 5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + (6 + a - a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$$
依题意 a 应满足
$$6 + a - a^2 = 0 \quad 且 \quad 10 + 5a \neq 0,$$
解之得 $a = 3$.

解法二 将 z 视为以 x, y 为中间变量的 u, v 的二元复合函数，由题设可解得
$$x = \frac{au + 2v}{a + 2}, \quad y = \frac{-u + v}{a + 2}.$$
从而 $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{a}{a+2}, \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{a}{a+2}, \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{a+2}, \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{a+2}$,
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{a}{a+2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{a+2}\frac{\partial z}{\partial y},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{a}{a+2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right) - \frac{1}{a+2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{2a}{(a+2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{a-2}{(a+2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{1}{(a+2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

依题意　$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$，即　$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

代入前式，得
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{2a-6}{(a+2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{a-3}{(a+2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

令$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$，得　$a-3=0$，$a+2 \neq 0$，故 $a=3$.

10.（1999. Ⅰ）设 $y=y(x)$，$z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解　分别在 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 的两端对 x 求导，得
$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f + x\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)f', \\ F_x + F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0. \end{cases}$$

整理后得
$$\begin{cases} -xf'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f + xf', \\ F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -F_x. \end{cases}$$

由此解得
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{(f+xf')F_y - xf'F_x}{F_y + xf'F_z}\quad (F_y + xf'F_z \neq 0).$$

11.（2000. Ⅰ）设 $z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶连续导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解　$\frac{\partial z}{\partial x} = yf'_1 + \frac{1}{y}f'_2 - \frac{y}{x^2}g'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(yf'_1 + \frac{1}{y}f'_2 - \frac{y}{x^2}g'\right)$$
$$= f'_1 + y\left(xf''_{11} - \frac{x}{y^2}f''_{12}\right) - \frac{1}{y^2}f'_2 + \frac{1}{y}\left(xf''_{21} - \frac{x}{y^2}f''_{22}\right) - \frac{1}{x^2}g' - \frac{y}{x^3}g''$$
$$= f'_1 - \frac{1}{y^2}f'_2 + xyf''_{11} - \frac{x}{y^3}f''_{22} - \frac{1}{x^2}g' - \frac{y}{x^3}g''.$$

12.（2001. Ⅰ）设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，且 $f(1,1)=1$，

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2,\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3,\varphi(x)=f(x,f(x,x))$. 求$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

解 $\varphi(1)=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1$,

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}=\left.\left[3\varphi^2(x)\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right]\right|_{x=1}=3\varphi^2(x)[f_1'(x,f(x,x))+$$

$$\left.f_2'(x,f(x,x))(f_1'(x,x)+f_2'(x,x))]\right|_{x=1}$$

$$3\cdot1\cdot[2+3(2+3)]=51.$$

13. (1992. Ⅰ,Ⅱ)在曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 的所有切线中,与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线(   ).

(A) 只有1条. (B) 只有2条. (C) 至少有3条. (D) 不存在.

解 曲线在对应于参数 t_0 的点处的切线的方向向量为 $\boldsymbol{T}=(1,-2t_0,3t_0^2)$,该切线与平面平行$\Leftrightarrow\boldsymbol{T}$ 与该平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$垂直$\Leftrightarrow\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}=0\Leftrightarrow 1-4t_0+3t_0^2=1\Leftrightarrow t_0=1$ 或 $t_0=\frac{1}{3}$,故选(B).

14. (1988. Ⅱ)求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上某点 M 处的切平面 π 的方程,使 π 过已知直线 $L:\frac{x-6}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{2z-1}{-2}$.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$,则

$$F_x=2x,\quad F_y=4y,\quad F_z=6z.$$

椭球面在点 $M(x_0,y_0,z_0)$处的切平面 π 的方程为

$$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0,$$

即

$$x_0x+2y_0y+3z_0z=21.$$

因为平面 π 过直线L,故 L 上任意两点,比如 $A\left(6,3,\frac{1}{2}\right),B\left(0,0,\frac{7}{2}\right)$应满足 π 的方程,代入有

$$6x_0+6y_0+\frac{3}{2}z_0=21, \tag{1}$$

$$z_0=2. \tag{2}$$

又因为(x_0,y_0,z_0)在椭球面上,有

$$x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21. \tag{3}$$

解(1),(2),(3),得 $x_0=3,y_0=0,z_0=2$ 及 $x_0=1,y_0=2,z_0=2$.

故所求切平面方程为

$$x+2z=7 \qquad 和 \qquad x+4y+6z=21.$$

15. (1997. Ⅰ)设直线 $l:\begin{cases}x+y+b=0,\\x+ay-z-3=0\end{cases}$在平面 π 上,而平面 π 与曲面:

$z=x^2+y^2$ 相切于点(1, -2,5),求 a,b 之值.

解法一 在点(1, -2,5)处曲面的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(2,-4,-1)$,故切平面即平面 π 的方程为

$$2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0,$$

即
$$2x-4y-z-5=0.$$

再由 $l:\begin{cases}x+y+b=0,\\ x+ay-z-3=0\end{cases}$ 可得 $y=-(x+b)$, $z=x-a(x+b)-3$,代入平面 π 的方程,得
$$2x+4(x+b)-x+a(x+b)+3-5=0,$$
因而有
$$5+a=0,\quad 4b+ab-2=0.$$
由此方程组解得
$$a=-5,b=-2.$$

解法二 过 l 的平面方程设为 $x+ay-z-3+\lambda(x+y+b)=0$,即

$$(1+\lambda)x+(a+\lambda)y-z-3+\lambda b=0.$$

曲面 $z=x^2+y^2$ 在点(1, -2,5)处的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(2,-4,-1)$,故由题设知

$$\frac{1+\lambda}{2}=\frac{a+\lambda}{-4}=\frac{-1}{-1},$$

解得
$$\lambda=1,a=-5.$$
又点(1, -2,5)在平面 π 上,故 $(1+\lambda)-2(a+\lambda)-8+\lambda b=0$.

将 $\lambda=1,a=-5$ 代入,解得 $b=-2$.因此 $a=-5,b=-2$.

16. (1993, Ⅰ, Ⅱ)由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12,\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处的指向外侧的单位法向量为________.

解 给定曲线绕 y 轴旋转一周得到的旋转面方程为 $3x^2+2y^2+3z^2-12=0$,此旋转面在点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处指向外侧的单位法向量为 $\boldsymbol{e}_n=\frac{1}{|\boldsymbol{n}|}(6x,4y,6z)\Big|_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{5}}(0,\sqrt{2},\sqrt{3})$.

17. (2000. Ⅰ)曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点(1, -2,2)的法线方程为________.

解 令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$,则在点(1, -2,2)处 $F_x=2$, $F_y=-8$, $F_z=12$.故所求的法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}.$$

18. (1996. Ⅰ, Ⅱ)函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为________.

解 方向 $l=\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$, $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{1}{3}$.

方向导数$\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,0,1)}=\left.\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right]\right|_{(1,0,1)}$

$$=\left.\left[\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cos\alpha+\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\cos\beta+\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\cos\gamma\right)\right]\right|_{(1,0,1)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}.$$

19. (1991. Ⅰ, Ⅱ)设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$. 在点 $P(1,1,1)$处的指向外侧的法向量,求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$在点$P$ 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

解 设 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6$,则

$$F_x=4x,F_y=6y,F_z=2z.$$

$$\boldsymbol{n}=(4x,6y,2z)|_P=(4,6,2),\boldsymbol{e}_n=\frac{1}{\sqrt{14}}(2,3,1).$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\left.\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{6}{\sqrt{14}},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\left.\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{8}{\sqrt{14}},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-\left.\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\right|_P=-\sqrt{14}.$$

从而

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P=\left.\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})+\frac{\partial u}{\partial z}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k})\right]\right|_P$$

$$=\frac{6}{\sqrt{14}}\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+\frac{8}{\sqrt{14}}\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}-\sqrt{14}\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}=\frac{11}{7}.$$

20. (1998. Ⅰ)确定常数 λ,使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $A(x,y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^\lambda\boldsymbol{j}$ 为某二元函数$u(x,y)$的梯度,并求 $u(x,y)$.

解 令 $P=2xy(x^4+y^2)^\lambda,Q=-x^2(x^4+y^2)^\lambda$. $A(x,y)$在右半平面 $x>0$ 上为某二元函数 $u(x,y)$的梯度的充要条件是$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$,即

$$-2x(x^4+y^2)^\lambda-4\lambda x^5(x^4+y^2)^{\lambda-1}=2x(x^4+y^2)^\lambda+4\lambda xy^2(x^4+y^2)^{\lambda-1},$$

或
$$4x(x^4+y^2)^\lambda(\lambda+1)=0,$$

解得 $\lambda=-1$. 于是,在右半平面内任取一点,例如$(1,0)$作为积分路径的起点,则得

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\int_1^x\frac{2x\cdot 0}{x^4+0^2}\mathrm{d}x-\int_0^y\frac{x^2}{x^4+y^2}\mathrm{d}y+C$$

$$=-\arctan\frac{y}{x^2}+C.$$

21. (2001. Ⅰ)设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,则 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}\ r)|_{(1,-2,2)}=$ ________.

解 由梯度的定义

$$\mathbf{grad}\ r=\left(\frac{\partial r}{\partial x},\frac{\partial r}{\partial y},\frac{\partial r}{\partial z}\right)=\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right).$$

由散度的定义

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad}\ r)=\operatorname{div}\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$=\frac{2}{r}.$$

故 $\operatorname{div}(\mathbf{grad}\ r)\Big|_{(1,-2,2)}=\dfrac{2}{3}$.

22.(1994.Ⅱ)在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点,使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短.

解 设 $P(x,y)$ 为椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上任意一点,则 P 到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|2x+3y-6|}{\sqrt{13}}$.求 d 的最小值点即求 d^2 的最小值点.作拉格朗日函数

$$L(x,y)=\frac{1}{13}(2x+3y-6)^2+\lambda(x^2+4y^2-4),$$

令

$$\begin{cases}L_x=\dfrac{4}{13}(2x+3y-6)+2\lambda x=0,\\[2mm] L_y=\dfrac{6}{13}(2x+3y-6)+8\lambda y=0.\end{cases}$$

由此得 $y=\dfrac{3}{8}x$,代入 $x^2+4y^2-4=0$.求得

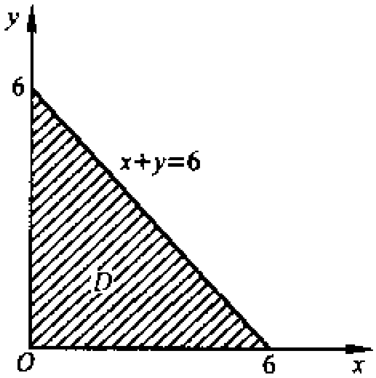
$$x_1=\frac{8}{5},y_1=\frac{3}{5};\quad x_2=-\frac{8}{5},y_2=-\frac{3}{5}.$$

于是

$$d|_{(x_1,y_1)}=\frac{1}{\sqrt{13}},\quad d|_{(x_2,y_2)}=\frac{11}{\sqrt{13}}.$$

由问题的实际意义最短距离存在,因此 $\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5}\right)$ 即为所求点.

23.(1995.Ⅴ)求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$、x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的极值,最大值与最小值.



图研 5-1

解 由方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0, \\ f_y(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0. \end{cases}$$

得 $x=0(0\leqslant y\leqslant 6)$ 及点 $(4,0)$，$(2,1)$.

点 $(4,0)$ 及线段 $x=0(0\leqslant y\leqslant 6)$ 在 D 的边界上，只有点 $(2,1)$ 在 D 的内部（见附图），是可能极值点.

$$f_{xx}=8y-6xy-2y^2,\quad f_{xy}=8x-3x^2-4xy,\quad f_{yy}=-2x^2.$$

在点 $(2,1)$ 处

$$A=f_{xx}\Big|_{\substack{x=2\\y=1}}=-6,\quad B=f_{xy}\Big|_{\substack{x=2\\y=1}}=-4,\quad C=f_{yy}\Big|_{\substack{x=2\\y=1}}=-8.$$

$B^2-AC=-32<0$，且 $A<0$，因此点 $(2,1)$ 是 $z=f(x,y)$ 的极大值点，极大值 $f(2,1)=4$.

在 D 的边界 $x=0(0\leqslant y\leqslant 6)$ 及 $y=0(0\leqslant x\leqslant 6)$ 上 $f(x,y)=0$，在边界 $x+y=6$ 上，$y=6-x$，代入 $f(x,y)$ 中得

$$z=2x^3-12x^2\quad(0\leqslant x\leqslant 6).$$

由 $z'=6x^2-24x=0$ 得 $x=0$，$x=4$.

在边界 $x+y=6$ 上对应 $x=0,4,6$ 处的函数值分别为：

$$z\Big|_{x=0}=2x^3-12x^2\Big|_{x=0}=0,$$

$$z\Big|_{x=4}=2x^3-12x^2\Big|_{x=4}=-64,$$

$$z\Big|_{x=6}=2x^3-12x^2\Big|_{x=6}=0.$$

因此，$z=f(x,y)$ 在边界上的最大值为 0，最小值为 $f(4,2)=-64$，将边界上最大值和最小值与驻点 $(2,1)$ 处的值比较得，$z=f(x,y)$ 在闭区域上的最大值为 $f(2,1)=4$；最小值为 $f(4,2)=-64$.

24. (2002. Ⅰ) 设有一小山，取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面，其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上一点，问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点也就是说，要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使(1)中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点. 试确定攀登起点的位置.

解 (1) 当函数 $h(x,y)$ 及点 $M(x_0,y_0)$ 给定时，$h(x,y)$ 在点 M 处的各方

向中方向导数最大值

$$
\begin{aligned}
g(x_0, y_0) &= |\operatorname{grad} h|_M \\
&= |(y_0 - 2x_0)\boldsymbol{i} + (x_0 - 2y_0)\boldsymbol{j}| \\
&= \sqrt{(y_0 - 2x_0)^2 + (x_0 - 2y_0)^2} \\
&= \sqrt{5x_0^2 + 5y_0^2 - 8x_0 y_0}.
\end{aligned}
$$

(2) 让点 $M(x_0, y_0)$在底边界线 $x^2 + y^2 - xy = 75$ 上变动,求 $g(x_0, y_0)$的最大值.去掉根号,求

$$f(x, y) = g^2(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy$$

在约束条件 $x^2 + y^2 - xy = 75$ 下的最大值点.

作拉格朗日函数

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda(75 - x^2 - y^2 + xy).$$

令

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 10x - 8y + \lambda(y - 2x) = 0, \tag{①}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 10y - 8x + \lambda(x - 2y) = 0. \tag{②}$$

①与②相加得

$$(x + y)(2 - \lambda) = 0$$

从而得 $y = \quad x$ 或$\lambda = 2$.

若 $\lambda = 2$,由①得 $y = x$.再由约束条件得

$$x = \pm 5\sqrt{3}, y = \pm 5\sqrt{3}.$$

若 $y = -x$,由约束条件得 $x = \pm 5, y = \mp 5$.

于是得到 4 个可能极值点:

$M_1(5, -3)$;$M_2(-5, 5)$;$M_3(5\sqrt{3}, 5\sqrt{3})$;$M_4(-5\sqrt{3}, -5\sqrt{3})$.

计算

$$f(M_1) = f(M_2) = 450; f(M_3) = f(M_4) = 150.$$

所以点 M_1 或 M_2 可作为攀登的起点.

25.(1991.Ⅳ,Ⅴ)某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售,售价分别为 p_1 和 p_2,销售量分别为 q_1 和 q_2,需求函数分别为

$$q_1 = 24 - 0.2p_1 \quad 和 \quad q_2 = 10 - 0.05p_2,$$

总成本函数为

$$C = 35 + 40(q_1 + q_2),$$

试问:厂家如何确定两个市场的售价,能使其获得的总利润最大?最大总利润为多少?

解法一 总收入函数为

$$R=p_1q_1+p_2q_2=24p_1-0.2p_1^2+10p_2-0.05p_2^2.$$

总利润函数为

$$L=R-C=32p_1-0.2p_1^2-0.05p_2^2-1395+12p_2.$$

由极值的必要条件,得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial p_1}=32-0.4p_1=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial p_2}=12-0.1p_2=0.\end{cases}$$

解此方程组得 $p_1=80,p_2=120$.

由问题的实际意义可知,当 $p_1=80,p_2=120$ 时,厂家所获得的总利润最大,其最大总利润为

$$L\Big|_{p_1=80,p_2=120}=605.$$

解法二 两个市场的价格函数分别为

$$p_1=120-5q,\quad 和\quad p_2=200-20q_2,$$

总收入函数为

$$R=p_1q_1+p_2q_2=(120-5q_1)q_1+(200-20q_2)q_2,$$

总利润函数为

$$\begin{aligned}L&=R-C=(120-5q_1)q_1+(200-20q_2)q_2-[35+40(q_1+q_2)]\\&=80q_1-5q_1^2+160q_2-20q_2^2-35.\end{aligned}$$

由极值的必要条件,得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial q_1}=80-10q_1=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial q_2}=160-40q_2=0.\end{cases}$$

解此方程组得 $q_1=8,q_2=4$.

由问题的实际意义可知,当 $q_1=8,q_2=4$,即 $p_1=80,p_2=120$ 时,厂家所获得的总利润最大,其最大总利润为 $L\Big|_{q_1=8,q_2=4}=605$.

（六）多元函数积分学

1.（2001. Ⅰ）交换二次积分的积分次序：$\int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{2}^{1-y} f(x, y)\,\mathrm{d}x =$ ____________.

解 $$\int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{2}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{1-y}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x = -\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\int_{1}^{2} \mathrm{d}x \int_{1-x}^{0} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{1}^{2} \mathrm{d}x \int_{0}^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y,$$

其中 $D = \{(x,y) \mid 1-y \leqslant x \leqslant 2, -1 \leqslant y \leqslant 0\} = \{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1-x, 1 \leqslant x \leqslant 2\}$.

注 交换二次积分的积分次序时，需先将二次积分化为二重积分（尽管解题时往往省略这一步），而将二次积分化为二重积分时，必须保证二次积分中的每个定积分的下限≤上限. 本题中，由于当 $-1 \leqslant y \leqslant 0$ 时，$1-y \leqslant 2$，故需将 $\int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{2}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x$ 先写为 $-\int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{1-y}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x$. 如果不注意这一点，就会得到错误结果：$\int_{1}^{2} \mathrm{d}x \int_{1-x}^{0} f(x,y)\mathrm{d}y$.

2.（1996. Ⅳ）累次积分 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho$ 可以写成（　　）.

(A) $\int_{0}^{1} \mathrm{d}y \int_{0}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_{0}^{1} \mathrm{d}y \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{0}^{1} f(x,y)\mathrm{d}y$.　　(D) $\int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{0}^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

解 积分区域 $D = \left\{(\rho,\theta) \,\middle|\, 0 \leqslant \rho \leqslant \cos\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$

$$= \{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x-x^2}, 0 \leqslant x \leqslant 1\},$$

故选(D).

3.（2001. Ⅰ）计算二重积分 $\iint\limits_{D} \mathrm{e}^{\max\{x^2, y^2\}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

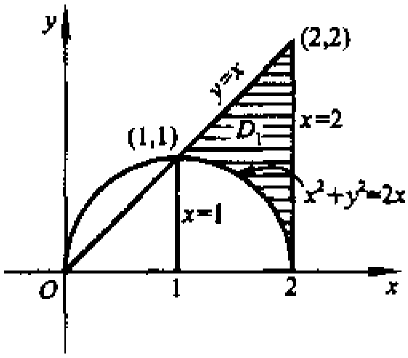
解 设 $$D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant x, 0 \leqslant x \leqslant 1\},$$
$$D_2 = \{(x,y) \mid x \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant 1\},$$

则 $$\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1} e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{D_1} e^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} e^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x e^{x^2}\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y e^{y^2}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1 ye^{y^2}\mathrm{d}y=e-1.$$

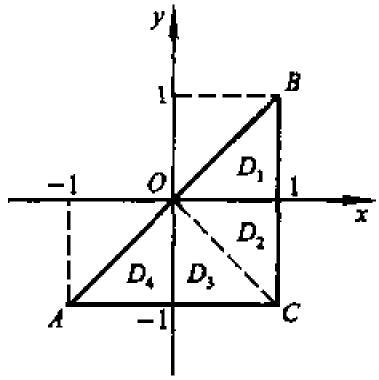
4．(2000.Ⅳ)设 $f(x,y)=\begin{cases}x^2y, & 若\ 1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

求 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 2x\}$.

解 如图研 6－1，记 $D_1=\{(x,y)\mid \sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant x,1\leqslant x\leqslant 2\}$，则
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2 x^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^x y\mathrm{d}y$$
$$=\int_1^2 x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{2x-x^2}}^x\mathrm{d}x$$
$$=\int_1^2(x^4-x^3)\mathrm{d}x=\frac{49}{20}.$$



图研 6－1



图研 6－2

5．(2001.Ⅲ)求二重积分 $\iint\limits_D y[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=-1$ 及 $x=1$ 围成的平面区域.

解 原式 $=\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

如图研 6－2，将 D 划分成 D_1、D_2、D_3、D_4 四块. 由于 $xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ 关于 y 是奇函

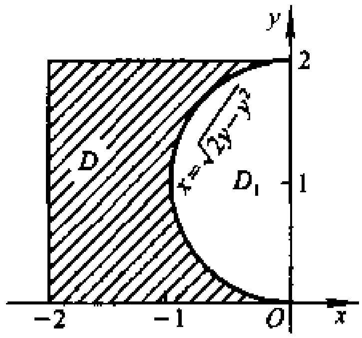
数，而闭区域 $D_1\cup D_2$ 关于 x 轴对称，故 $\displaystyle\iint\limits_{D_1\cup D_2} xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$；

类似可说明 $$\iint\limits_{D_3\cup D_4} xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

从而 $$\iint\limits_{D} xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

又 $$\iint\limits_{D} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1} y\mathrm{d}y\int_{y}^{1}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} y(1-y)\mathrm{d}y=-\frac{2}{3},$$

故 原式 $=-\dfrac{2}{3}$.



图研 6－3

6.（1999.Ⅲ，Ⅳ）计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{D} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $x=-2$，$y=0$，$y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域.

解法一 设闭区域 D 和 D_1 如图研 6－3 所示，则有

$$\iint\limits_{D} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D\cup D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

而 $$\iint\limits_{D\cup D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^{0}\mathrm{d}x\int_{0}^{2} y\mathrm{d}y=4,$$

$$\iint\limits_{D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{极坐标}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{2\sin\theta}\rho\sin\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta \xlongequal{t=\pi-\theta} \frac{8}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},$$

故原式 $=4-\dfrac{\pi}{2}$.

解法二 $D=\{(x,y)\mid -2\leqslant x\leqslant-\sqrt{2y-y^2},0\leqslant y\leqslant 2\}$.

$$\iint\limits_{D} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{2} y\mathrm{d}y\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{2} y(2-\sqrt{2y-y^2})\mathrm{d}y$$

$$=2\int_{0}^{2} y\mathrm{d}y-\int_{0}^{2} y\sqrt{2y-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=4-\int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}\,\mathrm{d}y,$$

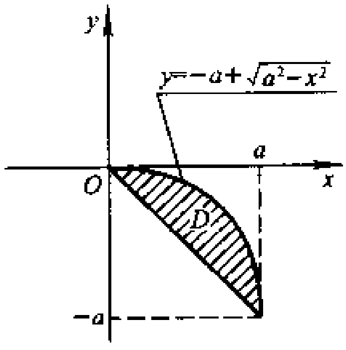
令 $y-1=\sin t$，则

$$\int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}\,\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2},$$

于是原式 $=4-\dfrac{\pi}{2}$.

7.（2000.Ⅲ）计算二重积分 $\displaystyle\iint_D\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}\,(a>0)$ 和直线 $y=-x$ 围成的区域.



图研 6－4

解 积分区域 D 在极坐标系中可表示为

$$D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant-2a\sin\theta,\ -\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant 0\}\text{（图研 6－4）},$$

故

$$\text{原式}=\iint_D\frac{\rho}{\sqrt{4a^2-\rho^2}}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{\rho^2}{\sqrt{4a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho,$$

令 $\rho=2a\sin t$，则

$$\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{\rho^2}{\sqrt{4a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho=\int_0^{-\theta}4a^2\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=2a^2\int_0^{-\theta}(1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t=2a^2\left(-\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right).$$

于是

$$\text{原式}=2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(-\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\mathrm{d}\theta=a^2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right).$$

8.（2002.Ⅳ）设闭区域 $D: x^2+y^2\leqslant y, x\geqslant 0$. $f(x,y)$ 为 D 上的连续函数，且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

求 $f(x,y)$.

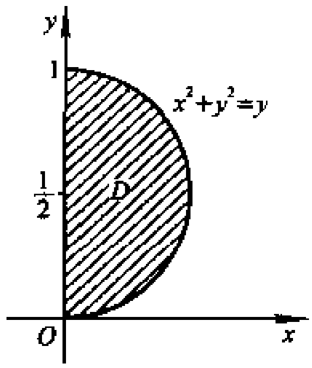
解 注意到 $\iint_D f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ 为常数（设为 A）且

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

在给定等式两边求 D 上的二重积分，得

$$A=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{8}{\pi}A\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(*),$$

由于 $D=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$，$D$ 的面积为 $\frac{\pi}{8}$（图研 6－5）.



图研 6－5

故 $$\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8},$$

$$\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}(1-\cos^3\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

代入（*）式得

$$A=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)\cdot A,$$

解得 $$A=\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right),$$

于是 $$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{4}{3\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

9.（1995. Ⅰ）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，并设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$，求 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$.

解法一 交换积分次序可得

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(y)f(x)\mathrm{d}y,$$

上式中的第二个等号是由于将积分变量 x、y 分别改记为 y、x，不影响二次积分的值. 从而有

$$2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y=A^2,$$

故 $$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}A^2.$$

解法二 记函数 $F(x)=\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(0)=A, F(1)=0$，且 $\mathrm{d}F(x)=-f(x)\mathrm{d}x$. 利用分部积分公式，有

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1\left[\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\right]f(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}F(x)=-\left[\frac{F^2(x)}{2}\right]_0^1=\frac{A^2}{2}.$$

10. (1989. Ⅰ, Ⅱ)设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$上，问当 R 取何值时，球面 Σ 在定球面内部的那部分的面积最大？

解 不妨设 z 轴通过球面 Σ 的中心，则 Σ 的方程为

$$x^2+y^2+(z-a)^2=R^2.$$

与定球面方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 联立，消去 z，可得两球面的交线在 xOy 面上的投影曲线为

$$\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{R^2}{4a^2}(4a^2-R^2),\\ z=0.\end{cases}$$

记投影曲线所围的平面区域为 D_{xy}. 球面 Σ 在定球面内部的那部分曲面的方程为

$$z=a-\sqrt{R^2-x^2-y^2},$$

该部分曲面的面积为

$$S(R)=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{R}{2a}\sqrt{4a^2-R^2}}\frac{\rho R\,\mathrm{d}\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$$

$$=2\pi R^2-\frac{\pi R^3}{a}.$$

$$S'(R)=4\pi R-\frac{3\pi R^2}{a},\quad S''(R)=4\pi-\frac{6\pi R}{a}.$$

令 $S'(R)=0$，得驻点 $R_1=0$(舍去)，$R_2=\dfrac{4}{3}a$，

$$S''\left(\frac{4}{3}a\right)=-4\pi<0,$$

故当 $R=\dfrac{4}{3}a$ 时，球面 Σ 在定球面内部的那部分的面积最大.

11. (2000. Ⅰ)设有一半径为 R 的球体，P_0 是此球的表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比(比例常数 $k>0$)，求球体

的重心位置.

解 记球体为 Ω,以 Ω 的球心为原点 O,射线 OP_0 为正 z 轴建立直角坐标系,则 P_0 的坐标是 $(0,0,R)$,球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$. 设重心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$,则由对称性得 $\bar{x}=0,\bar{y}=0$,

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\cdot k[x^2+y^2+(z-R)^2]\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega} k[x^2+y^2+(z-R)^2]\mathrm{d}v}.$$

由对称性可知 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=0$; $\iiint\limits_{\Omega} z^3\mathrm{d}v=0$; $\iiint\limits_{\Omega} z(x^2+y^2)\mathrm{d}v=0$;

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v,$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}[x^2+y^2+(z-R)^2]\mathrm{d}v&=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v+\iiint\limits_{\Omega}R^2\mathrm{d}v\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r+\frac{4}{3}\pi R^5\\&=\frac{4}{5}\pi R^5+\frac{4}{3}\pi R^5=\frac{32}{15}\pi R^5;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} z[x^2+y^2+(z-R)^2]\mathrm{d}v&=-2R\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}v\\&=-\frac{2R}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=-\frac{8}{15}\pi R^6,\end{aligned}$$

故
$$\bar{z}=\left(-\frac{8}{15}\pi R^6\right)\Big/\left(\frac{32}{15}\pi R^5\right)=-\frac{R}{4},$$

因此球体 Ω 的重心位置为 $\left(0,0,-\dfrac{R}{4}\right)$.

12. (1998. Ⅰ)设 l 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$,其周长记为 a,则 $\oint\limits_l(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$ ________.

解 因为 l 关于 y 轴对称,且 $2xy$ 关于 x 是奇函数,所以 $\oint\limits_l 2xy\mathrm{d}s=0$. 又在 l 上,$3x^2+4y^2=12$,所以

$$原积分=\oint\limits_l 2xy\mathrm{d}s+\oint\limits_l(3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=0+\oint\limits_l 12\mathrm{d}s=12a.$$

13. (1996. Ⅰ,Ⅱ)已知 $\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分,则 a 等

于(　).

(A) -1.　　(B) 0.　　(C) 1.　　(D) 2.

解　$$P(x,y)=\frac{x+ay}{(x+y)^2},\quad Q(x,y)=\frac{y}{(x+y)^2},$$

由$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$即可解得$a=2$.应选 D.

14. (1995. Ⅰ,Ⅱ)设曲线 $Q(x,y)$在 xOy 平面上具有一阶连续偏导数,曲线积分$\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关,并且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

求 $Q(x,y)$.

解　由曲线积分与路径无关的条件知

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x,$$

因此 $Q(x,y)=x^2+\varphi(y)$,其中 $\varphi(y)$为待定的可导函数,采用从点(0,0)到点$(t,0)$再到点$(t,1)$的有向折线作为积分路径,可得

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1[t^2+\varphi(y)]\mathrm{d}y=t^2+\int_0^1\varphi(y)\mathrm{d}y;$$

采用从点(0,0)到点(1,0)再到点$(1,t)$的有向折线作为积分路径,可得

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^t[1^2+\varphi(y)]\mathrm{d}y=t+\int_0^t\varphi(y)\mathrm{d}y.$$

由题设知　$$t^2+\int_0^1\varphi(y)\mathrm{d}y=t+\int_0^t\varphi(y)\mathrm{d}y.$$

两边对 t 求导,得

$$2t=1+\varphi(t),\quad \varphi(t)=2t-1.$$

从而 $\varphi(y)=2y-1$.因此

$$Q(x,y)=x^2+2y-1.$$

15. (2002. Ⅰ)设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有一阶连续导数,L 是上半平面$(y>0)$内的有向分段光滑曲线,其起点为(a,b),终点为(c,d).记

$$I=\int_L\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y,$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径L 无关;

(2) 当 $ab=cd$ 时,求 I 的值.

(1) **证**　因为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{y}[1+y^2 f(xy)]\right\}=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]\right\}$$
在单连通域上半平面内处处成立,所以在上半平面内曲线积分 I 与路径无关.

(2) **解法一** 由于 I 与路径无关,故可取积分路径 L 为从点(a,b)到点(c,b)再到点(c,d)的有向折线段,于是

$$I=\int_a^c \frac{1}{b}[1+b^2 f(bx)]\mathrm{d}x+\int_b^d \frac{c}{y^2}[y^2 f(cy)-1]\mathrm{d}y$$
$$=\frac{c-a}{b}+\int_a^c bf(bx)\mathrm{d}x+\int_b^d cf(cy)\mathrm{d}z+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}$$
$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{bc} f(t)\mathrm{d}t+\int_{bc}^{cd} f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{cd} f(t)\mathrm{d}t\,\overline{\overline{\scriptstyle ab=cd}}\,\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.$$

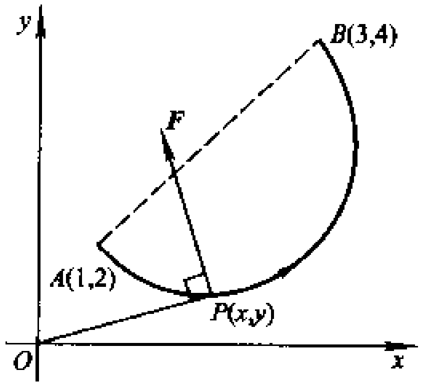
解法二 利用全微分公式求解.

由于
$$\frac{\mathrm{d}x}{y}-\frac{x\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right),$$
并设 $F(u)$为 $f(u)$的一个原函数,则有
$$I=\int_L \frac{\mathrm{d}x}{y}-\frac{x\mathrm{d}y}{y^2}+\int_L yf(xy)\mathrm{d}x+xf(xy)\mathrm{d}y$$
$$=\int_L \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)+\int_L f(xy)\mathrm{d}(xy)$$
$$=\left[\frac{x}{y}\right]_{(a,b)}^{(c,d)}+[F(xy)]_{(a,b)}^{(c,d)}$$
$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+F(cd)-F(ab)\,\overline{\overline{\scriptstyle ab=cd}}\,\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.$$

16. (1991. Ⅰ,Ⅱ)在过点 $O(0,0)$和 $A(\pi,0)$的曲线族 $y=a\sin x(a>0)$中,求一条曲线 L,使沿该曲线 L 从 O 到 A 的积分 $\int_L (1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$ 的值最小.

解 $I(a)=\int_0^\pi [1+a^3\sin^3 x+(2x+a\sin x)\cdot a\cos x]\mathrm{d}x$
$$=\pi-4a+\frac{4}{3}a^3.$$
令 $I'(a)=-4+4a^2=0$,得 $a=1$(舍去 $a=-1$),且 $a=1$ 是 $I(a)$在区间$(0,+\infty)$内的惟一驻点,又 $I''(1)=8>0$,因此 $I(a)$在 $a=1$ 处取得最小值.从而所求曲线为 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

17.（1990. Ⅰ，Ⅱ）质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周，从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 $\boldsymbol{F}$ 的作用（图研 6－6），$\boldsymbol{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离，其方向垂直于线段 OP，且与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$. 求变力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 P 所作的功.



图研 6－6

解 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，

按题意，$|\boldsymbol{F}|=|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

由于 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 垂直且与 y 轴正向夹角小于 $\frac{\pi}{2}$，故 $\boldsymbol{F}$ 在 y 轴上的投影为正，因此与 $\boldsymbol{F}$ 同方向的单位向量为

$$\boldsymbol{e}_F=\frac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

于是
$$\boldsymbol{F}=|\boldsymbol{F}|\boldsymbol{e}_F=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}.$$

又圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程为 $x=2+\sqrt{2}\cos t$，$y=3+\sqrt{2}\sin t$（t 从 $-\frac{3}{4}\pi$ 变到 $\frac{\pi}{4}$），因此变力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$\begin{aligned}
W&=\int_{\overset{\frown}{AB}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{\overset{\frown}{AB}}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\\
&=\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}[(3+\sqrt{2}\sin t)\sqrt{2}\sin t+(2+\sqrt{2}\cos t)\sqrt{2}\cos t]\mathrm{d}t\\
&=3\sqrt{2}\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}\sin t\mathrm{d}t+2\sqrt{2}\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}\cos t\mathrm{d}t+2\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t.\\
&=2(\pi-1).
\end{aligned}$$

注 也可利用格林公式来计算 $\int_{\overset{\frown}{AB}}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$. 为此补上有向线段 BA：$y=x+1$，x 从 3 变到 1.

由格林公式得

$$\oint_{\overset{\frown}{AB}+BA}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=2\iint_D\mathrm{d}\sigma=2\pi;$$

而
$$\int_{BA}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\int_3^1[-(x+1)+x]\mathrm{d}x=2,$$

因此
$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=2\pi-2=2(\pi-1).$$

18. (1992. Ⅰ, Ⅱ) 在变力 $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$，问 ξ,η,ζ 取何值时，力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 W 最大？并求 W 的最大值.

解 直线段 OM 的参数方程可取为

$$x=\xi t,\ y=\eta t,\ z=\zeta t,\ t\ 从\ 0\ 变到\ 1.$$

$\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$\begin{aligned}W&=\int_{OM}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{OM}yz\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z\\&=\int_0^1 3\xi\eta\zeta t^2\mathrm{d}t=\xi\eta\zeta.\end{aligned}$$

下面求 $W=\xi\eta\zeta$ 在条件 $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1(\xi\geqslant0,\eta\geqslant0,\zeta\geqslant0)$ 下的最大值.

令 $L(\xi,\eta,\zeta)=\xi\eta\zeta+\lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right)$，

由 $\frac{\partial L}{\partial\xi}=0,\frac{\partial L}{\partial\eta}=0,\frac{\partial L}{\partial\zeta}=0$ 得

$$\eta\zeta=-\frac{2\lambda}{a^2}\xi,\ \xi\zeta=-\frac{2\lambda}{b^2}\eta,\ \xi\eta=-\frac{2\lambda}{c^2}\zeta.$$

若 $\lambda=0$，则由 $\eta\zeta=0$ 得 $\eta=0$ 或 $\zeta=0$，从而

$$W=\xi\eta\zeta=0\qquad(显然不是\ W\ 的最大值，舍去)；$$

若 $\lambda\neq0$，则得 $\frac{\xi^2}{a^2}=\frac{\eta^2}{b^2}=\frac{\zeta^2}{c^2}\left(=-\frac{\xi\eta\zeta}{2\lambda}\right)$，

从而 $\frac{\xi^2}{a^2}=\frac{\eta^2}{b^2}=\frac{\zeta^2}{c^2}=\frac{1}{3}$. 于是得惟一可能极值点：

$$\xi=\frac{a}{\sqrt3},\ \eta=\frac{b}{\sqrt3},\ \zeta=\frac{c}{\sqrt3}.$$

由问题的实际意义知功的最大值为

$$W_{\max}=\frac{\sqrt3}{9}abc.$$

19. (1999. Ⅰ) 求 $I=\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$，其中 a,b 为正的常数，L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

解法一 添加从点 $O(0,0)$ 沿 $y=0$ 到点 $A(2a,0)$ 的有向线段 L_1，则由格林公式得

$$\oint_{L+L_1}(\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}(b-a)\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{2}a^2(b-a),$$

其中 D 为由 L 和 L_1 所围成的半径为 a 的半圆域.

又 $$\int_{L_1}(e^x\sin y-b(x+y))\mathrm{d}x+(e^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2a}(-bx)\mathrm{d}x=-2a^2b,$$

从而 $$I=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)-(-2a^2b)=\left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3.$$

解法二 将 I 写成两个积分之差:

$$I=\int_L e^x\sin y\mathrm{d}x+e^x\cos y\mathrm{d}y-\int_L b(x+y)\mathrm{d}x+ax\mathrm{d}y,$$

前一积分与路径无关,故可将 L 改为有向线段 AO: $y=0$, x 从 $2a$ 变到 0,得

$$\int_L e^x\sin y\mathrm{d}x+e^x\cos y\mathrm{d}y=\int_{2a}^0 e^x\cdot 0\mathrm{d}x=0;$$

对后一积分,取 L 的参数方程: $x=a+a\cos t$, $b=a\sin t$, t 从 0 变到 π,得

$$I=0-\int_0^{\pi}[b(a+a\cos t+a\sin t)(-a\sin t)+a(a+a\cos t)(a\cos t)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\pi}(a^2b\sin t+a^2b\sin t\cos t+a^2b\sin^2 t-a^3\cos t-a^3\cos^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3.$$

20. (2000. Ⅰ)计算曲线积分 $I=\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$,其中 L 是以点(1,0)为中心,R 为半径的圆周($R>1$),取逆时针方向.

解 $P=\frac{-y}{4x^2+y^2}$, $Q=\frac{x}{4x^2+y^2}$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},(x,y)\neq(0,0).$$

在 L 所围的圆域内作足够小的椭圆 C: $x=\frac{r}{2}\cos t$, $y=r\sin t$ $(r>0)$, t 从 0 变到 2π. 于是在由 L 和 C^- 所围成的区域 D 上应用格林公式,得

$$\oint\limits_{L+C^-}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=0,$$

从而有

$$I=\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\oint_C\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{r^2}\mathrm{d}t = \pi.$$

21．(2001．Ⅰ)计算 $I = \oint_L (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (2z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (3x^2 - y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 是平面 $x + y + z = 2$ 与柱面 $|x| + |y| = 1$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向．

解　记 Σ 为平面 $x + y + z = 2$ 的上侧被 L 所围成的部分，则 Σ 上各点处的法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}},\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy} = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$．

由斯托克斯公式，

$$I = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

$$= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & 2z^2 - x^2 & 3x^2 - y^2 \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (4x + 2y + 3z)\mathrm{d}S$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{D_{xy}} (x - y + 6)\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{（由对称性易知}\iint_D (x - y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0\text{）}$$

$$= -12\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -24.$$

22．(1999．Ⅰ)设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$ 的上半部分，点 $P(x,y,z) \in S$，Π 为 S 在点 P 处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 Π 的距离，求 $\iint_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$．

解　设 (X,Y,Z) 为切平面 Π 上任意一点，则 Π 的方程为 $\frac{xX}{2} + \frac{yY}{2} + zZ = 1$，原点 $O(0,0,0)$ 到 Π 的距离 $\rho(x,y,z) = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$．

由于 S 的方程为 $z=\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}$,故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}},$$

于是

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}d\sigma=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}}d\sigma.$$

又 S 在 xOy 面上的投影区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$,
从而

$$\iint_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}dS=\frac{1}{4}\iint_D(4-x^2-y^2)d\sigma.$$

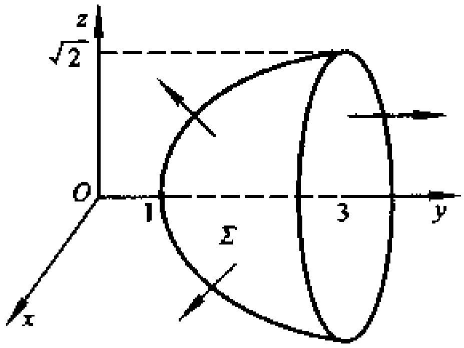
$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4-\rho^2)\rho d\rho=\frac{3}{2}\pi.$$

23.(1987.Ⅰ,Ⅱ)计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma(8y+1)xdydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy,$$

其中 Σ 是由曲线$\begin{cases}z=\sqrt{y-1},\\x=0\end{cases}$$(1\leqslant y\leqslant 3)$绕 y 轴旋转一周所成的曲面,它的法向量与 y 轴正向的夹角恒大于$\frac{\pi}{2}$.

解 设 Σ_1 为平面 $y=3$ 的右侧被 $x^2+z^2=2$ 所围成的部分(图研 6-7),Ω 为由 Σ 和 Σ_1 所围成的空间闭区域,则由高斯公式得



图研 6-7

$$I = \iiint_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial x}[(8y+1)x]+\frac{\partial}{\partial y}[2(1-y^2)]+\frac{\partial}{\partial z}(-4yz)\right\}dv$$

$$-\iint_{\Sigma_1}(8y+1)x\,dy\,dz+2(1-y^2)dz\,dx-4yz\,dx\,dy$$

$$=\iiint_{\Omega}dv-\iint_{\Sigma_1}2(1-y^2)dz\,dx$$

$$=\int_1^3\pi(y-1)dy-\iint_{x^2+z^2\leq 2}2(1-3^2)dz\,dx$$

$$=2\pi+32\pi=34\pi.$$

24．(2000．Ⅰ)对于半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S，都有

$$\oiint_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy=0,$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$．求 $f(x)$．

解 由题设和高斯公式得

$$0=\oiint_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy$$

$$=\pm\iiint_{\Omega}[xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}]dv,$$

其中 Ω 为由 S 围成的有界闭区域，当 S 取外侧时，取"+"号，当 S 取内侧时，取"－"号．由 S 的任意性及 $f(x)$、$f'(x)$ 的连续性，可知必有

$$xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}=0\quad(x>0),$$

即

$$f'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)f(x)=\frac{1}{x}e^{2x}\quad(x>0).$$

按一阶线性非齐次微分方程通解公式(教材第十二章第四节)，有

$$f(x)=e^{\int\left(1-\frac{1}{x}\right)dx}\left[\int\frac{1}{x}e^{2x}\cdot e^{\int\left(\frac{1}{x}-1\right)dx}dx+C\right]$$

$$=\frac{e^x}{x}\left[\int\frac{1}{x}e^{2x}\cdot xe^{-x}dx+C\right]=\frac{e^x}{x}(e^x+C).$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{2x}+Ce^x}{x}=1$，故必有

$\lim\limits_{x\to 0^+}(e^{2x}+Ce^x)=0$，从而 $C=-1$．于是

$$f(x)=\frac{e^x}{x}(e^x-1).$$

（七）无穷级数

1.（1988.Ⅰ,Ⅱ）设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，它在区间 $(-1,1]$ 上的定义为

$$f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\leqslant 0\\ x^3, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于__________.

解 $x=1$ 是 $f(x)$ 的间断点，故级数在该点处收敛于 $\dfrac{f(1^-)+f(-1^+)}{2}=\dfrac{3}{2}$.

2.（1993.Ⅰ,Ⅱ）设函数 $f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则其中系数 b_3 的值为__________.

解 $b_3=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3x\mathrm{d}x$，其中 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin 3x\mathrm{d}x=0$，

故

$$b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi x\sin 3x\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}x\sin 3x\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}[x\cos 3x]_0^{\pi}+\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\cos 3x\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3}.$$

3.（1995.Ⅰ,Ⅱ）幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R=$__________.

解 由于 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{|2^n+(-3)^n|}{|2^{n+1}+(-3)^{n+1}|}|x^2|=\frac{|x|^2}{3}$，从 $\dfrac{|x|^2}{3}<1$ 得 $|x|<\sqrt{3}$，故 $R=\sqrt{3}$.

4.（1997.Ⅰ）设幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3，则幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间内__________.

解 由幂级数的性质知 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 及 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收

敛半径相同,故幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为 $|x-1|<3$,即 $(-2,4)$.

5.(1988.Ⅰ,Ⅱ)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛,则此级数在 $x=2$ 处(　　).

(A) 条件收敛;　(B) 绝对收敛;　(C) 发散;　(D) 收敛性不能确定.

解　(1) 因为 $x=-1$ 是级数的收敛点,由阿贝尔(Abel)定理知,在 $|x-1|<|-1-1|=2$ 内,级数绝对收敛.现 $x=2$ 满足 $|x-1|<2$,故选(B).

6.(1989.Ⅰ,Ⅱ)设 $f(x)=x^2, 0\leqslant x<1$,而正弦级数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\pi x,\text{其中 } b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots).$$

则 $S\left(-\frac{1}{2}\right)=($　　$)$

(A) $-\frac{1}{2}$;　　(B) $-\frac{1}{4}$;　　(C) $\frac{1}{4}$;　　(D) $\frac{1}{2}$.

解　根据 b_n 的表达式可推知,$S(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上作奇延拓后所得函数的傅里叶级数的和函数.$x=-\frac{1}{2}$ 是奇延拓后所得函数的连续点,故 $S\left(-\frac{1}{2}\right)=-S\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$.故选(B).

7.(1990.Ⅰ,Ⅱ)设 a 为常数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(na)}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$(　　).

(A) 绝对收敛;　　(B) 条件收敛;

(C)发散;　　(D)收敛性与 a 的取值有关.

解　因 $|\sin(na)|\leqslant 1$,故由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)}{n^2}$ 绝对收敛,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散,故所给级数发散.选(C).

8.(1994.Ⅰ,Ⅱ)设常数 $\lambda>0$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$(　　).

(A) 发散;　　(B) 条件收敛;　(C) 绝对收敛;(D) 收敛性与 λ 有关.

解　因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\lambda}$ 收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2+\lambda}\right)$ 收敛.

又 $\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2+\lambda}\right)$,由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ 收敛,故所给

级数绝对收敛.选(C).

9.(1996.Ⅰ,Ⅱ)设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,常数 $\lambda\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\tan\dfrac{\lambda}{n}\right)a_{2n}$(　　)

(A) 绝对收敛; (B) 条件收敛; (C) 发散; (D) 收敛性与 λ 有关.

解 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于 S,则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 的部分和显然不超过 S,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛. 又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\tan\dfrac{\lambda}{n}a_{2n}}{a_{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\dfrac{\lambda}{n}}{\dfrac{\lambda}{n}}\cdot\lambda=\lambda$,由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\dfrac{\lambda}{n}a_{2n}$ 收敛.故选(A).

10.(2000.Ⅰ)设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则必收敛的级数为(　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u_n}{n}$;　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$;

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$;　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+1}$ 也收敛,从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$ 必收敛.故选(D).下面各举一例说明级数(A)(B)(C)不必收敛.如:

(A) 中取 $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u_n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(n+1)}$ 发散(见下面的说明).

(B) 中取 $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.

(C) 中取 $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n}\right)$ 发散.

(A)中提及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(n+1)}$ 发散是这样证明的:注意到函数 $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ 在$(1,+\infty)$单调减少,有 $\dfrac{1}{n\ln n}>\dfrac{1}{x\ln x}$,$x\in(n,n+1)$.

因而有
$$\frac{1}{n\ln n}=\int_n^{n+1}\frac{1}{n\ln n}\mathrm{d}x>\int_n^{n+1}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x.$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+1)}$的部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\ln(k+1)} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} > \sum_{k=1}^{n} \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x = \int_{2}^{n+2} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$$

$$= [\ln\ln x]_2^{n+2} = \ln[\ln(n+2)] - \ln(\ln 2),$$

因部分和无界，故级数发散.

11.（1994. Ⅰ，Ⅱ）设 $f(x)$在点 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛.

证 由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ 可推知$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. 由于 $f(x)$在 $x=0$ 处连续，故有 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，从而 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. 于是 $f(x)$在 $x=0$ 的某一邻域可用泰勒公式表为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2}x^2=\frac{f''(\theta x)}{2}x^2 \quad (0<\theta<1).$$

又因 $f''(x)$在该邻域内连续，故必在该邻域的某闭区间$[-\delta,\delta]$上有界，即当 $x\in[-\delta,\delta]$时，$|f''(x)|\leqslant M$，于是$|f(x)|\leqslant\frac{M}{2}x^2$. 当 n 充分大后，$x=\frac{1}{n}\in[-\delta,\delta]$，就有

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2}\frac{1}{n^2}.$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{M}{2}\frac{1}{n^2}$收敛，由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛.

12.（1989. Ⅰ，Ⅱ）将函数 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$展为 x 的幂级数.

解 因 $f'(x)=(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, -1<x<1,$

故 $f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n x^{2n}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$

又 $f(0)=\arctan\frac{1+0}{1-0}=\frac{\pi}{4}$,

因此 $$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, -1<x<1.$$

由于上式右端的幂级数在 $x=-1$ 处收敛，且 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$在

$x=-1$ 处连续,故

$$\arctan x=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\ -1\leqslant x<1.$$

13.(1993.Ⅰ,Ⅱ)求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$的和.

解 所给级数是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n$ 中 x 取 $-\frac{1}{2}$的情形.易见 $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$,记和函数为 $S(x)$,于是 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=S\left(-\frac{1}{2}\right)$.下面求 $S(x)$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n+\frac{1}{1-x},$$

$$=x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}+\frac{1}{1-x}.$$

设 $\varphi(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$,则

$$\int_0^x\varphi(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}nx^{n-1},\ \int_0^x\left[\int_0^x\varphi(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}x^n=\frac{x^2}{1-x},\ -1<x<1.$$

于是
$$\varphi(x)=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{2}{(1-x)^3},$$

从而
$$S(x)=x^2\varphi(x)+\frac{1}{1-x}=\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{1}{1-x}.$$

所以原级数的和为 $S\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{27}+\frac{2}{3}=\frac{22}{27}$.

14.(1995.Ⅰ,Ⅱ)将 $f(x)=x-1(0\leqslant x\leqslant 2)$展开成周期为 4 的余弦级数.

解 先将 $f(x)$在$(-2,0)$作偶延拓,再以 4 为周期作周期延拓得 $F(x)$,则 $F(x)$满足收敛定理的条件是处处连续,在$[0,2]$上 $F(x)\equiv f(x)$.

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)\mathrm{d}x=0,$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^2(x-1)\mathrm{d}\left(\sin\frac{n\pi x}{2}\right)=-\frac{2}{n\pi}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{(n\pi)^2}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}\dfrac{-8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases}\ (k=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2},x\in[0,2].$$

15．(1997.Ⅰ)设 $a_1=2,a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)(n=1,2,\cdots)$.证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在;(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$收敛.

证 (1) 显然 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$,且 $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant\sqrt{a_n\cdot\frac{1}{a_n}}=1$ $(n=1,2,\cdots)$.

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)-a_n=\frac{1-a_n^2}{2a_n}\leqslant 0.$$

故 a_n 是单调递减有下界的数列,从而必有极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(2) 由(1)知 $0\leqslant\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}\leqslant a_n-a_{n+1}$,

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$为正项级数.若 S_n 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$的部分和,则

$$S_n=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n+1})=a_1-a_{n+1},$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在,所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在,即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$收敛.由比较审敛法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$收敛.

16.(1999.Ⅰ)设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$,(1)求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$的和;(2) 试证:对任意常数 $\lambda>0$,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$收敛.

(1) **解** 由于 $a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 x\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{n+1}[\tan^{n+1}x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1},$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1.$

(2) **证** 因 $a_n>0(n=1,2\cdots)$,且 $a_n+a_{n+2}=\frac{1}{n+1}$,有

$$\frac{a_n}{n^\lambda}<\frac{a_n+a_{n+2}}{n^\lambda}=\frac{1}{n^\lambda(n+1)}<\frac{1}{n^{1+\lambda}},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\lambda}}$ 收敛,故由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

17.(1998.Ⅰ)设正项数列$\{a_n\}$单调减少,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,试问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛? 并说明理由.

解 级数收敛.

由于 $a_n>0(n=1,2\cdots)$并且单调减少,故必有极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,且 $a\geqslant 0$.若 $a=0$.则由莱布尼茨定理知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛,与条件矛盾,故 $a>0$.

因为 $a_n\geqslant a>0$,故

$$\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n\leqslant\left(\frac{1}{a+1}\right)^n.$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+1}\right)^n$ 收敛,故由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 收敛.

18.(2001.Ⅰ)设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 试将 $f(x)$展开成 x 的幂级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$的和.

解 因为

$$\arctan x=\int_0^x(\arctan x)'\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n x^{2n}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in[-1,1]$$

所以
$$\frac{\arctan x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n},x\in[-1,0)\cup(0,1],$$

于是

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2n+1}+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right]x^{2n}$$

$$=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n},x\in[-1,0)\cup(0,1].$$

由于上式右端取 $x=0$ 时值为 1，而由题设，$f(0)=1$，故

$$f(x)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n},\ x\in[-1,1].$$

令 $x=1$，得
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}[f(1)-1]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

（八）微分方程

1．（1999．Ⅰ，Ⅱ）$y''-4y=e^{2x}$ 的通解为__________．

解 此方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-4=0$，其根为 $r_{1,2}=\pm 2$．又因自由项 $f(x)=e^{2x}$，$\lambda=2$ 是特征方程的单根，故令 $y^*=Axe^{2x}$ 是原方程的特解，代入方程可得 $A=\dfrac{1}{4}$，于是原方程的通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+\frac{x}{4}e^{2x}.$$

2．（2000．Ⅰ）微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为__________．

解 原方程可变形为 $\dfrac{dy'}{y'}=-\dfrac{3}{x}dx$，积分得 $\ln y'=-3\ln x+\ln C_1'$，

即
$$y'=\frac{C_1'}{x^3}.$$

故
$$y=-\frac{C_1'}{2}\frac{1}{x^2}+C_2=\frac{C_1}{x^2}+C_2.$$

3．（2001．Ⅰ）设 $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$（$C_1,C_2$ 为任意常数）为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，则该微分方程为__________．

解 由所给通解的表达式知，$r_{1,2}=1\pm i$ 是所求微分方程的特征方程的根，于是特征方程为 $r^2-2r+2=0$，故所求微分方程为

$$y''-2y'+2y=0.$$

4．（2001．Ⅱ）过点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 且满足关系式 $y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 的曲线方程为__________．

解 将所给关系式改写成 $y'+\dfrac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}y=\dfrac{1}{\arcsin x}$，由一阶线性微分方程的通解公式，得 $y=e^{-\int\frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}}\left(\int\dfrac{1}{\arcsin x}e^{\int\frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}}dx+C\right)$，即

$$y=\frac{1}{\arcsin x}(x+C)$$

代入初始条件 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=0$，得 $C=-\dfrac{1}{2}$，故所求曲线的方程为

$$y=\frac{x-\frac{1}{2}}{\arcsin x}.$$

5. (1989. Ⅰ, Ⅱ)设线性无关的函数 y_1,y_2,y_3 都是二阶非齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

的解, C_1,C_2 是任意常数,则该非齐次方程的通解是(　　).

(A) $C_1y_1+C_2y_2+y_3$;　　(B) $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$;

(C) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$; (D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$.

解　因 y_1-y_3 与 y_2-y_3 是对应的齐次方程的解,且由 y_1,y_2,y_3 线性无关可推知 y_1-y_3 与 y_2-y_3 线性无关,而 y_3 是非齐次方程的特解,故

$$y=C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)+y_3=C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$$

是非齐次方程的通解.所以选择(D).

6. (1989. Ⅲ)微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特解应具有形式(式中 a,b 为常数)(　　).

(A) ae^x+b;　(B) axe^x+b;　(C) ae^x+bx;　(D) axe^x+bx.

解　原方程对应的齐次方程的特征方程的根为 $r_{1,2}=\pm1$.相对于方程 $y''-y=e^x$,因 $f_1(x)=e^x$, $\lambda=1$ 是特征方程的(单)根,故该方程的特解应形如 $y_1^*=axe^x$.

又相对于方程 $y''-y=1$,因 $f_2(x)=1$, $\lambda=0$ 不是特征方程的根.故该方程的特解应形如 $y_2^*=b$.

按叠加原理,原方程的特解应形如 $y^*=y_1^*+y_2^*=axe^x+b$.故应选择(B).

7. (1993. Ⅰ, Ⅱ)设曲线积分 $\int_L[f(x)-e^x]\sin y\,dx-f(x)\cos y\,dy$ 与路径无关,其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数,且 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 等于(　　).

(A) $\frac{1}{2}(e^{-x}-e^x)$;　　(B) $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$;

(C) $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})+1$;　　(D) $1-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

解　由曲线积分与路径无关的充要条件 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,可得微分方程

$$f'(x)+f(x)=e^x.$$

其通解为　$f(x)=e^{-\int dx}\left(\int e^x e^{\int dx}dx+C\right)=e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+C\right)$.

由 $f(0)=0$ 可得 $C=-\frac{1}{2}$,于是 $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.故应选择(B).

8. (1994. Ⅲ)设 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''-y'-e^{\sin x}=0$ 的解,且 $f'(x_0)=0$,则 $f(x)$ 在(　　).

(A) x_0 的某邻域内单调增加.　　(B) x_0 的某邻域内单调减少.

(C) x_0 处取得极小值.　　　　　　　　(D) x_0 处取得极大值.

解　因 $f'(x_0)=0$，即 x_0 是 $f(x)$的驻点，又因 $f(x)$是微分方程的解，故有

$$f''(x_0)=f'(x_0)+e^{\sin x_0}=e^{\sin x_0}>0.$$

这说明 x_0 是 $f(x)$的极小值点，所以应选择(C).

9.(1993.Ⅰ,Ⅱ)求微分方程 $x^2y'+xy=y^2$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解.

解　**方法一**　用伯努利方程的解法，将原方程化为

$$y^{-2}y'+\frac{1}{x}y^{-1}=\frac{1}{x^2}.$$

令 $z=y^{-1}$，则 $z'=-y^{-2}y'$，且原方程可化为

$$z'-\frac{1}{x}z=-\frac{1}{x^2}.$$

解得
$$\begin{aligned} z &= e^{\int\frac{dx}{x}}\left(\int -\frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{dx}{x}}dx+C\right)=x\left(\int -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}dx+C\right)\\ &=x\left(\frac{1}{2x^2}+C\right)=Cx+\frac{1}{2x},\end{aligned}$$

即原方程的通解为　$y=\dfrac{2x}{2Cx^2+1}$.

由 $y(1)=1$，得 $C=\dfrac{1}{2}$，故所求特解为

$$y=\frac{2x}{x^2+1}.$$

方法二　将原方程化为 $y'=\dfrac{y^2-xy}{x^2}$，即

$$y'=\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x},$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$，即 $y=xu$，则 $y'=u+xu'$. 且原方程化为 $u+xu'=u^2-u$. 分离变量后积分

$$\int\frac{du}{u^2-2u}=\int\frac{dx}{x}$$

得
$$\frac{1}{2}[\ln(u-2)-\ln u]=\ln x+\frac{1}{2}\ln C,$$

即
$$\frac{u-2}{u}=Cx^2.$$

代入 $u=\dfrac{y}{x}$，得原方程的通解

$$\frac{y-2x}{y}=Cx^2.$$

由 $y(1)=1$，得 $C=-1$，故所求特解为$\frac{y-2x}{y}=-x^2$，即

$$y=\frac{2x}{x^2+1}.$$

10.（1997.Ⅰ）在某一人群中推广新技术是通过其中已掌握新技术的人进行的．设该人群的总人数为 N，在 $t=0$ 时刻已掌握新技术的人数为 x_0，在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$（将 $x(t)$ 视为连续可微变量），其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比，比例常数 $k>0$，求 $x(t)$.

解 按题意可得初值问题$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx(N-x)$，$x|_{t=0}=x_0$.

分离变量得
$$\frac{\mathrm{d}x}{x(N-x)}=k\mathrm{d}t,$$
两端分别从 x_0 到 x 和从 0 到 t 积分，得初值问题的解：

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{x(N-x)}=\int_0^t k\mathrm{d}t=kt,$$

左端为

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{x(N-x)}=\frac{1}{N}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{N-x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{N}\left(\ln\frac{x}{N-x}-\ln\frac{x_0}{N-x_0}\right),$$

由 $\frac{1}{N}\left(\ln\frac{x}{N-x}-\ln\frac{x_0}{N-x_0}\right)=kt$ 可解出 x 得

$$x=\frac{Nx_0\mathrm{e}^{kNt}}{N-x_0+x_0\mathrm{e}^{kNt}}.$$

11.（1995.Ⅰ，Ⅱ）设曲线 L 位于 xOy 平面的第一象限内，L 上任一点 M 处的切线与 y 轴总相交，交点记为 A．已知 $|MA|=|OA|$，且 L 过点$\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$，求 L 的方程．

解 设点 M 的坐标为 (x,y)，则切线 MA 的方程为

$$Y-y=y'(X-x).$$

令 $X=0$，得 A 的坐标 $(0,y-xy')$.

因 $|MA|=|OA|$，故有

$$|y-xy'|=\sqrt{(x-0)^2+(y-y+xy')^2},$$

化简后得
$$2yy'-\frac{1}{x}y^2=-x.$$

即
$$(y^2)'-\frac{1}{x}y^2=-x.$$

由一阶线性方程的通解公式解得

$$y^2 = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(\int -xe^{-\int \frac{1}{x}dx}dx + C\right) = x(-x + C) = -x^2 + Cx.$$

由于 L 位于第一象限，故取

$$y = \sqrt{Cx - x^2}.$$

代入初始条件 $x=\frac{3}{2}, y=\frac{3}{2}$，得 $C=3$. 故 L 的方程为

$$y = \sqrt{3x - x^2}.$$

12.（1995. Ⅲ）设 $y=e^x$ 是微分方程 $xy' + p(x)y = x$ 的一个解，求此微分方程满足条件 $y|_{x=\ln 2}=0$ 的特解.

解 将 $y=e^x$ 代入原方程，可得

$$xe^x + p(x)e^x = x,$$

故 $$p(x) = xe^{-x} - x,$$

即原方程为 $$xy' + (xe^{-x} - x)y = x.$$

消去 x，得 $$y' + (e^{-x} - 1)y = 1.$$

于是得通解

$$\begin{aligned} y &= e^{\int(1-e^{-x})dx}\left(\int e^{\int(e^{-x}-1)dx}dx + C\right) = e^{x+e^{-x}}\left(\int e^{-(x+e^{-x})}dx + C\right) \\ &= e^{x+e^{-x}}\left(\int -e^{-e^{-x}}d(e^{-x}) + C\right) \\ &= e^{x+e^{-x}}(e^{-e^{-x}} + C) \\ &= e^x + Ce^{x+e^{-x}}. \end{aligned}$$

由初始条件 $y|_{x=\ln 2}=0$，得 $2 + C\cdot 2e^{\frac{1}{2}}=0$，即 $C=-e^{-\frac{1}{2}}$. 故所求特解为

$$y = e^x - e^{x+e^{-x}-\frac{1}{2}}.$$

13.（1996. Ⅲ）设 $f(x)$ 为连续函数.

(1) 求初值问题 $\begin{cases} y' + ay = f(x) \\ y|_{x=0} \end{cases}$ 的解 $y(x)$，其中 a 是正常数；

(2) 若 $|f(x)| \leqslant k$（k 为常数），证明当 $x \geqslant 0$ 时，有 $|y(x)| \leqslant \frac{k}{a}(1-e^{-ax})$.

解 (1) 方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int a dx}\left(\int f(x)e^{\int a dx}dx + C\right) = e^{-ax}\left(\int f(x)e^{ax}dx + C\right) \\ &= e^{-ax}(F(x) + C), \text{其中 } F(x) \text{ 是 } f(x)e^{ax} \text{ 的一个原函数}. \end{aligned}$$

由 $y|_{x=0}=0$，得 $C=-F(0)$，故

$$y = e^{-ax}[F(x) - F(0)] = e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{at}dt.$$

(2) 因$|f(x)|\leqslant k$,故

$$|y|=e^{-ax}\left|\int_0^x f(t)e^{at}dt\right|\leqslant e^{-ax}\int_0^x |f(t)|e^{at}dt$$

$$\leqslant ke^{-ax}\int_0^x e^{at}dt=ke^{-ax}\frac{1}{a}(e^{ax}-1)$$

$$=\frac{k}{a}(1-e^{-ax}).$$

14. (1988. Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ)设函数 $y=y(x)$满足微分方程 $y''-3y'+2y=2e^x$,且其图形在点(0,1)处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点的切线重合,求函数 $y=y(x)$.

解 由于在点(0,1)处,公切线的斜率为 $y|_{x=0}=(x^2-x+1)'|_{x=0}=-1$,故所求函数是初值问题$\begin{cases}y''-3y'+2y=2e^x,\\ y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=-1\end{cases}$的解.

原方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0$,解得 $r_1=1,r_2=2$.由于自由项 $f(x)=2e^x$,$\lambda=1$ 是特征方程的(单)根,故设原方程的特解 $y^*=Axe^x$.代入原方程可得 $A=-2$,即 $y^*=-2xe^x$.故原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x,$$

且
$$y'=C_1e^x+2C_2e^{2x}-2e^x-2xe^x.$$

由 $y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=-1$,得

$$\begin{cases}C_1+C_2=1,\\ C_1+2C_2-2=-1.\end{cases}$$

解得 $C_1=1,C_2=0$,故所求函数为

$$y=e^x(1-2x).$$

15. (1989. Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ)设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$,其中 f 为连续函数,求 $f(x)$.

解 因 $f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$,代入 $x=0$,得 $f(0)=0$,

且
$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt-xf(x)+xf(x)$$

即
$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt.$$
代入 $x=0$,得 $f'(0)=1$.

又
$$f''(x)=-\sin x-f(x),$$

记 $y=f(x)$,即得初值问题

$$\begin{cases}y''+y=-\sin x,\\ y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=1.\end{cases}$$

上述微分方程对应的齐次方程的特征方程有根 $r_{1,2}=\pm i$，而自由项为 $e^{0x}(0\cdot\cos x-\sin x)$，$\lambda+i\omega=i$ 是特征方程的根，故令 $y^*=x(A\cos x+B\sin x)$ 是原方程的特解，代入微分方程并比较系数，得 $A=\frac{1}{2}$，$B=0$，即 $y^*=\frac{1}{2}x\cos x$。于是得通解

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\cos x,$$

且
$$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}x\sin x.$$

由 $y|_{x=0}=0$ 及 $y'|_{x=0}=1$，得

$$\begin{cases}C_1=0,\\ C_2+\frac{1}{2}=1.\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}C_1=0,\\ C_2=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

故

$$y=f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x.$$

16．(1990．Ⅰ，Ⅱ)求微分方程 $y''+4y'+4y=e^{ax}$ 的通解，其中 a 为实数．

解 原方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+4r+4=0$，解得 $r_{1,2}=-2$．故齐次方程有通解

$$Y=(C_1+C_2x)e^{-2x}.$$

自由项 $f(x)=e^{ax}$，当 $a\neq-2$ 时，令 $y^*=Ae^{ax}$ 是原方程的特解，代入原方程，可得 $A=\frac{1}{(a+2)^2}$，即 $y^*=\frac{1}{(a+2)^2}e^{ax}$；

当 $a=-2$ 时，令 $y^*=Bx^2e^{-2x}$ 是原方程的特解，代入原方程，可得 $B=\frac{1}{2}$，即 $y^*=\frac{1}{2}x^2e^{-2x}$．故原方程的通解为

$$y=\begin{cases}(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{1}{(a+2)^2}e^{ax}, & 当\ a\neq-2,\\ (C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{1}{2}x^2e^{-2x}, & 当\ a=-2.\end{cases}$$

17．(1991.Ⅰ,Ⅱ)在上半平面上求一条向下凸的曲线，其上任一点 $P(x,y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线 PQ 长度的倒数(Q 是法线与 x 轴的交点)，且曲线在点(1,1)处的切线与 x 轴平行．

解 曲线 $y=y(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x).$$

令 $Y=0$，得点 Q 的坐标 $(x+yy',0)$，于是

$$|PQ|=\sqrt{(yy')^2+y^2}=|y|\sqrt{1+y'^2}.$$

依题意有
$$\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{|y|(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

因所求曲线在上半平面上且向下凸，有 $|y|=y$，$|y''|=y''$，故得微分方程

$$\frac{y''}{1+y'^2}=\frac{1}{y},$$

且由题设知 $y|_{x=1}=1$，$y'|_{x=1}=0$.

令 $y'=p$，则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$，且微分方程降阶为

$$\frac{p\,dp}{1+p^2}=\frac{dy}{y}.$$

由条件 $y=1$，$p=0$，积分 $\displaystyle\int_0^p\frac{p\,dp}{1+p^2}=\int_1^y\frac{dy}{y}$，得 $\dfrac{1}{2}\ln(1+p^2)=\ln y$，从而

$$p=\pm\sqrt{y^2-1},$$

即
$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=\pm dx.$$

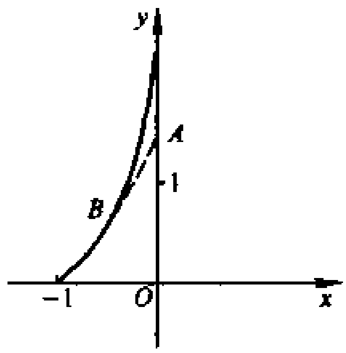
积分得
$$\operatorname{arch}y=\pm x+C,\text{即 } y=\operatorname{ch}(x+C).$$

代入初始条件 $x=1$，$y=1$，得 $C=-1$，故

$$y=\operatorname{ch}(x-1).$$

18. (1993. Ⅰ，Ⅱ)设物体 A 从点 $(0,1)$ 出发，以常速率 v 沿 y 轴正向运动. 物体 B 从点 $(-1,0)$ 与 A 同时出发，其速率为 $2v$，方向始终指向 A. 试建立物体 B 的运动轨迹所满足的微分方程，并写出初始条件.

解 设物体 B 的运动轨迹的方程为 $y=y(x)$，又设在时刻 t，物体 B 位于点 (x,y) 处，此时物体 A 位于点 $(0,1+vt)$. 按题意，则如图研 8－1 所示，有



图研 8－1

$$y'=\frac{1+vt-y}{0-x},$$

即
$$y-xy'-1=vt. \tag{1}$$

又此刻，物体 B 从点 $(-1,0)$ 行至 (x,y) 的路程为

$$\int_{-1}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx=2vt. \tag{2}$$

由(1)式与(2)式消去 vt，得

$$y-xy'-1=\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

在上式两端对 x 求导，得

$$y'-(y'+xy'')=\frac{1}{2}\sqrt{1+y'^2},$$

即
$$xy''+\frac{1}{2}\sqrt{1+y'^2}=0.$$

初始条件为
$$y|_{x=1}=0,y'|_{x=1}=1.$$

19.（1994. Ⅰ，Ⅱ）设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0,f'(0)=1$，且

$$[xy(x+y)-f(x)y]\mathrm{d}x+[f'(x)+x^2y]\mathrm{d}y=0$$

为一全微分方程，求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

解 由全微分方程的判别条件 $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$，得

$$x^2+2xy-f(x)=f''(x)+2xy,$$

即
$$f''(x)+f(x)=x^2.$$

该方程对应的齐次方程的特征方程有根 $r_{1,2}=\pm i$，且用待定系数法可求得其特解为 $f^*=x^2-2$. 故

$$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2,$$

且
$$f'(x)=-C_1\sin x+C_2\cos x+2x.$$

由 $f(0)=0,f'(0)=1$，得 $C_1=2,C_2=1$，因此

$$f(x)=2\cos x+\sin x+x^2-2.$$

于是原全微分方程为

$$[x^2y-(2\cos x+\sin x)y+2y]\mathrm{d}x+(\cos x-2\sin x+2x+x^2y)\mathrm{d}y=0$$

可写成

$$(xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y)-(2\cos x\cdot y\mathrm{d}x+2\sin x\mathrm{d}y)+(2y\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y)+$$
$$(-\sin x\cdot y\mathrm{d}x+\cos x\mathrm{d}y)=0$$

即
$$\mathrm{d}\left(\frac{x^2y^2}{2}\right)-\mathrm{d}(2\sin x\cdot y)+\mathrm{d}(2xy)+\mathrm{d}(\cos x\cdot y)=0$$

故通解为

$$\frac{x^2y^2}{2}-2y\sin x+2xy+y\cdot\cos x=C.$$

20.（1997. Ⅰ）设 $f(u)$ 具有二阶连续导数，而 $z=f(e^x\sin y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}z$，求 $f(u)$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^x\sin y,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)e^{2x}\sin^2 y+f'(u)e^x\sin y.$

$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)e^x\cos y,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}\cos^2 y-f'(u)e^x\sin y.$

代入$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}z$，得

$$f''(u)e^{2x}=e^{2x}f(u),$$

即

$$f''(u)-f(u)=0.$$

解此方程得

$$f(u)=C_1e^u+C_2e^{-u}.$$

21. (1997.Ⅱ)已知 $y_1=xe^x+e^{2x}, y_2=xe^x+e^{-x}, y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解，求此微分方程.

解 由叠加原理知，$y_1-y_2=e^{2x}-e^{-x}$ 与 $y_1-y_3=e^{-x}$ 是对应的二阶线性齐次方程的解，于是$(y_1-y_2)+(y_1-y_3)=e^{2x}$ 也是齐次方程的解，且 e^{2x} 与 e^{-x} 线性无关，它们对应了特征方程的根 $\lambda=2$ 与 $\lambda=-1$，故可设二阶线性非齐次方程为

$$y''-y'-2y=f(x).$$

而 $y_1=xe^x+e^{2x}$ 是解，代入上式得 $f(x)=e^x-2xe^x$. 故所求方程为

$$y''-y'-2y=e^x-2xe^x.$$

22. (1997.Ⅱ)设曲线 L 的极坐标方程为 $r=r(\theta)$，$M(r,\theta)$为 L 上任一点，$M_0(2,0)$为 L 上一定点. 若极径 OM_0，OM 与曲线 L 所围成的面积等于 L 上 M_0，M 两点间弧长的值之一半. 求曲线 L 的方程.

解 由题意得 $\frac{1}{2}\int_0^\theta r^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_0^\theta \sqrt{r^2+r'^2}d\theta$,

上式两端对 θ 求导，得 $\qquad r^2=\sqrt{r^2+r'^2}$,

即 $\qquad r'=\pm r\sqrt{r^2-1}$.

分离变量并积分

$$\int\frac{dr}{r\sqrt{r^2-1}}=\pm\int d\theta,$$

即

$$\int\frac{dr}{r^2\sqrt{1-\frac{1}{r^2}}}=\pm\int d\theta,$$

得

$$-\arcsin\frac{1}{r}=\pm\theta+C$$

代入初始条件 $\theta=0, r=2$，得 $C=-\frac{\pi}{6}$.

故 曲线 L 的方程为 $\qquad \arcsin\frac{1}{r}=\frac{\pi}{6}\pm\theta$，即

$$r=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\pm\theta\right)}.$$

若将 L 表示成直角坐标方程，则由 $r\sin\left(\frac{\pi}{6}\pm\theta\right)=1$，即

$$r\left(\frac{1}{2}\cos\theta\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)=1$$

得
$$x\pm\sqrt{3}y=2.$$

23.（1998.Ⅱ） 设 $y=y(x)$是一向上凸的连续曲线，其上任一点(x,y)处的曲率为$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$. 又此曲线上点(0,1)处的切线方程为 $y=x+1$，求该曲线的方程，并求 $y=y(x)$的极值.

解 因曲线向上凸，故 $y''\leqslant 0$，曲率 $K=\frac{|y''|}{\left(\sqrt{1+y'^2}\right)^3}=\frac{-y''}{\left(\sqrt{1+y'^2}\right)^3}$，按题意有

$$\frac{-y''}{\left(\sqrt{1+y'^2}\right)^3}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

即
$$\frac{y''}{1+y'^2}=-1.$$

令 $y'=p$，则上述方程化为$\frac{p'}{1+p^2}=-1$，即

$$\frac{\mathrm{d}p}{1+p^2}=-\mathrm{d}x$$

积分得
$$\arctan p=C_1-x.$$

因 $y=y(x)$在点(0,1)处的切线方程为 $y=x+1$，故 $p|_{x=0}=y'|_{x=0}=1$. 由此条件得 $\arctan 1=C_1$，即 $C_1=\frac{\pi}{4}$. 于是

$$y'=p=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right),$$

积分得
$$y=\ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]+C_2.$$

因曲线过点(0,1)，故由 $y|_{x=0}=1$，得 $C_2=1-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=1+\frac{1}{2}\ln 2$. 故所求曲线的方程为 $y=\ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]+1+\frac{1}{2}\ln 2$.

由于 $y=y(x)$是连续曲线，故 $y=\ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]+1+\frac{1}{2}\ln 2$ 的定义域为 $-\frac{\pi}{2}<x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$，即 $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$. 又 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\leqslant 1$. 故当 $x=\frac{\pi}{4}$时，y 有极大值 $1+\frac{1}{2}\ln 2$.

24.(1998.Ⅲ)设函数 $f(x)$在$[1,+\infty)$上连续.若由曲线 $y=f(x)$,直线 $x=1,x=t(t>1)$与 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积为

$$V(t)=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)],$$

试求 $y=f(x)$所满足的微分方程,并求该微分方程满足条件 $y|_{x=2}=\frac{2}{9}$的解.

解 依题意,有

$$\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)].$$

即
$$3\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=t^2f(t)-f(1).$$

两端对 t 求导,得
$$3f^2(t)=2tf(t)+t^2f'(t).$$

将变量 t 用 x 表示,即

$$x^2y'+2xy=3y^2$$

为 $y=f(x)$满足的微分方程.

将此方程改写为 $\quad y^{-2}y'+\frac{2}{x}y^{-1}=\frac{3}{x^2}$,

令 $z=y^{-1}$,则 $z'=-y^{-2}y'$,且方程变为

$$z'-\frac{2}{x}z=-\frac{3}{x^2}.$$

解此线性方程得

$$\begin{aligned}z&=e^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(\int-\frac{3}{x^2}e^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=x^2\left(\frac{1}{x^3}+C\right)=Cx^2+\frac{1}{x},\end{aligned}$$

即
$$y=\frac{1}{Cx^2+\frac{1}{x}}=\frac{x}{Cx^3+1}.$$

由 $y|_{x=2}=\frac{2}{9}$,得 $C=1$,故所求特解为

$$y=\frac{x}{x^3+1}.$$

25.(2001.Ⅳ)设函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$内连续,$f(1)=\frac{5}{2}$,且对所有 x,$t\in(0,+\infty)$,满足条件

$$\int_1^{xt}f(u)\mathrm{d}u=t\int_1^x f(u)\mathrm{d}u+x\int_1^t f(u)\mathrm{d}u,$$

求 $f(x)$.

解 在所给条件等式的两端对 x 求导,得

$$tf(xt)=tf(x)+\int_1^t f(u)\mathrm{d}u.$$

在上式中令 $x=1$,且由 $f(1)=\frac{5}{2}$,可得

$$tf(t)=\frac{5}{2}t+\int_1^t f(u)\mathrm{d}u. \tag{1}$$

由于 $t>0$ 时 $\frac{1}{t}\int_1^t f(u)\mathrm{d}u$ 关于 t 可导,故 $f(t)=\frac{5}{2}+\frac{1}{t}\int_1^t f(u)\mathrm{d}u$ 可导,于是在等式(1)两端对 t 求导,得

$$f(t)+tf'(t)=\frac{5}{2}+f(t),$$

即

$$f'(t)=\frac{5}{2t},$$

积分得

$$f(t)=\frac{5}{2}\ln t+C.$$

由 $f(1)=\frac{5}{2}$,得 $C=\frac{5}{2}$. 故 $f(t)=\frac{5}{2}\ln t+\frac{5}{2}$,即

$$f(x)=\frac{5}{2}(\ln x+1).$$

三、同济大学《高等数学》试卷选编

（一）高等数学（下）期中考试试卷（Ⅰ）

试　　题

一、填空题

1. 有关多元函数的各性质：(A) 连续；(B) 可微分；(C) 可偏导；(D) 各偏导数连续，它们的关系是怎样的？若用记号“$X\Rightarrow Y$”表示由 X 可推得 Y，则

$$(\quad)\Rightarrow(\quad)\Rightarrow\begin{cases}(\quad)\\(\quad)\end{cases}.$$

2. 函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点$(1,1)$处的梯度为________，该点处各方向导数中的最大值是________.

3. 设函数 $F(x,y)$可微，则柱面 $F(x,y)=0$ 在点(x,y,z)处的法向量为____________，平面曲线 $\begin{cases}F(x,y)=0,\\z=0\end{cases}$ 在点(x,y)处的切向量为____________.

4. 设函数 $f(x,y)$连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$ 交换积分次序后为____________.

二、方程 $F(x,y,z)=0$ 在什么条件下，可在 $P(x_0,y_0,z_0)$的邻近确定有连续偏导数的函数 $y=y(z,x)$？

三、计算题.

1. 设 $z=z(x,y)$是由方程 $f(x-z,y-z)=0$ 所确定的隐函数，其中 $f(u,v)$具有连续的偏导数且$\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\neq0$，求$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$的值.

2. 设二元函数 $f(u,v)$有连续的偏导数，且 $f_u(1,0)=f_v(1,0)=1$. 又函数 $u=u(x,y)$与 $v=v(x,y)$由方程组 $\begin{cases}x=au+bv,\\y=bu-av\end{cases}$ $(a^2+b^2\neq0)$确定，求复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$的偏导数$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)=(a,b)}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)=(a,b)}$.

3. 已知曲面 $z=1-x^2-y^2$ 上的点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z=1$,求该切平面的方程.

4. 计算二重积分:$\iint\limits_D \sin\dfrac{x}{y}\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是以直线 $y=x$, $y=2$ 和曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 为边界的曲边三角形区域.

5. 计算曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$,其中 L 为折线 $y=1-|1-x|$, x 从 0 增大到 2.

四、球面被一平面分割为两部分,面积小的那部分称为"球冠";同时,垂直于平面的直径被该平面分割为两段,短的一段之长度称为球冠的高.证明:球半径为 R、高为 h 的球冠的面积与整个球面面积之比为 $h:2R$.

五、设线材 L 的形状为锥面曲线,其方程为:$x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$,其线密度 $\rho(x,y,z)=z$,试求 L 的质量.

六、求密度为 μ 的均匀柱体 $x^2+y^2\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1$,对位于点 $M(0,0,2)$ 处的单位质点的引力.

参考答案

一、

1. $(\mathrm{D}) \Rightarrow (\mathrm{B}) \Rightarrow \begin{cases}(\mathrm{A})\\(\mathrm{C})\end{cases}$.

2. 所求梯度为 $\mathbf{grad}f(1,1)=(f_x(1,1),f_y(1,1))=(1,1)$.

方向导数在梯度方向达到最大,因此方向导数的最大值为 $|\mathbf{grad}\ f(1,1)|=\sqrt{2}$.

3. $(F_x(x,y,z),F_y(x,y,z),0)$, $\pm(F_y(x,y,z),-F_x(x,y,z),0)$.

4. $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\mathrm{d}x$.

二、如果函数 $u=F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数,且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$, $F_y(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内可确定有连续偏导数的函数 $y=y(z,x)$.

三、

1. 令 $u=x-z$, $v=y-z$,则由隐函数求导公式,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial[f(x-z,y-z)]}{\partial x}}{\dfrac{\partial[f(x-z,y-z)]}{\partial z}}=-\frac{f_u}{-f_u-f_v}=\frac{f_u}{f_u+f_v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial[f(x-z,y-z)]}{\partial y}}{\dfrac{\partial[f(x-z,y-z)]}{\partial z}}=-\frac{f_v}{-f_u-f_v}=\frac{f_v}{f_u+f_v},$$

所以
$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

2. 在方程组每个方程的两端对 x 求偏导,得

$$\begin{cases}1=au_x+bv_x,\\0=bu_x-av_x,\end{cases}$$

解得

$$u_x=\frac{a}{a^2+b^2},v_x=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

又在每个方程的两端对 y 求偏导,得

$$\begin{cases}0=au_y+bv_y,\\1=bu_y-av_y,\end{cases}$$

解得

$$u_y=\frac{b}{a^2+b^2},v_y=-\frac{a}{a^2+b^2}.$$

易知当 $x=a,y=b$ 时,$u=1,v=0$,因此

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)=(a,b)}=f_u(1,0)u_x+f_v(1,0)v_x=\frac{a+b}{a^2+b^2},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)=(a,b)}=f_u(1,0)u_y+f_v(1,0)v_y=\frac{b-a}{a^2+b^2}.$$

3. 设点 P 的坐标为(x_0,y_0,z_0),则 $z_0=1-x_0^2-y_0^2$,曲面在点 P 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(z_x,z_y,-1)|_P=(-2x_0,-2y_0,-1).$$

由条件可知,法向量 $\boldsymbol{n}$ 平行已知平面的法向量(2,2,1),故有

$$\frac{-2x_0}{2}=\frac{-2y_0}{2}=\frac{-1}{1},$$

解得 $x_0=1,y_0=1,z_0=1-x_0^2-y_0^2=-1$,因此点 P 处的切平面方程为

$$2(x-1)+2(y-1)+[z-(-1)]=0,$$

即
$$2x+2y+z-3=0.$$

4. 区域 D 如图 1,因此

$$\iint\limits_D\sin\frac{x}{y}\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{y^3}\sin\frac{x}{y}\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2\left[-y\cos\frac{x}{y}\right]_y^{y^3}\mathrm{d}y=\int_1^2(y\cos 1-y\cos y^2)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}(3\cos 1 + \sin 1 - \sin 4).$$

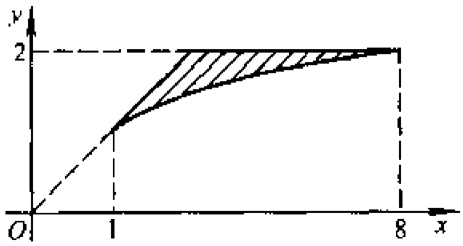


图 1

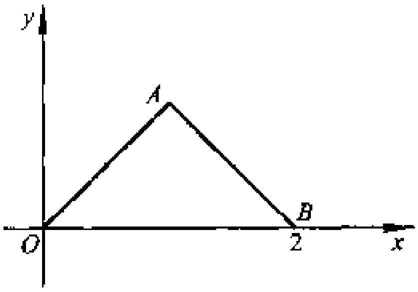


图 2

5. 如图 2,将 L 分为 OA 和 AB 两段,则有

$$\int_L (x^2 + y^2)\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{OA} (x^2 + y^2)\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\mathrm{d}y + \int_{AB} (x^2 + y^2)\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 [(x^2 + x^2) + (x^2 - x^2)]\mathrm{d}x + \int_1^2 \{[x^2 + (2-x)^2] - [x^2 - (2-x)^2]\}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 2x^2\mathrm{d}x + \int_1^2 2(2-x)^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

四、取球心为坐标原点,则球冠方程为

$$y = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,(x^2 + y^2 \leqslant R^2 - (R-h)^2 = 2Rh - h^2),$$

因此球冠面积为

$$S = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2Rh-h^2} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2Rh-h^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2Rh-h^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho = 2\pi Rh,$$

球冠面积与球面面积之比为

$$2\pi Rh : 4\pi R^2 = h : 2R.$$

五、L 的质量为

$$M = \int_L \rho(x, y, z)\mathrm{d}s = \int_L z\mathrm{d}s.$$

由于

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2 + t^2}\,\mathrm{d}t,$$

因此

$$M=\int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}(2+4\pi^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}2^{\frac{3}{2}}.$$

六、设引力 $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)$，则由对称性可知，$F_x=0$，$F_y=0$.

$$F_z=\iiint\limits_{\Omega} G\frac{\mu(z-2)}{[x^2+y^2+(z-2)^2]^{3/2}}\mathrm{d}v=G\mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^1\frac{z-2}{[\rho^2+(z-2)^2]^{3/2}}\rho\,\mathrm{d}z$$

$$=2\pi G\mu\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+4}}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+1}}\right)\rho\,\mathrm{d}\rho=2\pi G\mu(\sqrt{5}-1-\sqrt{2}),$$

故引力 $\boldsymbol{F}$ 沿 z 轴铅直向下，其大小为 $2\pi G\mu(\sqrt{2}+1-\sqrt{5})$.

(二) 高等数学(下)期中考试试卷(Ⅱ)

试　　题

一、简答题.

1. 求曲线$\begin{cases} x = t - \cos t, \\ y = 3 + \sin 2t, \\ z = 1 + \cos 3t \end{cases}$在点$\left(\dfrac{\pi}{2}, 3, 1\right)$处的切线方程.

2. 根据隐函数存在定理,方程 $xy - z\ln y + e^{xz} = 1$ 在点(0,1,1)的某邻域内可确定哪几个具有连续偏导数的隐函数?为什么?

3. 不需要具体求解,指出解决下列问题的两条不同的解题思路:

设椭球面$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$与平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 没有交点,求椭球面与平面之间的最小距离.

4. 设函数 $z = f(x, y)$ 具有二阶连续的偏导数,$y = x^3$ 是 f 的一条等高线,若 $f_y(1,1) = -1$,求 $f_x(1,1)$.

二、设函数 f 具有二阶连续的偏导数,$u = f(xy, x + y)$,求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

三、设变量 x, y, z 满足方程 $z = f(x, y)$ 及 $g(x, y, z) = 0$,其中 f 与 g 均具有连续的偏导数,求$\dfrac{dy}{dx}$.

四、求曲线$\begin{cases} xyz = 0, \\ x - y^2 - 1 = 0 \end{cases}$在点(0,1,1)处的切线与法平面的方程.

五、计算积分$\iint\limits_D e^{y^2} dx dy$,其中 D 是顶点为(0,0)、(1,1)、(0,1)的三角形区域.

六、求函数 $z = x^2 + y^2$ 在圆形闭区域$(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leqslant 9$ 上的最大值和最小值.

七、设一座山的表面的方程为 $z = 1\,000 - 2x^2 - y^2$,$M(x, y)$ 是山脚 $z = 0$ 即等量线 $2x^2 + y^2 = 1\,000$ 上的点.

(1) 问:z 在点 $M(x, y)$ 处沿什么方向的增长率最大,并求出此增长率;

(2) 攀岩活动要在山脚处找一最陡的位置作为攀岩的起点，即在该等量线上找一点 M 使得上述增长率最大，请写出该点的坐标.

八、设曲面 Σ 是双曲线 $z^2-4y^2=2$（$z>0$ 的一支）绕 z 轴旋转而成，曲面上一点 M 处的切平面 Π 与平面 $x+y+z=0$ 平行.

(1) 写出曲面 Σ 的方程，并求出点 M 的坐标；

(2) 若 Ω 是 Σ、Π 和柱面 $x^2+y^2=1$ 围成的立体，求 Ω 的体积.

参考答案

一、

1. 点 $P_0\left(\frac{\pi}{2},3,1\right)$对应的参数为 $t=\frac{\pi}{2}$，故该点处的切向量为

$$\boldsymbol{\tau}=(x',y',z')|_{P_0}=(2,-2,3),$$

因此所求切线方程为

$$\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{3}.$$

2. 记 $f(x,y,z)=xy-z\ln y+e^{xz}-1$，则 $F(0,1,1)=0$，F 的一阶偏导数在该点邻域内显然连续，且

$$F_x(0,1,1)=1\neq0,F_y(0,1,1)=-2\neq0,F_z(0,1,1)=0,$$

故在点(0,1,1)的某邻域内可确定具有连续偏导数的隐函数 $y=y(z,x)$和 $x=x(y,z)$.

3. **思路一** 求出椭球面上的点，使该点的切平面平行于平面$Ax+By+Cz+D=0$，这样的点必能求得两个. 比较两个切点到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离，较小者即为所求.

思路二 设椭球面上一点为 $P(x,y,z)$，将点 P 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离 d 表达为x,y,z 的函数，则 d 在约束条件$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 下的最小值即为所求的最小距离.

4. 由于 $y=x^3$ 为 $z=f(x,y)$的等高线，因此

$$f(x,x^3)=0$$

两端对 x 求导，得 $\quad f_x(x,x^3)+f_y(x,x^3)\cdot3x^2=0,$

令 $x=1$，即得

$$f_x(1,1)=3.$$

二、

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yf_1'+f_2',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=f_1'+y(f_{11}''\cdot x+f_{12}'')+(f_{21}''\cdot x+f_{22}'')$$
$$=xyf_{11}''+(x+y)f_{12}''+f_{22}''+f_1'.$$

三、在方程组$\begin{cases}z=f(x,y),\\ g(x,y,z)=0\end{cases}$中每个方程的两端对 x 求导，得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_x+f_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\\ g_x+g_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+g_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0.\end{cases}$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{g_x+g_zf_x}{g_y+g_zf_y}.$$

四、在方程组$\begin{cases}xyz=0,\\ x-y^2-1=0\end{cases}$的每个方程的两端对 z 求导，得

$$\begin{cases}yz\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+xz\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+xy=0,\\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}-2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=0.\end{cases}$$

把 $x=0,y=1,z=1$ 代入，解得

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right|_{(0,1,1)}=0,\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right|_{(0,1,1)}=0.$$

故点(0,1,1)处的切向量为 $\boldsymbol{\tau}=(0,0,1)$，

从而得切线方程为 $\qquad x=0,y=1,z=1+t,$

法平面方程为 $\qquad z-1=0.$

五、积分区域如图 3 所示

$$\iint_D \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x$$
$$=\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{y^2}\right]_0^1=\frac{\mathrm{e}-1}{2}.$$

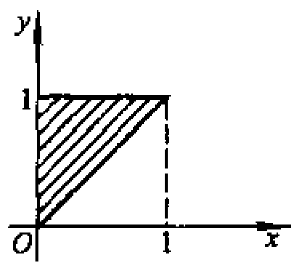


图 3

六、由$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x=0,\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y=0$ 解得 $x=0,y=0$.

(0,0)为 $z=x^2+y^2$ 在区域$(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2<9$ 内的惟一驻点.

再求 $z=x^2+y^2$ 在圆周$(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9$ 上的最大、最小值.作拉格朗日函数

$$F(x,y)=x^2+y^2+\lambda[(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2-9],$$

令
$$\begin{cases}F_x=2x+2\lambda(x-\sqrt{2})=0,\\F_y=2y+2\lambda(y-\sqrt{2})=0,\end{cases}$$
并与约束条件$(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9$联立解得
$$\begin{cases}x_1=\frac{5}{2}\sqrt{2},\\y_1=\frac{5}{2}\sqrt{2},\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2},\\y_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

比较 $z=x^2+y^2$ 在驻点(x_1,y_1)、(x_2,y_2)处的函数值的大小，得

最小值 $=z|_{(0,0)}=0$,

最大值 $=z|_{(x_1,y_1)}=25$.

七、(1) z 在$M(x,y)$处沿梯度方向 $\mathbf{grad}\ z=(-4x,-2y)$增长率最大.

最大增长率为$|\mathbf{grad}\ z|_M=\sqrt{(-4x)^2+(-2y)^2}=2\sqrt{4x^2+y^2}$.

(2) 若记 $f(x,y)=4x^2+y^2$,则题意需求 $f(x,y)$在条件 $2x^2+y^2=1\ 000$ 约束下的最大值,为此作拉格朗日函数
$$F(x,y)=4x^2+y^2+\lambda(2x^2+y^2-1\ 000),$$
令
$$\begin{cases}F_x=8x+4\lambda x=0,\\F_y=2y+2\lambda y=0.\end{cases}$$
并与约束条件 $2x^2+y^2=1\ 000$ 联立可解得
$$\begin{cases}x_1=0,\\y_1=10\sqrt{10},\end{cases}\begin{cases}x_2=0,\\y_2=-10\sqrt{10},\end{cases}\begin{cases}x_3=10\sqrt{5},\\y_3=0,\end{cases}\begin{cases}x_4=-10\sqrt{5},\\y_4=0.\end{cases}$$

由本问题的实际意义知最大值一定存在,又 $F(x_1,y_1)=F(x_2,y_2)=1\ 000$, $F(x_3,y_3)=F(x_4,y_4)=2\ 000$,故所求点为$(10\sqrt{5},0)$,$(-10\sqrt{5},0)$

八、(1) 曲面 Σ 的方程为
$$z^2-4(x^2+y^2)=2\quad(z>0).$$

设点 M 的坐标为x_0,y_0,z_0,记 $F(x,y,z)=z^2-4(x^2+y^2)-2$,则曲面 Σ 在点 M 处的法向量为
$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)|_M=(-8x_0,-8y_0,2z_0),$$
由题设可知
$$\boldsymbol{n}\ /\!/\ (1,1,1),$$
即
$$\frac{-8x_0}{1}=\frac{-8y_0}{1}=\frac{2z_0}{1},$$
又
$$F(x_0,y_0,z_0)=0,$$
解得
$$x_0=y_0=-\frac{1}{2},z_0=2.$$

即点 M 为$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2\right)$.

(2) 切平面 Π 为$\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(y+\frac{1}{2}\right)+(z-2)=0$,即 $z=1-x-y$,

Ω 的体积为

$$\begin{aligned}V&=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{1-x-y}^{\sqrt{2+4(x^2+y^2)}}\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(\sqrt{2+4\rho^2}-1+\rho\cos\theta+\rho\sin\theta\right)\rho\mathrm{d}\rho\\&=\left(\sqrt{6}-1-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\pi.\end{aligned}$$

（三）高等数学（下）期末考试试卷（Ⅰ）

试　　题

一、简答题（要求：简洁、明确）.

1．函数 $z=y^2-x^2$ 在点(1,1)处沿什么方向有最大的增长率，该增长率为多少？

2．设函数 $F(x,y,z)=(z+1)\ln y+e^{xz}-1$，为什么方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 $M(1,1,0)$ 的某个邻域内可以确定一个可微的二元函数 $z=z(x,y)$？

3．曲线 $x=t^2-1, y=t+1, z=t^3$ 在点 $P(0,2,1)$ 处的切线方程是什么？

4．设平面区域 $D=\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right.\right\}(a>0,b>0)$，

求 $\iint\limits_D (ax^3+by^5+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

5．级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}x^n$ 的收敛域是什么？

6．设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x+1, 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ e^{-x}-1, -\pi\leqslant x<0\end{cases}$ 的傅里叶系数为 a_0, a_n, b_n $(n\in\mathbf{N}^*)$，问级数 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的和是多少？

二、计算积分.

1．$I=\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}y\int_{y-\pi}^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

2．$I=\int\limits_L (x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$，$L$ 为上半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(y\geqslant 0)$ 取逆时针方向.

三、设定向曲面 Σ 是由曲线 $\begin{cases}z=y^2,\\ x=0\end{cases}(0\leqslant z\leqslant 2)$ 绕 z 轴旋转而成的曲面的外侧（即朝着 z 轴负方向的一侧）.

(1) 写出 Σ 的方程和 Σ 上任一点处的单位法向量；

(2) 计算积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}4(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(8y+1)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

四、求微分方程$(1+x^2)y' = xy + xy^2$ 的通解.

五、把函数 $f(x)=\frac{\pi - x}{2}(0\leqslant x\leqslant \pi)$展开成正弦级数.

六、应用题.

1. 求曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)$在第一卦限的切平面,使该切平面与三个坐标面围成的四面体的体积为最小,并写出该四面体的体积.

2. 设 Ω 是由曲面 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=0,z=1$ 所围成的立体.求:(1) Ω 的体积 V;(2) Ω 的表面积 A.

参考答案

一、

1. 函数沿梯度方向 $\mathbf{grad}\ z|_{(1,1)}=(-2,2)$有最大的增长率.

最大增长率为$|\mathbf{grad}\ z|_{(1,1)}|=2\sqrt{2}$.

2. 因为 $F(x,y,z)$满足

(1) $F(1,1,0)=0$,

(2) $F(x,y,z)$在 M 的某邻域内一阶偏导连续,且 $F_z(1,1,0)=1\neq 0$.

因此方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 M 的某个邻域内可确定一个可微的函数 $z=z(x,y)$.

3. 由于点 $P(0,2,1)$相应的参数 $t=1$,故该点处的切向量

$$\boldsymbol{\tau}=(x',y',z')|_{t=1}=(2,1,3),$$

于是所求切线方程为$\frac{x}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{3}$.

4. 由于 x^3 关于 x 为奇函数,y^5 关于 y 为奇函数.积分区域关于 x 轴、y 轴均对称.故有

$$\iint\limits_D (ax^3+by^5+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a\iint\limits_D x^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y + b\iint\limits_D y^5\mathrm{d}x\mathrm{d}y + c\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= a\cdot 0 + b\cdot 0 + c\cdot \pi ab = \pi abc.$$

5. 记 $a_n=\frac{2^n}{n^2+1}$,由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2[(n+1)^2+1]}{n^2+1}=2,$$

因此收敛半径 $R=\frac{1}{2}$.又当 $x=\pm\frac{1}{2}$时,得级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm 1)^n}{n^2+1}$,均收敛.故所求收

敛域为$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

6. $f(x)$的傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

记其和函数为 $S(x)$,则

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S(0)=\frac{1}{2}[f(0^-)+f(0^+)]=1.$$

二、

1. 积分区域如图 4,

$$I=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\pi}^{\pi+x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=2.$$

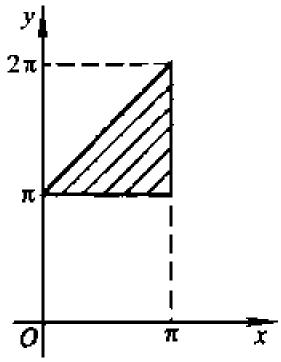


图 4

2. **解法一** 取 L 的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t,\end{cases}$$t$ 从 0 变到 π,则

$$I=\int_0^{\pi}[(a\cos t+b\sin t)(-a\sin t)+(b\sin t-a\cos t)b\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\pi}[(b^2-a^2)\sin t\cos t-ab]\mathrm{d}t=-\pi ab.$$

解法二 取有向直线段 $L_1:y=0$,x 从 $-a$ 变到 a.则

$$I=\oint_{L+L_1}(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y-\int_{L_1}(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{格林公式}}\iint_D(-1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{-a}^{a}x\mathrm{d}x=-\pi ab.$$

三、(1) Σ 的方程为

$$z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 2),$$

Σ 上任一点处的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{(z_x,z_y,-1)}{\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}}=\frac{(2x,2y,-1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}.$$

(2) 令 $\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 2,\\ z=2,\end{cases}$取上侧,则

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}4(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(8y+1)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_1}4(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(8y+1)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} (-8y+8y+1)\mathrm{d}v - \iint_{\Sigma_1} 2(8y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\rho \int_{\rho^2}^{2} \rho \mathrm{d}z - \iint_{x^2+y^2\leqslant 2} 2(8y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\pi - \iint_{x^2+y^2\leqslant 2} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\pi.$$

四、这是伯努利方程，方程两端除以 y^2，令 $z=\frac{1}{y}$，得

$$-(1+x^2)z' = xz + x, \tag{1}$$

与(1)对应的齐次线性微分方程为

$$-(1+x^2)z' = xz,$$

其通解为

$$z = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}.$$

用常数变易法，令方程(1)的解为 $z=\frac{u(x)}{\sqrt{1+x^2}}$，代入方程(1)得

$$u' = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

于是

$$u = \int -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = -\sqrt{1+x^2} + C,$$

故得所求方程的通解为

$$y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{C-\sqrt{1+x^2}}.$$

五、$a_n = 0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$，

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\mathrm{d}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{\left[-\frac{\pi-x}{2n}\cos nx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{2n}\mathrm{d}x\right\} \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2n} - \left[\frac{\sin nx}{2n^2}\right]_0^{\pi}\right\} = \frac{1}{n} \quad (n=1,2,3,\cdots). \end{aligned}$$

由狄里克雷收敛定理，得

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx, x\in(0,\pi].$$

六、

1. 曲面在点(x_0,y_0,z_0)处法向量为

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right),$$

切平面方程为

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0,$$

即

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1.$$

该平面在三个坐标轴上的截距分别为$\frac{a^2}{x_0},\frac{b^2}{y_0},\frac{c^2}{z_0}$,故所围四面体的体积

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\frac{a^2}{x_0}\frac{b^2}{y_0}\cdot\frac{c^2}{z_0}=\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}.$$

按题意需求函数 $xyz(x,y,z>0)$在条件$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 约束下的极值.

作

$$F(x,y,z)=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),$$

令

$$\begin{cases}F_x=yz+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0,\\ F_y=xz+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0,\\ F_z=xy+\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0,\end{cases}$$

与约束条件$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1$联立解得惟一可能极值点:

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}},y=\frac{b}{\sqrt{3}},z=\frac{c}{\sqrt{3}}.$$

由于 $F(x,y,z)$的最大值一定存在,故$\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$即为所求切点,所求切平面为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3},$$

所求体积为

$$V=\frac{a^2b^2c^2}{6\cdot\dfrac{a}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{b}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{c}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc.$$

2. (1) Ω 的体积为

$$V=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant e^{2z}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\pi e^{2z}\mathrm{d}z=\frac{e^2-1}{2}\pi.$$

(2) 由$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，得

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2},$$

于是 Ω 的表面积为

$$\begin{aligned}A&=\pi e^2+\pi\cdot 1^2+\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant e^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy\\&=\pi(e^2+1)+\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{e}\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho\\&=\pi\left[e^2+1+e\sqrt{1+e^2}+\ln\left(e+\sqrt{1+e^2}\right)-\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right].\end{aligned}$$

（四）高等数学（下）期末考试试卷（Ⅱ）

试　题

一、填空题.

1. 函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在区域 D 内连续是 $z=f(x,y)$ 在 D 内可微的__________条件.（充分，必要，充要）

2. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 的方向导数可以用公式 $\frac{\partial f}{\partial l}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$ 来计算的充分条件为 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处__________.（连续，偏导数存在，可微分）

3. 若三阶常系数齐次线性微分方程有解 $y_1=e^{-x}$，$y_2=xe^{-x}$，$y_3=e^{x}$，则该微分方程为________________.

4. 周期为 2 的函数 $f(x)$ 在一个周期内的表达式为 $\begin{cases}x, 0.5<x<1,\\ 1, -1\leqslant x\leqslant 0.5,\end{cases}$ 则它的傅里叶级数在 $x=-3.5$ 处的和为__________.

5. 幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n}$ 的收敛域是__________.

二、设函数 $f(u,v)$ 有二阶连续的偏导数，且 $f_u(0,0)=1$，$f_v(0,0)=-1$. 函数 $z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)$，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(x,y)=(0,1)}$.

三、求抛物面 $z=x^2+y^2$ 到平面 $x+y+z+1=0$ 的最近距离.

四、计算下列积分：

1. $\iint\limits_D e^{x^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为三直线 $y=0$，$y=x$ 与 $x=1$ 所围成的平面区域.

2. $\oiint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 及 $x+y+z=1$ 所围成的四面体的边界曲面的外侧.

3. $\oint\limits_{\Gamma} xyz\mathrm{d}z$，其中 Γ 是曲线 $\begin{cases}y-z=0,\\ x^2+y^2+z^2=1,\end{cases}$ 从 z 轴正向看去，Γ 沿逆时针

方向.

五、级数.

1. 设$\{a_n\}$是等差数列,公差 $d\neq 0$, $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$. 问:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{s_n}$ 是绝对收敛还是条件收敛或是发散的?说明理由.

2. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$的收敛域与和函数$s(x)$.

六、微分方程.

1. 求微分方程 $xy'+y=x\ln x$ 的通解.

2. 设函数 $f(x)$有二阶连续导数,且 $f(0)=0, f'(0)=1$. 如果曲线积分

$$\int_L[x^2-f(x)]y\mathrm{d}x+[f'(x)+y]\mathrm{d}y$$

与路径 L 无关,求 $f(x)$.

参考答案

一、

1. 必要.

2. 可微分.

3. 根据常系数齐次线性微分方程解的结构可知,方程的特征方程为

$$[r-(-1)]^2(r-1)=0,\text{即 } r^3+r^2-r-1=0,$$

故得所求方程为

$$y'''+y''-y'-y=0.$$

4. 记函数 $f(x)$的傅里叶级数的和函数为 $s(x)$. 由于 $s(x)$的周期为 2,因此

$$s(-3.5)=s(-3.5+4)=s(0.5)=\frac{f(0.5^-)+f(0.5^+)}{2}=0.75.$$

二、$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_u+\frac{1}{y}f_v$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_u+y\left(xf_{uu}-\frac{x}{y^2}f_{uv}\right)-\frac{1}{y^2}f_v+\frac{1}{y}\left(xf_{vu}-\frac{x}{y^2}f_{vv}\right),$$

故

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,1)}=f_u(0,0)-f_v(0,0)=-2.$$

三、解法一

点(x,y,z)到平面的距离为

$$d=\frac{|x+y+z+1|}{\sqrt{3}}.$$

先求 d^2 在条件 $z=x^2+y^2$ 下的最小值,设

$$F(x,y,z)=\frac{1}{3}(x+y+z+1)^2+\lambda(z-x^2-y^2),$$

令$$\begin{cases}F_x=\frac{2}{3}(x+y+z+1)-2\lambda x=0,\\ F_y=\frac{2}{3}(x+y+z+1)-2\lambda y=0,\\ F_z=\frac{2}{3}(x+y+z+1)+\lambda=0,\end{cases}$$

并与条件 $z=x^2+y^2$ 联立解得惟一可能极值点 $x=y=-\frac{1}{2},z=\frac{1}{2}$.

由问题的实际意义可知,点$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$到平面的距离即为所求:

$$d=\frac{\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

解法二

先求出抛物面 $z=x^2+y^2$ 上的点,使该点的切平面平行平面 $x+y+z+1=0$,为此设切点为 $P(x_0,y_0,z_0)$,则抛物面在点 P 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(2x_0,2y_0,-1),$$

令 $$\boldsymbol{n}/\!/(1,1,1),$$

解得 $$x_0=-\frac{1}{2},y_0=-\frac{1}{2},z_0=x_0^2+y_0^2=\frac{1}{2}.$$

由问题的几何意义可知点 $P\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$到平面的距离即为所求:

$$d=\frac{\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

四、

1. 积分区域 D 如图 5 所示.

$$\iint_D e^{x^2}d\sigma=\int_0^1dx\int_0^x e^{x^2}dy=\int_0^1 xe^{x^2}dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1=\frac{e-1}{2}.$$

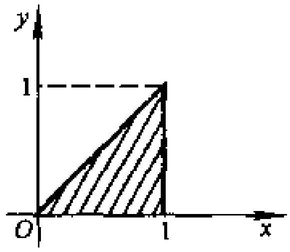


图 5

2. 设所围成的四面体为 Ω,由高斯公式得

$$I=\oiint_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iiint_{\Omega}(y+z+x)\mathrm{d}v,$$

由 Ω 关于变量 x,y,z 的轮换对称性可知,

$$\iiint_{\Omega} y\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega} x\mathrm{d}v,$$

故

$$I=3\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}v=3\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D_z} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\int_0^1 z\cdot\frac{(1-z)^2}{2}\mathrm{d}z=\frac{1}{8},$$

其中 D_z 是竖标为 z 的平面截四面体 Ω 所得的平面闭区域.

3. 曲线 Γ 的方程可写为 $\begin{cases} y-z=0, \\ x^2+2y^2=1. \end{cases}$ 取曲面 Σ 为平面 $y-z=0$ 上被 Γ 所围部分的上侧,其上各点处的单位法向量为 $\boldsymbol{e}_n=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$.

由斯托克斯公式,得

$$\oint_{\Gamma} xyz\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & xyz \end{vmatrix}\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\frac{1}{\sqrt{2}}yz\mathrm{d}S$$
$$=\iint_{x^2+2y^2\leqslant 1}\frac{y^2}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\xlongequal[y=\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin\theta\right)^2\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\mathrm{d}\rho$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi.$$

五、

1. $a_n=a_1+(n-1)d,$

$$s_n=\sum_{k=1}^{\infty}[a_1+(k-1)d]=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot\frac{1}{s_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{na_1+\frac{n(n-1)}{2}d}=\frac{2}{d}\neq 0,$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{s_n}$ 绝对收敛.

2. 记 $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{2(n+1)}}{a_n x^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}x^2=x^2,$$

故幂级数当 $x^2<1$,即 $|x|<1$ 时绝对收敛,当 $x^2>1$,即 $|x|>1$ 时发散,从而收敛半径为 $R=1$. 当 $x=\pm1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 收敛,

因此收敛域为 $[-1,1]$.

记 $s_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$,则

$$s_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2},$$

$$s(x)=xs_1(x)=x\int_0^x s_1'(x)\mathrm{d}x=x\arctan x.$$

六、

1. **解法一** 所给方程是非齐次线性方程,它所对应的齐次线性方程为

$$xy'+y=0,$$

其解为
$$y=\frac{C}{x}.$$

设原方程的解为 $y=\dfrac{u(x)}{x}$,代入原方程得

$$u'=x\ln x,$$

解得
$$u=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C,$$

故所求通解为
$$y=\frac{x}{2}\ln x-\frac{x}{4}+\frac{C}{x}.$$

解法二 根据一阶非齐次线性方程的解的公式得

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\int\ln x\,\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\ln x}\int\ln x\,\mathrm{e}^{\ln x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C\right)\\&=\frac{x}{2}\ln x-\frac{x}{4}+\frac{C}{x}.\end{aligned}$$

2. 由于曲线积分与路径无关,故有

$$\frac{\partial}{\partial y}\{[x^2-f(x)]y\}=\frac{\partial}{\partial x}[f'(x)+y],$$

即
$$x^2-f(x)=f''(x).$$

因此 $y=f(x)$ 是下列初值问题的解:

$$\begin{cases} y'' + y = x^2, \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1. \end{cases}$$

这是二阶常系数线性微分方程,其特征方程为

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

解得特征方程的根 $\lambda = \pm i$,故对应齐次线性微分方程的通解为

$$Y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

设方程的一个特解为

$$y^* = ax^2 + bx + C,$$

代入方程解得 $a = 1, b = 0, C = -2$,故方程的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + x^2 - 2,$$

由条件 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1$,解得 $C_1 = 2, C_2 = 1$,即得

$$f(x) = 2\cos x + \sin x + x^2 - 2.$$